Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 10 –

Abgabe Montag, 4.7.2005, 14 Uhr

Aufgabe 39 (mündlich). Zeigen Sie, dass der Sturm-Liouville-Operator

$$S : C_R^2(I) \to C(I)$$

aus Beispiel 4.8 als Operator in $L^2(I)$ wesentlich selbstadjungiert ist.

Hinweis: Für den wie in Aufgabe 22 definierten Hilbert-Schmidt-Integraloperator $K \in \mathscr{L}(L^2(I))$ gilt

1) $S \pm i\,\mathrm{Id} = (\mathrm{Id} \pm iK)S$ und 2) K ist selbstadjungiert.

Aufgabe 40 (3 Punkte). Sei M_g der durch $g \in C(\mathbb{R}^n)$ definierte Multiplikationsoperator (vgl. Aufgabe 29). Geben Sie jeweils die Funktionen g an, so dass gilt:

a) M_g ist stetig,

b) M_g ist unitär.

Aufgabe 41 (4 Punkte). Sei H ein Hilbertraum, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS in H und $(\alpha_j) \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie: Durch

$$H \ni x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \langle x \,|\, y_j\rangle y_j$$

wird ein kompakter, selbstadjungierter Operator $T \in \mathscr{L}(H)$ definiert.

Aufgabe 42 (5+2 Punkte). Seien H ein Hilbertraum, $T \in \mathscr{L}(H)$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie:

a) Ist T positiv (semidefinit), d.h.

$$\langle Tx \,|\, x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in H\,,$$

so gibt es einen kompakten, selbstadjungierten, positiven Operator S mit

$$S^2 = T\,.$$

b) Ist $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H aus EV'en von T zu EW'en (λ_j), so ist durch

$$x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} e^{i\lambda_j} \langle x \,|\, y_j\rangle y_j$$

ein unitärer Operator $U \in \mathscr{L}(H)$ definiert.

(∗) Geben Sie eine zweite Darstellung für U an.