Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 5 –
Abgabe Montag, 30.5.2005, 14 Uhr

Aufgabe 18 (4 Punkte). Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $C_b(X)$ der Banachraum

$$C_b(X) = \{f \in C(X) \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

mit der Supremumsnorm sowie M_g der Multiplikationsoperator mit $g \in C_b(X) \setminus \{0\}$,

$$M_g : C_b(X) \to C_b(X), \;\; f \mapsto g \cdot f.$$

a) Bestimmen Sie $\sigma(M_g)$ und geben Sie Beispiele mit $\sigma_P(M_g) = \emptyset$ bzw. $\sigma_P(M_g) \neq \emptyset$ an.

b) Berechnen Sie den Spektralradius $r(M_g)$.

c) (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist M_g nicht kompakt.

Aufgabe 19 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass zu jeder kompakten Teilmenge K von $\mathbb{C}$ ein *Hilbert*raum H und ein $T \in \mathscr{L}(H)$ existieren mit $\sigma(T) = K$.

Aufgabe 20 (4 Punkte).

a) Seien $\|\,.\,\|$ und $\|\,.\,\|'$ zwei äquivalente Normen auf einem Vektorraum E. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Operatornormen auf $\mathscr{L}(E)$ ebenfalls äquivalent sind.

b) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, so ist folgende Abbildung eine Norm auf $\mathbb{K}^n$:

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \; x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \;\; \mapsto \;\; \Big(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Geben Sie eine direkte Begründung für den Satz über den Spektralradius

$$r(A) = \max\{|\lambda_j| \mid \lambda_j \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

Aufgabe 21 (mündlich). Sei H ein Hilbertraum mit ONB $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ und (α_j) eine Nullfolge in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

a) Es gibt genau ein $T \in \mathscr{L}(H)$ mit $Ty_j = \alpha_j y_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

b) T ist kompakt.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Es sei die in Absatz 4.2 beschriebene Situation der schwingenden Saite gegeben. Weiter seien $v_a, v_b \in C^2(I) \setminus \{0\}$ Lösungen von $Su = 0$ mit

$$v_a(a) = v_b(b) = 0 \quad \text{und} \quad v_a'(a) = v_b'(b) = 1$$

und es sei $w \in C^1(I)$ definiert durch

$$w(s) := \det \begin{pmatrix} v_a(s) & v_b(s) \\ v_a'(s) & v_b'(s) \end{pmatrix}, \quad s \in I\,.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $s \in I$ ist
$$-\rho(s)\, w(s) = -\rho(a)\, w(a) =: c \neq 0\,.$$

b) Die Funktion
$$G : I \times I \to \mathbb{K}, (s,t) \mapsto \frac{1}{c} \cdot \begin{cases} v_a(s)\, v_b(t) & \text{für } s \leq t \\ v_a(t)\, v_b(s) & \text{für } t < s \end{cases}$$
ist eine *Greensche Funktion* von S, d.h. der von dem stetigen Kern $G \in C(I \times I)$ erzeugte Hilbert-Schmidt-Integraloperator $K : C(I) \to C^2_R(I)$ ist die Inverse von S.