

Differentialgeometrie und Mathematische Physik

Seminar im Wintersemester 1998/99

Professor Harald Upmeyer
Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Dirac-Lagrange-Dichte

Thomas Eckert

eckert(@)mathematik.uni-marburg.de

Zusammenfassung

In dieser Vortragsausarbeitung wird die Lagrange-Funktion für den Fermionen-Part hergeleitet und gezeigt, wie deren Minima auf die Materie-Feldgleichung $\not{D}\psi = 0$ führen. Um aber den Dirac-Operator $\not{D}$ definieren zu können, benötigt man erst einmal mehrere algebraische Konzepte, die vorher eingeführt werden.

So besteht ein erster Abschnitt aus der Konstruktion und Untersuchung der allem zugrunde liegenden *Clifford-Algebra*, die die Eigenschaft hat, alle vorkommenden Objekte als Elemente zu enthalten, nämlich Skalare, Vektoren und Gruppen-Elemente der *Clifford-Gruppen*, denen der zweite Abschnitt gewidmet ist. Hier geht es darum, die *Spin-Gruppe* als universelle Überlagerungsgruppe der speziellen (pseudo-)orthogonalen Gruppe zu erkennen, zumindest in den interessierenden Fällen von euklidischer Metrik und Minkowski-Signatur. Diese zweiblättrige Überlagerung führt im dritten Abschnitt auf den Begriff der *Spinordarstellung* oder zweiwertigen *SO*-Darstellung, die für gerade Dimensionen als sogenannte Dirac-Darstellung immer gegeben ist. Damit hat man dann alle Hilfsmittel zusammen, um den *Dirac-Operator* auf dem darstellungstragenden *Spinorenraum* zu definieren, genauer auf den spinorwertigen Funktionen über einer Mannigfaltigkeit, die dazu eine *Spin-Struktur* tragen muss. Erst nach all diesen Vorarbeiten kann dann im vierten Abschnitt die oben genannte *Dirac-Aktion* behandelt werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Clifford-Algebra	2
1.1	Einleitung	2
1.2	Konstruktion der Clifford-Algebra	2
1.3	Klassifikation von Clifford-Algebren	4
1.4	Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil	6
2	Clifford-Gruppen	6
2.1	Einleitung	6
2.2	Orthogonale Darstellung der Clifford-Gruppen	7
2.3	Die Clifford-Gruppen als Lie-Gruppen	10
2.4	Die Lie-Algebra der Spin-Gruppe	11
2.5	Die Spin-Gruppe als universelle SO-Überlagerung	13
3	Spinor-Darstellungen	15
3.1	Einleitung	15
3.2	Chiral-Spinoren	15
3.3	Die zugehörige Liealgebra-Darstellung	16
4	Dirac-Operator	17
4.1	Dirac-Operator auf offenen Mengen	17
4.2	Dirac-Operator und Chiral-Spinoren	19
4.3	Dirac-Operator in Koordinaten	19
5	Dirac-Aktion	20

1 Clifford-Algebra

1.1 Einleitung

Sei V ein Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, ausgestattet mit einer nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform $q : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Die Clifford-Algebra $\mathcal{C}\ell(V, q)$ soll die durch V erzeugte unitale $\mathbb{K}$ -Algebra sein, so dass

$$v \times v = q(v, v) \mathbf{1} \quad \forall v \in V,$$

wobei $\times$ das Produkt auf $\mathcal{C}\ell(V, q)$ bezeichne und $\mathbf{1}$ dessen neutrales Element, das wir auch oft weglassen wollen. Diese Bedingung ist nach Polarisationsformel äquivalent zu

$$v \times w + w \times v = 2q(v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

Bezüglich einer q -Orthonormalbasis $e^1, \dots, e^n$ von V erhält man die ebenfalls äquivalente Formulierung dieser Clifford-Eigenschaft

$$e^i \times e^j = -e^j \times e^i \quad \text{und} \quad e^i \times e^i = q^{ii} \quad \forall i \neq j,$$

wo mit $q^{ij} := q(e^i, e^j) = \pm \delta_j^i$ die Metrikoeffizienten bezeichnet seien. Im reellen Fall seien sie überdies nach Vorzeichen geordnet durch

$$(q^{ij}) = \mathbf{1}_{r,s} := \begin{pmatrix} +\mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_s \end{pmatrix},$$

wo bei $r + s = n$ mit $r - s$ die Signatur von q angegeben sei. Durch Umsortieren mittels dieser Beziehung ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell(V, q) &= \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} v_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \times \dots \times e^{i_k} : v_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{I \subset N} v_I e^I : v_I \in \mathbb{K} \right\}, \end{aligned}$$

wenn man kurz e^I für $e^{i_1} \times \dots \times e^{i_k}$ schreibt, falls $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\} =: N$ und $i_1 < \dots < i_k$. Insbesondere ist

$$\dim \mathcal{C}\ell(V, q) \leq 2^n,$$

und die folgende explizite Konstruktion der Clifford-Algebra wird Gleichheit zeigen.

1.2 Konstruktion der Clifford-Algebra

Es sei weiterhin $e^1, \dots, e^n$ eine Orthonormalbasis von V und $q^{ij} = q(e^i, e^j)$. $\mathcal{P}(N)$ bezeichne die Potenzmenge von $N = \{1, \dots, n\}$.

Definition (Clifford-Algebra).

$$\mathcal{C}\ell(V, q) := \mathbb{K} \langle \mathcal{P}(N) \rangle = \mathbb{K}^{\mathcal{P}(N)}$$

Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\mathcal{P}(N)$, genauer mit Basis $\{e^I : I \in \mathcal{P}(N)\}$, wobei

$$\mathcal{P}(N) \hookrightarrow \mathbb{K}^{\mathcal{P}(N)}, \quad I \mapsto e^I, \quad e^I(J) := \delta_J^I.$$

Wir definieren das Produkt auf Basiselementen, etwa $e^I \times e^J$, und sonst durch Bilinearität. Dazu bezeichne

$$I + J = I \setminus J \cup J \setminus I = I \cup J \setminus I \cap J$$

die symmetrische Differenz für $I, J \subset N$ und

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} +1 & i \leq j \\ -1 & i > j \end{cases}$$

das vollständig antisymmetrische ε -Symbol für $i, j \in N$.

Definition (Clifford-Produkt).

$$\begin{aligned} \sigma(I, J) &:= \prod_{i \in I, j \in J} \varepsilon_{ij} \prod_{k \in I \cap J} q^{kk} = \pm 1 \\ e^I \times e^J &:= \sigma(I, J) e^{I+J}. \end{aligned}$$

Proposition. *Das so auf $\mathcal{C}\ell(V, q)$ definierte Produkt ist assoziativ.*

Beweis. Sei $I, J, K \subset N$ und $\chi_I : N \rightarrow \mathbb{Z}_2$ die charakteristische Funktion von I . Wegen $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}_2$ ist $\chi_{I+J} = \chi_I + \chi_J$, also $\chi_{(I+J)+K} = \chi_I + \chi_J + \chi_K = \chi_{I+(J+K)}$ und damit

$$(I + J) + K = I + (J + K).$$

Außerdem gilt für das Vorzeichen

$$\begin{aligned} \sigma(I + J, K) &= \prod_{h \in I+J, k \in K} \varepsilon_{hk} \prod_{l \in (I+J) \cap K} q^{ll} \\ &= \prod_{i \in I, k \in K} \varepsilon_{ik} \prod_{j \in J, k \in K} \varepsilon_{jk} \prod_{l \in I \cap K} q^{ll} \prod_{l \in J \cap K} q^{ll} \\ &= \sigma(I, K) \sigma(J, K) \end{aligned}$$

und analog

$$\sigma(I, J + K) = \sigma(I, J) \sigma(I, K).$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} (e^I \times e^J) \times e^K &= \sigma(I, J) e^{I+J} \times e^K \\ &= \sigma(I, J) \sigma(I + J, K) e^{(I+J)+K} \\ &= \sigma(I, J) \sigma(I, K) \sigma(J, K) e^{I+J+K} \\ &= e^I \times (e^J \times e^K). \end{aligned}$$

□

Bemerkung. $e^\emptyset = 1$, denn $e^\emptyset \times e^I = \sigma(\emptyset, I) e^{\emptyset+I} = e^I = e^I \times e^\emptyset$.

Proposition. $e^I \times e^J = (-1)^{|I||J| - |I \cap J|} e^J \times e^I$.

Beweis. $\sigma(J, I) = \prod \varepsilon_{ji} \varepsilon_{ij} \sigma(I, J) = (-1)^{|I||J| - |I \cap J|} \sigma(I, J)$.

