Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 9 –

Abgabe Montag, 27.6.2005, 14 Uhr

Aufgabe 35 (4 Punkte). Untersuchen Sie den dicht definierten Operator

$$P_m : H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\ u \mapsto \frac{1}{i}\partial u$$

und zeigen Sie:

a) $\sigma_P(P_m) = \emptyset$ b) $\sigma(P_m) = \mathbb{R}$

Hinweis: Betrachten Sie $g = e^{i\lambda\,\cdot}\varphi$ mit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ und $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \neq 0$.

Aufgabe 36 (mündlich). Sei E ein Banachraum und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E', so dass für alle $x \in E$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| < \infty\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$M := \left\{x \in E \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \text{ existiert}\right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von E ist.

Aufgabe 37 (4 Punkte). Sei E Banachraum, F normiert, $s : E \times F \to \mathbb{K}$ bilinear (oder sesquilinear) und separatstetig, das heißt, $s(\,\cdot\,, y) : E \to \mathbb{K}$, $s(x,\,\cdot\,) : F \to \mathbb{K}$ sind stetig für jedes $y \in F$ bzw. $x \in E$. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \geq 0$ mit

$$|s(x,y)| \leq c\,\|x\|\,\|y\|$$

für alle $(x,y) \in E \times F$, und folgern Sie, dass s stetig ist.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Seien E_1, E_2 und F Banachräume, $T_j \in \mathcal{L}(E_j, F)$ für $j = 1, 2$. Die Gleichung $T_1 x = T_2 y$ habe für alle $x \in E_1$ eine eindeutige Lösung $y \in E_2$. Zeigen Sie: Die dadurch definierte Abbildung

$$T : E_1 \to E_2$$

ist linear und stetig.