Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 8 –
Abgabe Montag, 20.6.2005, 14 Uhr

Aufgabe 31 (mündlich). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, nicht leer, und $f \in L^1_{loc}(G)$, d.h. $f \in L^1(K)$ für alle Kompakta $K \subset G$, und es gelte für ein $c > 0$

$$\Big| \int_G f \cdot \varphi \Big| \;\leq\; c \, \|\varphi\|_{2,G}$$

für alle $\varphi \in C_c(G)$. Zeigen Sie: Es ist schon $f \in L^2(G)$.

Aufgabe 32 (4 Punkte). Sei T der Operator am Beispiel 5.10.

a) Zeigen Sie: $\overline{\mathscr{G}(T)} = H \times \mathbb{K}y_0$.

b) Berechnen Sie den Definitionsbereich D_{T^*} des adjungierten Operators T^*.

Aufgabe 33 (4 Punkte). Sei $\emptyset \neq I = \,]a,b[$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$H^1_\alpha(I) := \big\{ u \in H^1(I) \;\big|\; u(a) = \alpha u(b) \big\} \,.$$

Der Operator P_α in $L^2(I)$ sei gegeben durch

$$D_{P_\alpha} = H^1_\alpha(I) \quad \text{und} \quad P_\alpha u = \frac{1}{i} \partial u, \quad u \in D_{P_\alpha} \,.$$

Bestimmen Sie P_α^*. Für welche I und α gilt $P_\alpha^* = P_\alpha$?

Aufgabe 34 (4 Punkte). Auf $H^1(I)$ sei durch

$$u \mapsto \|u\|_{H^1} := \big(\|u\|^2_{L^2} + \|\partial u\|^2_{L^2} \big)^{\frac{1}{2}}$$

die H^1-Norm definiert. Zeigen Sie:

a) $H^1(I)$ ist mit der H^1-Norm ein Hilbert-Raum.

b) Ist I beschränkt, so existiert ein $c > 0$ mit

$$\|u\|_{H^1} \leq c \, \|\partial u\|_{L^2}$$

für alle $u \in H^1_0(I)$.