□

Proposition. *Das Produkt $\times$ erfüllt die Clifford-Bedingung und $\mathcal{C}\ell(V, q)$ ist bezüglich dieses Clifford-Produkts von V erzeugt.*

Beweis. Durch die Einbettung $V \ni e^i \mapsto e^{\{i\}} \in \mathcal{C}$ erhält man

$$e^i \times e^j = \sigma(\{i\}, \{j\}) e^{\{i\} + \{j\}} = \varepsilon_{ij} e^{\{i,j\}} = -\varepsilon_{ji} e^{\{i,j\}} = -e^j \times e^i$$

für $i \neq j$ und

$$e^i \times e^i = \sigma(\{i\}, \{i\}) e^{\{i\} + \{i\}} = q^{ii} e^\emptyset.$$

Also ist $\times$ tatsächlich ein Clifford-Produkt auf $\mathcal{C}(V, q)$. Und wegen

$$e^I = e^{i_1} \times \cdots \times e^{i_k}, \quad I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$$

ist $\mathcal{C}(V, q)$ auch bezüglich $\times$ von V erzeugt. $\square$

Bemerkung. Bei obiger Konstruktion wurde nicht wirklich benötigt, dass q nicht-ausgeartet sein sollte. Lässt man also auch ausgeartete Bilinearformen q zu, so erhält man in dem Extremfall $q = 0$ die Grassmann-Algebra,

$$\Lambda V = \mathcal{C}(V, 0).$$

Bemerkung. Alternativ und abstrakter ergibt sich die Clifford-Algebra über einem Vektorraum V mit Bilinearform q auch als Quotient

$$\mathcal{C}(V) = T(V)/I(V)$$

aus der Tensoralgebra $T(V) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} T^k(V)$ und dem Ideal $I(V) := T(V)(v \otimes v - q(v, v))T(V)$, also dem beidseitigen Ideal, das von Tensoren der Form $v \otimes v - q(v, v)$ erzeugt wird. Das Clifford-Produkt ist dann einfach das induzierte Produkt der Quotientenalgebra, das heißt das repräsentantenweise gebildete Tensorprodukt. Dieser Ansatz ist zum Beispiel in [LM] durchgeführt.

1.3 Klassifikation von Clifford-Algebren

Als Standardbezeichnung führt man für $n = r + s$ ein

$$\mathcal{C}(r, s) := \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, q_{r,s}),$$

wobei $q_{r,s}$ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^n$ mit Signatur $r - s$ bezeichne, das heißt

$$q_{r,s}(v, w) = v^t \mathbf{1}_{r,s} w = \sum_{i=1}^r v_i w_i - \sum_{i=r+1}^n v_i w_i.$$

Mit $\mathbb{K}(n)$ sei darüber hinaus die Menge der $n \times n$ -Matrizen über $\mathbb{K}$ benannt.

Satz. Eine vollständige Klassifikation von $\mathcal{C}(r, s)$ ergibt sich aus der Tabelle

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{C}(n, 0)$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathcal{C}(0, n)$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$

sowie aus den Fortsetzungsidealitäten

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(r+8, 0) &\cong \mathcal{C}(r, 0) \otimes \mathcal{C}(8, 0) \\ \mathcal{C}(0, s+8) &\cong \mathcal{C}(0, s) \otimes \mathcal{C}(0, 8) \end{aligned}$$

und dem Füllmechanismus

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(r+1, s+1) &\cong \mathcal{C}(r, s) \otimes \mathcal{C}(1, 1) \\ \mathcal{C}(1, 1) &\cong \mathbb{R}(2). \end{aligned}$$

Zur Herleitung der Tabelle berechnet man $\mathcal{C}\ell(r, s)$ für $r + s = n \leq 2$ direkt und zeigt und benutzt die beiden Gleichungen

$$\mathcal{C}\ell(n + 2, 0) \cong \mathcal{C}\ell(0, n) \otimes \mathcal{C}\ell(2, 0)$$

$$\mathcal{C}\ell(0, n + 2) \cong \mathcal{C}\ell(n, 0) \otimes \mathcal{C}\ell(0, 2)$$

sowie die Beziehungen

$$\mathbb{K}(n) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(m) \cong \mathbb{K}(nm)$$

$$\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong \mathbb{K}(n)$$

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2)$$

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4).$$

Insgesamt erhält man also folgende Tabelle mit $\mathcal{C}\ell(r, s)$ im Feld (r, s) , wobei abkürzend $2 \mathbb{K}(n) := \mathbb{K}(n) \oplus \mathbb{K}(n)$ die Algebra mit komponentenweisem Produkt sein soll.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$2 \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$2 \mathbb{R}(8)$
1	$2 \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$2 \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$2 \mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$2 \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$2 \mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$2 \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$2 \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$2 \mathbb{H}(16)$
5	$2 \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$2 \mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$2 \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$2 \mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$2 \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$2 \mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$

Die Klassifikation der komplexen Clifford-Algebren fällt erheblich einfacher aus, da über $\mathbb{C}$ alle symmetrischen Bilinearformen äquivalent sind.

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n) := \mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n) = \mathcal{C}\ell(r, s) \otimes \mathbb{C}.$$

Satz. Die komplexen Clifford-Algebren lassen sich rekursiv berechnen mit

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n + 2) \cong \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2)$$

und den Startwerten

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(0) &\cong \mathbb{C}, & \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(1) &\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2) &\cong \mathbb{C}(2). \end{aligned}$$

Insgesamt kann man den Klassifikationssätzen entnehmen, wann die Clifford-Algebren einfach Matrizen-Algebren sind. Einen Isomorphismus

$$\gamma : \mathcal{C}\ell(\mathbb{K}^{r+s}) \rightarrow \mathbb{K}(2^{n/2})$$

hat man nämlich genau für $r - s \equiv 0$ oder $2 \pmod{8}$, genannt *Majorana-Darstellung*, und im Komplexen für alle geraden n , hier genannt *Dirac-Darstellung*. In beiden Fällen heißt das Bild der Standardbasis

$$\gamma^j := \gamma(e^j) \in \mathbb{K}(n)$$

γ -Matrizen, die für $r = 1$ üblicherweise mit $0, \dots, n - 1$ indiziert werden wegen der separaten Zeitdimension. Außerdem hat man als Standardbezeichnung

$$\gamma_5 := \gamma(e^N) = \gamma(e^1 \times \dots \times e^n) = \gamma^1 \dots \gamma^n,$$

was aber bei höheren Dimensionen nicht mit den γ -Matrizen zu verwechseln ist.

1.4 Zerlegung in geraden und ungeraden Anteil

Lemma. Sei φ eine Symmetrie auf einem Vektorraum V , das heißt

$$\varphi : V \rightarrow V \text{ linear, } \varphi^2 = \text{id}.$$

Dann wird V durch die beiden Projektoren $P_{\pm} := \frac{1}{2}(\text{id} \pm \varphi)$ in deren Bilder $V_{\pm} := P_{\pm}V$ zerlegt,

$$V = V_+ \oplus V_-.$$

Beweis. Wegen $\varphi^2 = \text{id}$ erhält man durch Ausmultiplizieren

$$P_{\pm}^2 = P_{\pm} \quad \text{und} \quad P_+P_- = 0 = P_-P_+.$$

Da außerdem $P_+ + P_- = \text{id}$ ist, ergibt sich $V = P_+V + P_-V$. Bleibt zu zeigen, dass der Durchschnitt $V_+ \cap V_-$ trivial ist. Da $P_{\pm}$ Projektionen sind, gilt für $v \in V_{\pm}$ jeweils $v = P_{\pm}v$, denn mit $v = P_{\pm}w$, $w \in V$ geeignet, ist $P_{\pm}v = P_{\pm}^2w = P_{\pm}w = v$. Also ergibt sich für $v \in V_+ \cap V_-$ bereits $v = P_+v = P_+P_-v = 0$. $\square$

Um damit eine Zerlegung der Clifford-Algebra zu gewinnen, braucht man also eine Symmetrie auf $\mathcal{C}\ell(V, q)$.

Definition.

$$\varphi : \mathcal{C}\ell(V, q) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V, q), \quad \varphi(e^I) := \overline{e^I} := (-1)^{|I|}e^I.$$

Diese Konjugation ist einfach die Fortsetzung der Zuordnung $\bar{v} = -v$ für $v \in V$ auf ganz $\mathcal{C}\ell(V, q)$.

Da φ tatsächlich Symmetrie ist, hat man nun eine Zerlegung der Clifford-Algebra

$$\mathcal{C}\ell(V, q) = \mathcal{C}\ell_+(V, q) \oplus \mathcal{C}\ell_-(V, q)$$

in geraden und ungeraden Anteil. Die Bezeichnung rechtfertigt sich aus folgender Beobachtung.

Bemerkung.

$$\mathcal{C}\ell_+(V, q) = \left\{ \sum_{|I| \text{ gerade}} v_I e^I : v_I \in \mathbb{K} \right\}$$

und analog für $\mathcal{C}\ell_-(V, q)$. Oder anders ausgedrückt muss für $v_1 \times \cdots \times v_k \in \mathcal{C}\ell_{\pm}(V, q)$ mit $v_j \in V$ bereits k gerade bzw. ungerade sein.

