

## Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 11 –

Abgabe Montag, 11.7.2005, 14 Uhr

**Aufgabe 43** (mündlich). Sei  $H$  ein komplexer Hilbertraum und  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_2(H)$  Hilbert-Schmidt-Operatoren. Zeigen Sie, dass  $T_2 T_1$  ein Spurklasse-Operator ist.

**Aufgabe 44** (4 Zusatzpunkte). Seien  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_2(L^2(A))$  Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren mit stetigem Kern  $k_1$  bzw.  $k_2$ , und  $A \subset \mathbb{R}^n$  sei kompakt. Zeigen Sie:  $T_2 T_1$  ist Spurklasse-Integraloperator mit Kern

$$k : (s, t) \mapsto \int_A k_2(s, \tau) k_1(\tau, t) d\tau$$

und

$$\text{Spur}(T_2 T_1) = \int_A k(t, t) dt.$$

**Aufgabe 45** (Singularwertzerlegung des modifizierten Volterra-Operators). Sei  $I = [0, 1]$  und

$$T : L^2(I) \rightarrow L^2(I), f \mapsto \int_0^1 f.$$

a) (2 Punkte) Zeigen Sie:  $T^* T$  ist Integraloperator auf  $L^2(I)$  mit Integral-Kern

$$h : (s, t) \mapsto \min(s, t).$$

b) (4 Punkte) Formen Sie  $T^* T u = \lambda u$  in eine Differentialgleichung (mit Randbedingungen) um, und berechnen Sie damit die Eigenwerte  $\lambda_j$  und Eigenfunktionen  $u_j$  von  $T^* T$ .

c) (2 Punkte) Geben Sie die Singularwertzerlegung von  $T$  an.

d) (1 Punkt) Berechnen Sie  $\sum_j \lambda_j$  mit Aufgabe 44.