Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

**Übungen zur Funktionalanalysis**

– Blatt 6 –

Abgabe Montag, 6.6.2005, 14 Uhr

**Aufgabe 23** (mündlich). Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathscr{L}(E)$, für den nur die Kerne (oder nur die Bilder) von $T^j$ stabil werden (d.h. Kern $T^q =$ Kern $T^{q+1}$ für ein $q$, aber Bild $T^j \neq$ Bild $T^{j+1}$ für alle $j$, bzw. umgekehrt).

**Aufgabe 24** (4 Punkte). Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a \in \ell^q(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Zeigen Sie:

a) Für alle $p \in [1, \infty]$ ist ein stetiger Operator $T : \ell^p(\mathbb{Z}) \to \ell^q(\mathbb{Z})$ definiert durch

$$\big(x_k\big)_{k\in\mathbb{Z}} \longmapsto \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{jk}\, x_k\Big)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

b) Für $p \in \,]1, \infty]$ ist $T$ kompakt, im allgemeinen jedoch nicht für $p = 1$ (Gegenbeispiel).

**Aufgabe 25** (3 Punkte). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $k \in L^2\ (A \times A)$ und $K : L^2(A) \to L^2(A)$ der zugehörige Hilbert-Schmidt-Integraloperator. Zeigen Sie, dass für $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\dim \operatorname{Kern}(\lambda I - K) \ \leq\ \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{A\times A} |k(s,t)|^2\, d(s,t)\,.$$

*Hinweis:* $\sum \|g_j\|^2$ betrachten zu einer ONB $(g_j)$ von Kern$(\lambda I - K)$.

**Aufgabe 26** (4 Punkte). Sei $0 \neq g \in C([0,1])$, $k \in C([0,1]^2)$ mit $k(s,t) = g(s)$ und $K \in \mathscr{L}(C([0,1]))$ der zugehörige Integraloperator.
Berechnen Sie alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von $K$, bestimmen Sie jeweils die Abbruchzahl $q\ \ (= q(\lambda))$ und geben Sie für $f \in C([0,1])$ die konkrete Zerlegung in

$$C([0,1]) = \operatorname{Kern}(\lambda Id - K)^q \oplus \operatorname{Bild}(\lambda Id - K)^q$$

an.