2 Clifford-Gruppen

2.1 Einleitung

Definition. Wir definieren nun die Pin- und Spin-Gruppe als multiplikative Gruppen in der Clifford-Algebra, nämlich als

$$\text{Pin}(V, q) := \{u_1 \times \cdots \times u_k : u_j \in V, q(u_j, u_j) = \pm 1\}$$

und

$$\text{Spin}(V, q) := \text{Pin}(V, q) \cap \mathcal{C}\ell_+(V, q) = \{u_1 \times \cdots \times u_k \in \text{Pin}(V, q) : k \text{ gerade}\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\text{Spin}(V, q)$ in den relevanten Fällen von euklidischer Metrik und Minkowski-Metrik die universelle Überlagerungsgruppe von $SO(V, q)$ ist. Daher ist von nun an nur noch ein reeller Vektorraum V von Interesse.

2.2 Orthogonale Darstellung der Clifford-Gruppen

Es bezeichne $\mathcal{Cl}(V, q)^\times = G(\mathcal{Cl}(V, q))$ die Gruppe der invertierbaren Elemente der Clifford-Algebra und $\widetilde{\text{Ad}}$ die abgewandelte adjungierte Operation

$$\mathcal{Cl}(V, q)^\times \times \mathcal{Cl}(V, q) \rightarrow \mathcal{Cl}(V, q), (g, c) \mapsto \widetilde{\text{Ad}}_g(c) := g \times c \times \bar{g}^{-1}.$$

Bemerkung. Auf den $V \subset \mathcal{Cl}(V, q)$ invariant lassenden Elementen

$$\mathcal{G}(V, q) := \{g \in \mathcal{Cl}(V, q)^\times : \widetilde{\text{Ad}}_g(V) = V\}$$

induziert $\widetilde{\text{Ad}}$ eine Darstellung auf V , und zwar eine orthogonale,

$$\widetilde{\text{Ad}} : \mathcal{G}(V, q) \rightarrow O(V, q), g \mapsto \widetilde{\text{Ad}}_g.$$

Beweis. $\widetilde{\text{Ad}}$ ist Homomorphismus, das heißt $\widetilde{\text{Ad}}_{g \times h} = \widetilde{\text{Ad}}_g \circ \widetilde{\text{Ad}}_h$, denn

$$\widetilde{\text{Ad}}_{g \times h} v = g \times h \times v \times \overline{g \times h}^{-1} = g \times h \times v \times \bar{h}^{-1} \times \bar{g}^{-1} = \widetilde{\text{Ad}}_g \widetilde{\text{Ad}}_h v.$$

Und da für $g \in \mathcal{G}(V, q)$ mit $v, w \in V$ auch $\widetilde{\text{Ad}}_g v, \widetilde{\text{Ad}}_g w \in V$ sind, gilt

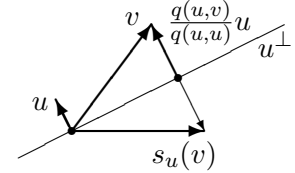
$$\begin{aligned} q(\widetilde{\text{Ad}}_g v, \widetilde{\text{Ad}}_g w) &= \widetilde{\text{Ad}}_g v \times \widetilde{\text{Ad}}_g w = -\overline{\widetilde{\text{Ad}}_g v} \times \widetilde{\text{Ad}}_g w \\ &= -\overline{g \times v \times \bar{g}^{-1}} \times g \times w \times \bar{g}^{-1} = -\bar{g} \times \bar{v} \times g^{-1} \times g \times w \times \bar{g}^{-1} \\ &= \bar{g} \times v \times w \times g^{-1} = q(v, w) \bar{g} \times \bar{g}^{-1} = q(v, w), \end{aligned}$$

so dass $\widetilde{\text{Ad}}_g$ tatsächlich orthogonal ist. □

Proposition. Für $u \in V$ mit $q(u, u) \neq 0$ ist $\widetilde{\text{Ad}}_u$ bis auf Vorzeichen eine Spiegelung auf V ,

$$\widetilde{\text{Ad}}_u(v) = v - 2 \frac{q(u, v)}{q(u, u)} u =: s_u(v),$$

insbesondere also $u \in \mathcal{G}(V, q)$.



Beweis. Da $u \times u = q(u, u)$ und $q(u, u) \neq 0$ sein soll, ist u invertierbar und $u^{-1} = q(u, u)^{-1} u$. Außerdem hat man damit dann

$$s_u(v) \times u = v \times u - 2 \frac{q(u, v)}{q(u, u)} u \times u = v \times u - 2q(u, v) = -u \times v$$

und daher

$$s_u(v) = -u \times v \times u^{-1} = u \times v \times \bar{u}^{-1} = \widetilde{\text{Ad}}_u v. \quad \square$$

An der letzten Zeile kann man auch den Grund für die Abwandlung von Ad auf $\widetilde{\text{Ad}}$ erkennen.

Die Homomorphismus-Eigenschaft aus der ersten Proposition, angewandt auf ein Element $u_1 \times \cdots \times u_k \in \text{Pin}(V, q)$, liefert mit dem zweiten Resultat das

Korollar.

$$\text{Pin}(V, q) \subset \mathcal{G}(V, q).$$

Die somit erhaltene Darstellung $\widetilde{\text{Ad}} : \text{Pin}(V, q) \rightarrow O(V, q)$ ist sogar surjektiv, da nach Cartan-Dieudonné jede q -orthogonale Matrix Produkt von Spiegelungen ist,

$$O(V, q) = \{s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k} : u_j \in V, q(u_j, u_j) \neq 0, k \leq n\},$$

und da wegen $s_u = s_{tu} \quad \forall t \in \mathbb{R}^\times$ sogar gilt

$$O(V, q) = \{s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k} : u_j \in V, q(u_j, u_j) = \pm 1, k \leq n\}.$$

Allerdings ist für $n \geq 3$ $\widetilde{\text{Ad}}$ nicht injektiv, sondern eine zweiblättrige Überlagerung. Um das zu sehen, ist nun $\ker \widetilde{\text{Ad}}$ zu berechnen.

Lemma. Für $j \in N$ und $I \subset N$ ist

$$e^j \times e^{\overline{I}} = \begin{cases} -e^{I \times e^j} & j \in I \\ e^{I \times e^j}, & j \notin I \end{cases}.$$

Beweis. $e^j \times e^{\overline{I}} = (-1)^{|I|} e^{j \times e^I} = \begin{cases} (-1)^{|I|} (-1)^{|I|-1} e^{I \times e^j} & j \in I \\ (-1)^{|I|} (-1)^{|I|} e^{I \times e^j} & j \notin I \end{cases} \quad \square$

Lemma. Sei $a \in \mathcal{Cl}(V, q)$. Gilt für $v \in V$ stets $a \times v = v \times \bar{a}$, so ist bereits $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $a = \sum a_I e^I$ und $j \in N$. Dann ist nach vorigem Lemma $a \times e^j = e^j \times \bar{a}$, das heißt

$$\sum_{I \ni j} a_I e^{I \times e^j} + \sum_{I \not\ni j} a_I e^{I \times e^j} = - \sum_{I \ni j} a_I e^{I \times e^j} + \sum_{I \not\ni j} a_I e^{I \times e^j}$$

und somit $\sum_{I \ni j} a_I e^{I \times e^j} = 0$. Und da e^j invertierbar ist, verschwindet bereits $\sum_{I \ni j} a_I e^I$ und damit auch alle a_I mit $I \ni j$, da die e^I linear unabhängig sind. Weil aber j beliebig war, muss dann $a_I = 0$ sein für alle $I \neq \emptyset$. Also ist

$$a = a_\emptyset e^\emptyset = a_\emptyset \mathbf{1} = a_\emptyset \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Bevor wir damit $\ker \widetilde{\text{Ad}}$ endgültig berechnen können, brauchen wir – auch für später noch – ein weiteres Hilfsmittel, eine Art Normabbildung.

Definition. Die lineare Transposition auf der Clifford-Algebra sei auf den Basiselementen definiert durch

$$(e^I)^t := (-1)^m e^I, \text{ wobei } |I| = 2m + \varepsilon \text{ und } \varepsilon \in 2.$$

Bemerkung. (1) $\mathbf{1}^t = \mathbf{1}$ und $v^t = v$ für $v \in V$.

(2) Die Transposition $(\cdot)^t$ ist ein Antihomomorphismus, das heißt $(a \times b)^t = b^t \times a^t$ für $a, b \in \mathcal{Cl}(V, q)$.

(3) Aus (1) und (2) hat man für $v_j \in V$ dann $(v_1 \times \dots \times v_k)^t = v_k \times \dots \times v_1$.

(4) Die Transposition vertauscht mit der Konjugation, $\bar{c}^t = \overline{c^t}$ für $c \in \mathcal{Cl}(V, q)$, was man sofort aus der Definition abliest.

