Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 7 –

Abgabe Montag, 13.6.2005, 14 Uhr

Aufgabe 27 (mündlich). Sei $(E, \|\,.\,\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass mit

$$f_x(y) := \|x-y\| - \|y\|\,, \quad x, y \in E,$$

die (nicht-lineare) Abbildung

$$\phi : (E, \|\,.\,\|) \to (C_b(E), \|\,.\,\|_\infty),\ x \mapsto f_x$$

eine Isometrie ist, und begründen Sie damit, dass sich E vervollständigen lässt.

Aufgabe 28 (4 Punkte). Seien H ein Hilbertraum und S, T dicht definierte Operatoren in H. Zeigen Sie:

a) $(ST)^* \supset T^*\,S^*$ und $(S+T)^* \supset S^* + T^*$.

b) Ist $S \in \mathscr{L}(H)$, so gilt in a) jeweils die Gleichheit.

Aufgabe 29 (4 Punkte). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C(G)$, $D_{M_g} := \big\{ f \in L^2(G) \;\big|\; f{\cdot}g \in L^2(G) \big\}$ und

$$M_g : D_{M_g} \to L^2(G),\ f \mapsto f \cdot g$$

der Multiplikationsoperator mit g.

a) Zeigen Sie, dass M_g dicht definiert ist und abgeschlossen, und bestimmen Sie M_g^*.

b) Zeigen Sie:

$$\sigma_P(M_g) = \big\{ \lambda \in \mathbb{K} \;\big|\; \{g = \lambda\} \text{ ist keine Nullmenge} \big\}.$$

Aufgabe 30 (4 Punkte). Sei $K : L^2(A) \to L^2(A)$ ein Hilbert-Schmidt-Operator,

$$Kf = \int_A k(\,.\,, t)\, f(t)\, dt$$

mit $k \in L^2(A \times A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie:

a) K^* ist ebenfalls Hilbert-Schmidt-Operator. Geben Sie K^* an.

b) K ist ein abstrakter Hilbert-Schmidt-Operator – das heißt, für jede ONB (g_j) von $L^2(A)$ existiert folgende Summe – und es gilt

$$\sum_j \|Kg_j\|^2 \;=\; \|k\|^2_{L^2(A\times A)}\,.$$

Bemerkung. Genauer kann man zeigen, dass der Ausdruck rechts nicht von der Wahl der ONB abhängt. Er definiert die sogenannte Hilbert-Schmidt-Norm $\|K\|_2$ des Operators K. Die Aussage in b) ist dann einfach

$$\|K\|_2 = \|k\|_2\,.$$