Beweis von (2). Einerseits hat man

$$(e^J)^t \times (e^I)^t = (-1)^{m_J+m_I} e^J \times e^I = (-1)^{m_I+m_J+|I||J|-|I \cap J|} e^I \times e^J$$

und andererseits

$$(e^I \times e^J)^t = \sigma(I, J)(e^{I+J})^t = (-1)^m \sigma(I, J) e^{I+J} = (-1)^m e^I \times e^J,$$

wobei hier m_I , m_J und m gegeben seien durch

$$\begin{aligned} 2m + \varepsilon &= |I + J| = |I| + |J| - 2|I \cap J| \\ &= 2m_I + \varepsilon_I + 2m_J + \varepsilon_J - 2|I \cap J| \\ &= 2(m_I + m_J - |I \cap J|) + \varepsilon_I + \varepsilon_J, \end{aligned}$$

woraus man durch Fallunterscheidung für ε_I und ε_J $m = m_I + m_J + \varepsilon_I \varepsilon_J - |I \cap J|$ erhält, was aber modulo 2 äquivalent ist zu $m_I + m_J + |I||J| - |I \cap J|$, so dass die beiden Seiten übereinstimmen. $\square$

Definition. Auf der Clifford-Algebra definieren wir nun die sogenannte Norm

$$N : \mathcal{C}(V, q) \rightarrow \mathcal{C}(V, q), \quad c \mapsto N(c) := \bar{c}^t \times c.$$

Bemerkung. N soll die durch q auf V induzierte Norm verallgemeinern. Genauer hat man für $v \in V$

$$N(v) = -v \times v = -q(v, v).$$

Außerdem ist $N(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ und N eine stetige Abbildung.

Proposition. Eingeschränkt auf $\mathcal{G}(V, q)$ ist $N : \mathcal{G}(V, q) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ ein Homomorphismus.

Beweis. Sei $g \in \mathcal{G}(V, q)$. Dann ist für $v \in V$ auch $g \times v \times \bar{g}^{-1} \in V$ und also

$$g \times v \times \bar{g}^{-1} = (g \times v \times \bar{g}^{-1})^t = (\bar{g}^t)^{-1} \times v \times g^t.$$

Multiplikation mit $\bar{g}$ von rechts und $\bar{g}^t$ von links ergibt

$$N(g) \times v = \bar{g}^t \times g \times v = v \times g^t \times \bar{g} = v \times \overline{g^t \times g} = v \times N(g).$$

Das zentrale Lemma zuvor liefert dann $N(g) \in \mathbb{R}$, und da g invertierbar ist, hat man sogar $N(g) \in \mathbb{R}^\times$.

Daraus ergibt sich dann auch leicht die Homomorphismus-Eigenschaft, denn

$$\begin{aligned} N(g \times h) &= \overline{g \times h}^t \times g \times h = \bar{h}^t \times \bar{g}^t \times g \times h \\ &= \bar{h}^t \times N(g) \times h = N(g) \bar{h}^t \times h = N(g) N(h). \end{aligned}$$

$\square$

Korollar. $N(\text{Pin}(V, q)) \subset \{\pm 1\}$.

Beweis. $N(u_1 \times \cdots \times u_k) = N(u_1) \cdots N(u_k) = \pm q(u_1, u_1) \cdots q(u_k, u_k) = \pm 1$. $\square$

Satz.

$$\ker(\text{Pin}(V, q)) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} O(V, q) = \pm \mathbf{1}.$$

Beweis. Nach dem schon benutzten Lemma ist für $g \in \ker \widetilde{\text{Ad}}$ wieder $g \in \mathbb{R}^\times$ und daher auch $g^2 = g \times g = N(g) = \pm 1$, also $g = \pm 1$.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass $\pm 1 \in \text{Pin}(V, q)$ ist. Da q nicht ausgeartet sein soll, gibt es $u \in V$ mit $q(u, u) = 1$ oder -1 . Dann sind auch $1 = u \times u$ und $-1 = -u \times u = (-u) \times u$ Elemente von $\text{Pin}(V, q)$, bzw. umgekehrt. $\square$

Die bisher gewonnene Situation lässt sich in der kurzen exakten Sequenz

$$1 \rightarrow \pm 1 \rightarrow \text{Pin}(V, q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} O(V, q) \rightarrow 1$$

zusammenfassen.

Da man aber eigentlich an der Spin-Gruppe interessiert ist, stellt sich die Frage, wie sich das Ergebnis auf diese Situation überträgt.

Satz. $\widetilde{\text{Ad}}$ bildet die Spin-Gruppe auf die spezielle (pseudo-)orthogonale Gruppe ab und die Sequenz

$$1 \rightarrow \pm 1 \rightarrow \text{Spin}(V, q) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} SO(V, q) \rightarrow 1$$

ist exakt.

Beweis. Zuerst ist festzuhalten, dass für Spiegelungen s_u mit $u \in V$ immer $\det(s_u) = -1$ ist, was leicht einzusehen ist, wenn man eine Basis $u_2, \dots, u_n$ von $u^\perp$ wählt. Denn dann ist $s_u(u) = -u$ und $s_u(u_j) = u_j$ für $j = 2, \dots, n$. Damit gilt dann für $g = u_1 \times \dots \times u_k \in \text{Spin}(V, q)$

$$\det(\widetilde{\text{Ad}}_g) = \det(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k}) = \det(s_{u_1}) \dots \det(s_{u_k}) = (-1)^k = 1,$$

da k ja gerade sein muss. Also ist tatsächlich $\widetilde{\text{Ad}}(\text{Spin}(V, q)) \subset SO(V, q)$. Genauso ist wegen $\det(s_u) = -1$ natürlich auch jedes SO -Element Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen, also die Sequenz an der Stelle $\widetilde{\text{Ad}}$ exakt. Mit gleichem Argument wie bei der Pin-Gruppe ist weiterhin auch $\pm 1 \in \text{Spin}(V, q)$. $\square$

2.3 Die Clifford-Gruppen als Lie-Gruppen

Um $\text{Spin}(V, q)$ als Überlagerungsgruppe von $SO(V, q)$ erkennen zu können, wollen wir nun zeigen, dass es sich überhaupt um Lie-Gruppen handelt. Der wesentliche Schritt dazu ist eine alternative Beschreibung von $\text{Pin}(V, q)$, um die Abgeschlossenheit ablesen zu können.

Satz.

$$\text{Pin}(V, q) = \left\{ g \in \mathcal{G}(V, q) : N(g) = \pm 1 \right\}.$$

Beweis. Da $\text{Pin}(V, q) \subset N^{-1}(\pm 1)$ bereits gezeigt wurde, ist nun noch für $g \in \mathcal{G}(V, q)$ mit $N(g) = \pm 1$ eine Darstellung $g = u_1 \times \dots \times u_k$ zu finden mit $u_j \in V$ und $q(u_j, u_j) = \pm 1$. Wie wir bereits wissen, ist $\widetilde{\text{Ad}}_g \in O(V, q)$ und lässt sich daher als Produkt von Spiegelungen schreiben,

$$\widetilde{\text{Ad}}_g = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_k} = \widetilde{\text{Ad}}_{u_1} \circ \dots \circ \widetilde{\text{Ad}}_{u_k} = \widetilde{\text{Ad}}_{u_1 \times \dots \times u_k},$$

wobei die $u_j \in V$ so gewählt werden können, dass $q(u_j, u_j) = \pm 1$ ist. Da $\widetilde{\text{Ad}}$ Homomorphismus ist, hat man dann $\widetilde{\text{Ad}}_{g^{-1} \times u_1 \times \dots \times u_k} = \text{id}$, und nach dem schon mehrfach angewandten Lemma ist damit $g^{-1} \times u_1 \times \dots \times u_k$ reell oder anders ausgedrückt $g = \alpha u_1 \times \dots \times u_k$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Weil aber außerdem gelten sollte

$$\pm 1 = N(g) = \alpha^2 N(u_1) \dots N(u_k) = \pm \alpha^2,$$

ist sogar $\alpha = \pm 1$ und daher schließlich

$$g = \pm u_1 \times \dots \times u_k = (-u_1) \times u_2 \times \dots \times u_k \in \text{Pin}(V, q).$$

□

Korollar. Die Clifford-Gruppen $\text{Pin}(V, q)$ und $\text{Spin}(V, q)$ sind Lie-Gruppen.

Beweis. $\mathcal{C}\ell(V, q)^\times$ ist als Gruppe der invertierbaren Elemente offen in $\mathcal{C}\ell(V, q)$ und also Lie-Gruppe. Diese enthält als abgeschlossene Untergruppe $\mathcal{G}(V, q)$, welche daher auch Lie-Gruppe ist, und in analogem Schluss ist dann ebenfalls $\text{Pin}(V, q)$ Lie-Gruppe, nämlich abgeschlossen in $\mathcal{G}(V, q)$, wie der vorangehende Satz zeigt.

Dann ist aber $\text{Spin}(V, q) = \text{Pin}(V, q) \cap \mathcal{C}\ell_+(V, q) \subset \mathcal{C}\ell(V, q)^\times$ abgeschlossen und somit Lie-Gruppe. □

2.4 Die Lie-Algebra der Spin-Gruppe

Als kleinen Einschub auf dem Weg, die universelle Überlagerung von $SO(V, q)$ zu bestimmen, soll hier erst noch die zugehörige Lie-Algebra

$$\mathfrak{spin}(V, q) = \text{Lie}(\text{Spin}(V, q)) = T_1 \text{Spin}(V, q)$$

berechnet werden. Nach Definition stimmt $\widetilde{\text{Ad}}$ auf ganz $\mathcal{C}\ell_+(V, q)$ mit Ad überein, also auch auf der Spin-Gruppe. Da in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(V, q) & \xrightarrow[2:1]{\text{Ad}} & SO(V, q) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{spin}(V, q) & \xrightarrow[\mathfrak{ad}]{\cong} & \mathfrak{so}(V, q) \end{array}$$

die drei oberen Abbildungen lokal Homöomorphismen sind, insbesondere nahe $\mathbf{1}$, werden natürlich die beiden Lie-Algebren durch den induzierten Homomorphismus $\mathfrak{ad}$ isomorph aufeinander abgebildet. Die Abbildung konkret auszurechnen wird auch im weiteren sehr nützlich sein.

Zuerst geben wir eine Basis von $\mathfrak{spin}(V, q)$ an. Sei dazu $i < j$ festgehalten. Um zwei Fälle simultan behandeln zu können, schreiben wir abkürzend

$$c \text{ bzw. } s := \begin{cases} \cos \text{ bzw. } \sin & q^{ii}q^{jj} = +1 \\ \cosh \text{ bzw. } \sinh & q^{ii}q^{jj} = -1 \end{cases},$$

wobei daran erinnert sei, dass $q^{ij} = q(e^i, e^j)$ die Metrikkoeffizienten bezüglich der Orthonormalbasis $e^1, \dots, e^n$ von V bezeichnet, welche außerdem nach Vorzeichen sortiert sein soll, also $(q^{ij}) = \mathbf{1}_{r,s}$. Dann definiert

$$g_t := c(t) + s(t)e^i \times e^j$$

eine Ein-Parameter-Kurve in $\text{Spin}(V, q)$, denn die Spin-Gruppe enthält offensichtlich

$$\begin{aligned} & (q^{jj}c(t)e^j + s(t)e^i) \times (c(t)e^j - q^{jj}s(t)e^i) \\ &= c(t)^2 - c(t)s(t)e^j \times e^i + s(t)c(t)e^i \times e^j - q^{ii}q^{jj}s(t)^2 \\ &= c(t)^2 - q^{ii}q^{jj}s(t)^2 + 2c(t)s(t)e^i \times e^j \\ &= c(2t) + s(2t)e^i \times e^j = g_{2t}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist einfach eines der Additionstheoreme für die trigonometrischen bzw. die hyperbolischen Funktionen. Ähnlich sieht man

$$g_t^{-1} = c(t) - s(t)e^i \times e^j,$$

denn Multiplikation ergibt $(c + se^i \times e^j) \times (c - se^i \times e^j) = c^2 - s^2 e^i \times e^j \times e^i \times e^j = c^2 + q^{ii}q^{jj}s^2 = 1$.

Nun hat man für g_t und g_t^{-1}

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 g_t^{\pm 1} = \frac{d}{dt}\bigg|_0 (c(t) \pm s(t)e^i \times e^j) = \pm e^i \times e^j.$$

Also sind die Elemente $e^i \times e^j$ für $i < j$ in der Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(V, q)$ enthalten. Sie sind überdies linear unabhängig, und es wird sich zeigen, dass sie eine Basis bilden, da sie bijektiv auf eine Basis von $\mathfrak{so}(V, q)$ abgebildet werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{ad}(e^i \times e^j) &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \text{Ad}_{g_t}(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 (g_t \times v \times g_t^{-1}) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 g_t\right) \times v \times g_0^{-1} + g_0 \times v \times \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 g_t^{-1}\right) \\ &= e^i \times e^j \times v \times \mathbf{1} - \mathbf{1} \times v \times e^i \times e^j \\ &= e^i \times e^j \times v - (2q(e^i, v) - e^i \times v) \times e^j \\ &= e^i \times e^j \times v - 2q(e^i, v)e^j + e^i \times (2q(e^j, v) - e^j \times v) \\ &= 2q(e^j, v)e^i - 2q(e^i, v)e^j \\ &= 2(q^{jj}v_j e^i - q^{ii}v_i e^j) = 2 \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \mathbf{1}_{r,s} v. \end{aligned}$$

Dabei stehe die 1 an der Stelle (i, j) der Matrix und die -1 bei (j, i) . Bezeichnet man das Produkt aus dieser Matrix und $\mathbf{1}_{r,s}$ mit $e_{i,j}$, so hat man also

$$\mathfrak{ad}(e^i \times e^j) = 2e_{i,j}v.$$

Die Matrizen $e_{i,j}$ mit $i < j$ bilden eine Basis von $\mathfrak{so}(V, q)$, wie kurz berechnet werden soll.

$$SO(r, s) = \{a \in GL(n) : a\mathbf{1}_{r,s}a^* = \mathbf{1}_{r,s}, \det a = 1\}.$$

Wegen

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \det(\exp(ta)) = \text{tr}(a)$$

und

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 (\exp(ta)\mathbf{1}_{r,s}\exp(ta)) = a\mathbf{1}_{r,s}\mathbf{1}_n + \mathbf{1}_n\mathbf{1}_{r,s}a^* = a\mathbf{1}_{r,s} + (a\mathbf{1}_{r,s})^*$$

ist

$$\mathfrak{so}(r, s) = \{a \in \mathbb{R}(n) : a\mathbf{1}_{r,s} + (a\mathbf{1}_{r,s})^*\},$$

was die Behauptung zeigt, da eine Basis von $\mathfrak{so}(n) = \{a \in \mathbb{R}(n) : a+a^* = 0, \text{tr}(a) = 0\}$ durch obige Matrizen gegeben ist.

Die Abbildung $e^i \times e^j \mapsto \widetilde{\text{Ad}}(e^i \times e^j) = 2e_{i,j}$ hat sich also als injektiv erwiesen, so dass wegen gleicher Dimension $n(n-1)/2$ der beiden Algebren die Produkte $e^i \times e^j$ eine Basis von $\mathfrak{spin}(V, q)$ bilden,

$$\mathfrak{spin}(V, q) = \mathbb{R}\langle e^i \times e^j : i < j \rangle.$$

2.5 Die Spin-Gruppe als universelle SO-Überlagerung

Nun hat man also $\text{Spin}(V, q)$ als 2:1-Überlagerungsgruppe von $SO(V, q)$ beschrieben. Von Interesse ist aber eigentlich die universelle Überlagerungsgruppe der Eichgruppe $SO(V, q)$. Nach der allgemeinen Theorie ist die universelle Überlagerungsgruppe die eindeutig bestimmte einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe. Für den 1-Zusammenhang muss man sich nun auf Zusammenhangskomponenten beschränken, hier auf die Zusammenhangskomponente der $\mathbf{1}$, da sie ja weiterhin Gruppe sein soll. Weil außerdem im folgenden nur noch die Signatur der Metrik q eine Rolle spielt, vernachlässigen wir die genaue Struktur V und q und schreiben ab jetzt $\text{Spin}(r, s)$, $SO(r, s)$ etc.

Satz. *Die kurze Sequenz*

$$\mathbf{1} \rightarrow \pm\mathbf{1} \rightarrow \text{Spin}(r, s)^{\mathbf{1}} \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} SO(r, s)^{\mathbf{1}} \rightarrow \mathbf{1}$$

ist für alle $r + s \geq 3$ exakt.

Beweis. Wegen Stetigkeit ist klar, dass die $\mathbf{1}$ -Komponente $\text{Spin}(r, s)^{\mathbf{1}}$ unter $\widetilde{\text{Ad}}$ auf die $\mathbf{1}$ -Komponente $SO(r, s)^{\mathbf{1}}$ abgebildet wird. Zu zeigen ist also lediglich noch, dass in den Fällen $r + s \geq 3$ auch wirklich $-\mathbf{1}$ in der Zusammenhangskomponente $\text{Spin}(r, s)^{\mathbf{1}}$ der $\mathbf{1}$ liegt. Genau diese Bedingung erlaubt es nämlich $i < j$ zu wählen mit $q^{ii}q^{jj} = +1$, so dass nach vorigem Beweis die Kurve

$$g_t = \cos(t) + \sin(t)e^i \times e^j$$

ganz in Spin verläuft. Sie verbindet also $\mathbf{1} = g_0$ mit $g_\pi = -\mathbf{1}$. □

Bemerkung. $SO(n)$ ist zusammenhängend, und $SO(r, s)$ zerfällt in genau zwei Zusammenhangskomponenten. Man hat

$$\begin{aligned} \text{Spin}(2, 0) &\cong SO(2) \cong \text{Spin}(0, 2), \\ \text{Spin}(1, 1)^{\mathbf{1}} &\cong SO(1, 1)^{\mathbf{1}}. \end{aligned}$$

Einfach zusammenhängend ist $\text{Spin}(r, s)^{\mathbf{1}}$ allerdings nur im Fall $r = 0$ oder $r = 1$ und auch nur für $n = r + s \geq 3$. Die Herleitung soll hier aber nur skizziert werden – unter Verwendung topologischer Resultate. So ist wegen

$$\pi_1 SO(r, s)^{\mathbf{1}} \cong \pi_1 SO(r) \times \pi_1 SO(s)$$

für alle $r, s \in \mathbb{N}$ [He] erst einmal $\pi_1 SO(n)$ zu berechnen.

Proposition. Ist $H \sqsubset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so hat man eine lange exakte Sequenz der Homotopiegruppen,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n H \rightarrow \pi_n G \rightarrow \pi_n G/H \rightarrow \pi_{n-1} H \dots \\ \dots \rightarrow \pi_1 H \rightarrow \pi_1 G \rightarrow \pi_1 G/H \rightarrow \pi_0 H \rightarrow \pi_0 G. \end{aligned}$$

Beweisskizze. Dies ist ein Spezialfall der *Exaktheitseigenschaft* der Homotopiegruppen. Das heißt, für $\{x_0\} \xrightarrow{j} A \xrightarrow{i} X$ ist die Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

exakt. Um dies hier auf $A := H$ und $X := G$ anwenden zu können, braucht man außerdem die *Faserungseigenschaft* der Homotopie, die besagt, dass für eine Faserung $f : X \rightarrow Y$ und $B \subset Y$ mit $A = f^{-1}(B)$ für $n > 0$ die induzierte Abbildung

$$f_* : \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, B, f(x_0))$$

ein Isomorphismus ist. Denn die Faserung $p : G \rightarrow G/H$, die kanonische Projektion, liefert

$$\pi_n(G, H) = \pi_n(G, H, e) \cong \pi_n(G/H, \{H\}, H) = \pi_n(G/H),$$

was man in die Sequenz einsetzen kann, und zwar mittels der *Homotopieeigenschaft*, wonach sogar für homotope Abbildungen $f \simeq g$ die induzierten Abbildungen $f_* = g_*$ übereinstimmen, hier genauer $j_* = (p \circ j)_*$. Zur Homotopietheorie vergleiche [Hu]. $\square$

Korollar. Für $n \geq 3$ ist $\pi_1 SO(n) = \mathbb{Z}_2$.

Beweis. Auf natürliche Weise ist $SO(n) \sqsubset SO(n+1)$ abgeschlossene Untergruppe und

$$SO(n+1)/SO(n) \cong \mathbb{S}^n.$$

Außerdem ist $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$ für $k < n$, so dass für $n \geq 3$ nach Proposition das Sequenz-Teilstück

$$0 = \pi_2 \mathbb{S}^n \rightarrow \pi_1 SO(n) \rightarrow \pi_1 SO(n+1) \rightarrow \pi_1 \mathbb{S}^n = 0$$

exakt ist, also

$$\pi_1 SO(n) \cong \pi_1 SO(n+1) \text{ für } n \geq 3.$$

Das Problem ist somit reduziert auf die Berechnung von $\pi_1 SO(3)$. Dafür erhält man die Darstellung

$$SO(3) = \mathbb{S}^3 / \pm \mathbf{1}$$

aus der kurzen exakten Sequenz

$$\mathbf{1} \rightarrow \pm \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\text{Ad}} SO(3) \rightarrow \mathbf{1},$$

wobei $\text{Ad} : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die adjungierte Operation von $\mathbb{S}^3$ auf $\text{Lie}(\mathbb{S}^3) = \mathbb{R}^3$ ist. Genauer in [Ch]. Damit bekommt man wieder mit der Proposition die exakte Sequenz

$$0 = \pi_1 \mathbb{S}^3 \rightarrow \pi_1 SO(3) \rightarrow \pi_0(\pm \mathbf{1}) \rightarrow \pi_0 \mathbb{S}^3 = 0,$$

also $\pi_1 SO(3) \cong \pi_0(\pm \mathbf{1}) = \mathbb{Z}_2$. $\square$

Satz. Für $n \geq 3$ sind $\text{Spin}(n)$ und $\text{Spin}(1, n)^1$ einfach zusammenhängend.

Beweis. Wie eben berechnet ist für $n \geq 3$

$$\pi_1 SO(1, n) = \pi_1 SO(1) \times \pi_1 SO(n) = 0 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2,$$

da $\pi_1 SO(1) = \pi_1(\mathbf{1}) = 0$. Also hat man in beiden Fällen $\pi_1(SO^1, \mathbf{1}) = \mathbb{Z}_2$, so dass sich die nach Proposition exakte Sequenz

$$\pi_1(\pm \mathbf{1}, \mathbf{1}) \rightarrow \pi_1(\text{Spin}^1, \mathbf{1}) \rightarrow \pi_1(SO^1, \mathbf{1}) \rightarrow \pi_0(\pm \mathbf{1})$$

einfach schreibt als

$$0 \rightarrow \pi_1(\text{Spin}^1) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2,$$

weshalb bereits $\pi_1(\text{Spin}^1) = 0$ gelten muss, das heißt Spin^1 einfach zusammenhängend ist. $\square$

Damit haben wir nun tatsächlich für $n \geq 3$ $\text{Spin}(n)$ bzw. $\text{Spin}(1, n)^1$ als universelle Überlagerungsgruppe von $SO(n)$ bzw. $SO(1, n)^1$ gefunden.

3 Spinor-Darstellungen

3.1 Einleitung

Jede Darstellung $\gamma : SO(r, s)^1 \rightarrow GL(W)$ induziert eine Darstellung der Spin-Gruppe durch Verkettung mit der Überlagerungsabbildung, nämlich $\gamma \circ \text{Ad} : \text{Spin}(r, s)^1 \rightarrow GL(W)$.

Definition. Eine Spinor-Darstellung oder zweiwertige Darstellung von $SO(r, s)^1$ soll eine $\text{Spin}(r, s)^1$ -Darstellung sein, die nicht von einer $SO(r, s)^1$ -Darstellung induziert ist.

Beispiel. Die Dirac- bzw. Majorana-Darstellung (Seite 5) eingeschränkt auf die Spin-Gruppe sind Spinor-Darstellungen,

$$\text{Spin}(\mathbb{K}^n) \xrightarrow{\gamma} GL(2^{n/2}, \mathbb{K}).$$

Denn angenommen, es gäbe γ' mit $\gamma = \gamma' \circ \text{Ad}$, so wäre

$$-\mathbf{1} = \gamma(-\mathbf{1}) = \gamma' \circ \text{Ad}(-\mathbf{1}) = \gamma'(\mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

3.2 Chiral-Spinoren

Also trägt der sogenannte *Spinorenraum* $S := \mathbb{K}^{2^{n/2}}$ eine Spinor-Darstellung. Aber obwohl die Dirac-Darstellung auf $\mathcal{Cl}(n)$ irreduzibel ist, wird sie bei Einschränkung auf $\text{Spin}(n)$ reduzibel.

Proposition. Der Spinorenraum S zerfällt in zwei $\text{Spin}(n)$ -invariante Unterräume,

$$S = S_+ \oplus S_-, \quad \gamma_g S_{\pm} \subset S_{\pm} \quad \forall g \in \text{Spin}(n).$$

Beweis. Mit der bereits eingeführten Matrix $\gamma_5 = \gamma(e^N) = \gamma(e^1 \times \cdots \times e^n)$ ist

$$\begin{aligned} \gamma_5^2 &= \gamma(e^N \times e^N) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} \gamma(e^n \times \cdots \times e^1 \times e^1 \times \cdots \times e^n) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2+s} \mathbf{1} =: \alpha \mathbf{1}, \end{aligned}$$

also $(\sqrt{\alpha}\gamma_5)^2 = 1$. Nach dem Lemma aus Abschnitt 1.4 zerlegen dann die beiden Projektoren $P_{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \sqrt{\alpha}\gamma_5)$ den Spinorenraum in die Unterräume $S_{\pm} := P_{\pm}S$,

$$S = S_+ \oplus S_-.$$

Wegen $\overline{e^N} = (-1)^{|N|}e^N = e^N$ ist nach der Eigenschaft des Clifford-Produktes von Seite 8 für $i, j \in N$

$$e^i \times e^j \times e^N = -e^i \times e^N \times e^j = e^N \times e^i \times e^j.$$

Also vertauscht e^N mit allen geraden Clifford-Elementen, und für $g \in \text{Spin}(V, q) \subset \mathcal{C}\ell_+(V, q)$ hat man

$$\gamma_g \gamma_5 = \gamma(g \times e^N) = \gamma(e^N \times g) = \gamma_5 \gamma_g.$$

Damit ist dann

$$\gamma_g S_{\pm} = \gamma_g P_{\pm} S = \frac{1}{2} \gamma_g (\mathbf{1} \pm \sqrt{\alpha}\gamma_5) S = \frac{1}{2} (\mathbf{1} \pm \sqrt{\alpha}\gamma_5) \gamma_g S = P_{\pm} S = S_{\pm}.$$

Außerdem sind $S_{\pm}$ *echte* Unterräume von S , da $\gamma_5 \neq \mathbf{1}$ gilt, weil γ Isomorphismus ist. $\square$

$S_{\pm}$ heißen *rechts-* bzw. *linkshändige Chiral-Spinoren* oder *Weyl-Spinoren*.

Bemerkung. Gleiches ist auch möglich für die reelle Majorana-Darstellung, wenn $n(n-1)/2 + s$ gerade ist. $S_{\pm}$ heißen dann *Majorana-Weyl-Spinoren*. Diese existieren also genau dann, wenn $r - s = 0$ ist.

Beweis. Nach den Klassifikationssätzen gibt es eine Majorana-Darstellung genau für $r - s \equiv 0$ oder $2 \pmod{8}$. Tatsächlich ist im ersten Fall mit $r - s = 8p$ $r + s = 8p + 2s =: 2q$ und daher $n(n-1)/2 + s = (r+s)(r+s-1)/2 + s = q(2q-1) + s \equiv_2 -q + s = -4p - s + s \equiv_2 0$. Demgegenüber ist der Ausdruck im zweiten Fall ungerade. Denn dann ist $r - s = 8p + 2$, also $r + s = 8p + 2 + 2s$ und damit $n(n-1)/2 + s = (4p+1+s)(8p+2+2s-1) + s \equiv_2 -s - 1 + s = 0$. $\square$

Beispiel. Für $r = s = 1$ ist

$$\gamma_5 = \gamma(e^0 \times e^1) = \gamma(e^0)\gamma(e^1) = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Die universelle Überlagerungsgruppe von GL_n hat nach Cartan (1938) wieder nur GL -Darstellungen. Also gibt es keine Spinoren-Darstellung für die Einstein-Eichgruppe GL_4 .

3.3 Die zugehörige Liealgebra-Darstellung

Satz. *Darstellungen der Spin-Gruppe, die Einschränkungen einer Darstellung γ auf der ganzen Clifford-Algebra sind, wie dies bei der Dirac- und Majorana-Darstellung der Fall ist, haben als zugehörige Liealgebra-Darstellung γ selbst. Genauer ist*

$$\widetilde{\gamma|_{\text{Spin}}} = \gamma|_{\text{spin}}.$$

Man beachte, dass ja $\text{spin}(r, s) = \langle e^i \times e^j : i < j \rangle \subset \mathcal{C}\ell(r, s)$ war.

Beweis. Mit den Ein-Parameter-Kurven $g_t = c(t) + s(t)e^i \times e^j$ von zuvor ist

$$\tilde{\gamma}(e^i \times e^j) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \gamma(g_t) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (c(t) + s(t)\gamma(e^i \times e^j)) = \gamma(e^i \times e^j).$$

□

4 Dirac-Operator

4.1 Dirac-Operator auf offenen Mengen

Sei hier $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und q eine Metrik auf U mit Signatur $r - s$, $r + s = n$. Das heißt, für $x \in U$ ist q_x eine Metrik auf $T_x U$. Weiter sei $e^1, \dots, e^n$ eine Orthonormalbasis bezüglich der zu q dualen Metrik q^* . Das heißt, punktweise ist $e^1(x), \dots, e^n(x)$ q^* -Orthonormalbasis von $T_x^* U$.

Wir definieren Isometrien der Tangentialräume auf den Standardraum $\mathbb{R}^{r,s}$,

$$I_x : (T_x^* U, q_x^*) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^n, q_{r,s}), \quad e^i(x) \mapsto (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0).$$

Über $\mathbb{R}^{r,s}$ erhalten wir die Clifford-Algebra $\mathcal{Cl}(r, s)$ und darin die Spingruppe $\text{Spin}(r, s)$, die mittels der Spinor-Darstellung γ auf $S = \mathbb{C}^{2^{n/2}}$ operiert.

Spinoren sind dann Formen $\psi \in {}^U S = \Lambda^0(U, S)$, auf denen die Eichgruppe ${}^U \text{Spin}(r, s)^1$ mit Elementen g operiert. Wir benötigen außerdem einen Spin-Zusammenhang $\omega \in \Lambda^1(U, \mathfrak{spin}(r, s))$, der sich auch als Zusammenhang transformiert. Das heißt, dass unter der zugehörigen Liealgebra-Darstellung $\tilde{\gamma} = \gamma$ auf S gilt

$$\gamma(\omega') = \gamma_g \gamma(\omega) \gamma_g^{-1} + \gamma_g d\gamma_g^{-1}.$$

Das übersetzt sich in die Forderung

$$\omega' = g\omega g^{-1} + g dg^{-1},$$

wenn man die beiden Summanden auffasst als

$$(g\omega g^{-1})_x(v) = \text{Ad}_{g_x} \omega_x(v) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (\text{Ad}_{g_x}(\exp(t\omega_x(v)))) ,$$

also die auf der Liealgebra induzierte adjungierte Operation, und

$$(g dg^{-1})_x(v) = T_{g_x^{-1}} L_{g_x}(T_x g_x^{-1}(v)).$$

Hier hat man die Abbildungskette

$$T_x U \xrightarrow{T_x g_x^{-1}} T_{g_x^{-1}} \text{Spin} \xrightarrow{T_{g_x^{-1}} L_{g_x}} T_1 \text{Spin} = \mathfrak{spin}.$$

Unter dem Isomorphismus $\mathfrak{spin}(r, s) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{so}(r, s)$ gilt mit $\Lambda := \text{Ad}_g = \text{Ad} \circ (\pm g) \in {}^U SO(r, s)$ außerdem

$$\omega' = \Lambda \omega \Lambda^{-1} + \Lambda d\Lambda^{-1}.$$

Wie üblich definiert man damit die covariante Ableitung eines Spinors ψ als

$$D\psi := d\psi + \gamma(\omega)\psi \in \Lambda^1(U, S).$$

Bemerkung. Ist (e^j) die zu (e_k) duale Basis, also $e^j \circ e_k = \delta_k^j$, so gilt

$$D\psi = \sum_j (i_{e_j} D\psi) e^j.$$

Beweis. Für beliebiges $\varphi \in \Lambda^1(U, S)$ und $v = \sum v^k e_k \in \Gamma(U, TU)$ ist

$$\left(\sum_j (i_{e_j} \varphi) e^j \right) (v) = \sum_{j,k} v^k \varphi(e_j) e^j(e_k) = \sum_k v^k \varphi(e_k) = \varphi(v).$$

□

Mit den Gamma-Matrizen $\gamma^i = \gamma((0, \dots, 0, 1_i, 0, \dots, 0)) = \gamma(I_x e^i(x))$ kommen wir nun zur zentralen

Definition (Dirac-Operator).

$$\mathcal{D} : \Lambda^0(U, S) \rightarrow \Lambda^0(U, S), \quad \psi \mapsto \mathcal{D}\psi := \sum_j \gamma^j i_{e_j} D\psi.$$

Bemerkung. Bezüglich einer Zerlegung aus der vorigen Bemerkung kann man dies auffassen als ein S -wertiges Skalarprodukt $\mathcal{D}\psi = \gamma \cdot D\psi$, wobei hier γ als Vektor mit den Koeffizienten γ^i bezüglich (e^i) zu verstehen wäre.

Proposition. $\mathcal{D}$ ist covariant unter der Eichgruppe ${}^U\text{Spin}(r, s)^1$.

Dann kann man nämlich auf Mannigfaltigkeiten mittels dieser lokalen Definition den Dirac-Operator $\mathcal{D}$ zu einem globalen Objekt machen.

Beweis. Sei $g \in {}^U\text{Spin}(r, s)^1$ Eichtransformation und $\Lambda = \text{Ad}_g \in {}^U\text{SO}(r, s)^1$, also $\text{Ad}_{g_x} e^k(x) = \sum_j (\Lambda^{-1})_j^k(x) I_x e^j(x)$. Wir transformieren nun $\psi' = \gamma_g \psi$ sowie $e^{j'} = \sum_k \Lambda_k^j e^k$ und haben zu zeigen, dass $\mathcal{D}'\psi' = (\mathcal{D}\psi)'$ ist. Einerseits ist

$$e'_j = \sum_k (\Lambda^{-1})_j^k e_k, \tag{1}$$

denn $e^{i'}(\text{RHS}_j) = \sum_{k,l} \Lambda_k^i (\Lambda^{-1})_j^l e^k(e_l) = \sum_k \Lambda_k^i (\Lambda^{-1})_j^k = (\Lambda^{-1} \Lambda)_j^i = \delta_j^i$. Und andererseits hat man

$$\sum_j (\Lambda^{-1})_j^k \gamma^j = \gamma_g \gamma^k \gamma_g^{-1} \tag{2}$$

da $\gamma_g \gamma^k \gamma_g^{-1} = \gamma(g \times e^k \times g^{-1}) = \gamma(\text{Ad}_g e^k) = \gamma(\sum_k (\Lambda^{-1})_j^k I e^j) = \sum_k (\Lambda^{-1})_j^k \gamma^j$. Und weil die innere Ableitung i im Indexargument linear ist (3), ergibt sich mit diesen beiden Formeln

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'\psi' &= \sum_j \gamma^j i_{e'_j} D'\psi' \stackrel{(1)}{=} \sum_j \gamma^j \sum_k (\Lambda^{-1})_j^k i_{e_k} \gamma_g D\psi \\ &= \sum_{j,k} (\Lambda^{-1})_j^k \gamma^j \gamma_g i_{e_k} D\psi \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_k \gamma_g \gamma^k \gamma_g^{-1} \gamma_g i_{e_k} D\psi \\ &= \gamma_g \sum_k \gamma^k i_{e_k} D\psi \\ &= \gamma_g \mathcal{D}\psi = (\mathcal{D}\psi)'. \end{aligned}$$

□

4.2 Dirac-Operator und Chiral-Spinoren

Proposition.

$$\not{D}S_+ \subset S_- \quad \text{und} \quad \not{D}S_- \subset S_+.$$

Beweis. Zuerst beobachtet man, dass die Matrix γ_5 , die ja in der Projektion auf $S_\pm$ die wesentliche Rolle spielt, mit der kovarianten Ableitung D vertauscht, denn $D(\gamma_5\psi) = d(\gamma_5\psi) + \gamma(\omega)(\gamma_5\psi) = \gamma_5 d\psi + \gamma_5\gamma(\omega)\psi = \gamma_5 D\psi$. Man beachte, dass γ_5 ja konstant ist. Daraus folgt $\not{D}(\gamma_5\psi) = \sum_j \gamma^j i_{e_j} D(\gamma_5\psi) = \sum_j \gamma^j \gamma_5 i_{e_j} D\psi = -\gamma_5 \not{D}\psi$, und man erhält $P_\pm \not{D} P_\pm \psi = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \sqrt{\alpha}\gamma_5) \not{D} P_\pm \psi = \not{D} \frac{1}{2}(\mathbf{1} \mp \sqrt{\alpha}\gamma_5) P_\pm \psi = \not{D} P_\mp P_\pm \psi = \not{D} 0\psi = 0$. Das heißt aber gerade $\not{D}S_\pm \subset S_\mp$. $\square$

Bemerkung. Bezüglich der Zerlegung $S = S_+ \oplus S_-$ hat man also

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}_- \\ \not{D}_+ & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\not{D}_- = \not{D}|_{S_-} : S_- \rightarrow S_+$ und $\not{D}_+ = \not{D}|_{S_+} : S_+ \rightarrow S_-$. Außerdem gilt bei positiv definiter Metrik und verschwindender Torsion

$$\not{D}_+ = \not{D}_-^*.$$

4.3 Dirac-Operator in Koordinaten

Wir wollen nun eine Koordinatendarstellung für den Dirac-Operator berechnen. Dazu bilden wir zuerst unsere Orthonormalbasis $e^1, \dots, e^n$ mittels einer Transformation $\phi \in {}^U GL_n$ ab auf eine holonome Basis $dx^1, \dots, dx^n$,

$$e^i = \sum_\mu \phi_\mu^i dx^\mu.$$

Dann hat man für die duale Basis die Darstellung

$$e_j = \sum_\nu (\phi^{-1})_j^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

denn $e^i(\text{RHS}_j) = \sum_{\mu,\nu} \phi_\mu^i (\phi^{-1})_j^\nu dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \sum_\mu \phi_\mu^i (\phi^{-1})_j^\mu = \delta_j^i$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \not{D}\psi &= \sum_j \gamma^j i_{e_j} D\psi = \sum_{j,\nu} (\phi^{-1})_j^\nu \gamma^j i_{\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)} (d\psi + \gamma(\omega)\psi) \\ &= \sum_{j,\nu} (\phi^{-1})_j^\nu \gamma^j i_{\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)} \left(\sum_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + \frac{1}{4} \sum_{a,b,\mu} \omega_{ab\mu} \gamma^a \gamma^b dx^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \psi \right) \\ &= \sum_{j,\nu} (\phi^{-1})_j^\nu \gamma^j \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + \frac{1}{4} \sum_{a,b} \omega_{ab\nu} \gamma^a \gamma^b \right) \psi, \end{aligned}$$

wobei nur über $a \neq b$ summiert wird. Der Dirac-Operator $\not{D}$ ist also ein partieller Differentialoperator erster Ordnung mit den nicht-konstanten Koeffizienten $(\phi^{-1})_j^\nu$ und $\omega_{ab\nu}$.

Beispiel. Für den Minkowski-Raum $U = \mathbb{R}^{1,3}$ ist die kanonische holonome Basis bereits orthonormal, denn $dx_x^i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. Die Transformation ist also trivial, $\phi = \mathbf{1}$. Im Fall $\omega = 0$ hat man dann für den Dirac-Operator die Form

$$\not{D}\psi = \sum_\mu \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi.$$

Bemerkung. Ist $\omega = 0$, so ist der Dirac-Operator eine Quadratwurzel aus dem d'Alembert-Operator,

$$\not{D}^2\psi = \square\psi.$$

Beweis. Mit $\omega = 0$ hat man

$$\begin{aligned}\not{D}^2\psi &= \sum_{\mu} \gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \sum_{\nu} \gamma^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \psi \\ &= \sum_{\mu, \nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \psi \\ &= \sum_{\mu} \left((\gamma^{\mu})^2 \frac{\partial^2}{(\partial x^{\mu})^2} \psi + \sum_{\nu \neq \mu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \psi \right) \\ &= \sum_{\mu} q_{r,s}^{\mu,\mu} \frac{\partial^2}{(\partial x^{\mu})^2} \psi = \square\psi.\end{aligned}$$

Die gemischten Summanden in der vorletzten Zeile verschwinden dabei wegen der Bedingung an das Clifford-Produkt, die unter γ die Gleichung $\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = -\gamma^{\nu} \gamma^{\mu}$ ergibt. $\square$

5 Dirac-Aktion

Ziel der ganzen Konstruktion ist es, eine Lagrange-Dichte-Funktion $\mathcal{L}_{\not{D}} : S \rightarrow \mathbb{C}$ zu finden, deren Minima auf die Materie-Feldgleichungen führen, also

$$\mathcal{L}_{\not{D}}(\psi) \text{ minimal} \quad \Leftrightarrow \quad \not{D}\psi = 0,$$

oder anders ausgedrückt, die als Phasenraum $\ker \not{D}$ ergibt. Dazu benötigen wir ein Skalarprodukt auf $\Lambda^0(U, S)$, das $\text{Spin}(r, s)$ -invariant ist. U sei weiterhin eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^{1,n}$. Wir nehmen die Gamma-Matrizen als unitär an, was immer möglich ist, da sich jede kompakte Liegruppe in eine genügend große unitäre Gruppe einbetten lässt.

Definition. Für $\psi, \chi \in S$ sei ein Skalarprodukt definiert durch

$$(\psi|\chi) := \psi^* \gamma^0 \chi,$$

wobei für $r = 1$ $\gamma^0 = \gamma(e^0)$ war und für $r = 0$, wo die Indizes erst ab 1 gezählt werden, $\gamma^0 := \mathbf{1}$ sei – man also das kanonische Skalarprodukt auf $S = \mathbb{C}^{2^{n/2}}$ erhält.

Dieses Skalarprodukt ist $\text{Spin}(r, s)$ -invariant, denn in allen Fällen gilt mit den selbst-adjungierten γ -Matrizen $(\gamma^j \psi | \gamma^j \chi) = \psi^* \gamma^{j*} \gamma^0 \gamma^j \chi = \pm \psi^* \gamma^{j*} \gamma^j \gamma^0 \chi = \psi^* \gamma^0 \chi = (\psi|\chi)$. Dabei ist zu beachten, dass die Clifford-Bedingung wie das Alternieren zuvor ebenso $\gamma^j \gamma^j = q^{jj} = \pm 1$ liefert.

Für Formen $\psi, \chi \in \Lambda^0(U, S)$ ist dann $(\psi|\chi) \in \Lambda^0(U, \mathbb{C})$ eine Form, so dass man ein Skalarprodukt auf $\Lambda^0(U, S)$ erhält durch folgende

Definition.

$$\langle \psi|\chi \rangle := \int_U *(\psi|\chi).$$

Damit können wir nun die Dirac-Aktion beschreiben.

Definition (Dirac-Lagrange-Funktional).

$$\mathcal{L}_D(\psi) := i\langle\psi|\mathcal{D}\psi\rangle = i \int_U *(\psi|\mathcal{D}\psi) \in \mathbb{C}.$$

Wegen der $\text{Spin}(r, s)$ -Invarianz von $(\cdot|\cdot)$ ist $\mathcal{L}_D$ wie gewünscht invariant unter der Eichgruppe ${}^U\text{Spin}(r, s)$ ¹.

Satz. *Die Minima, genauer die Extrema der Dirac-Aktion $\mathcal{L}_D$ sind gegeben durch die Fermionen-Feldgleichung*

$$\mathcal{D}\psi = 0.$$

Beweis. $\mathcal{L}_D(\psi)$ ist extremal, wenn die Ableitung $\dot{\mathcal{L}}_D(\psi)$ verschwindet. Das soll heißen, dass die Richtungsableitung in jede Richtung verschwindet, also für jedes χ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathcal{L}_D(\psi + h\chi) - \mathcal{L}_D(\psi)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (i\langle\psi + h\chi|\mathcal{D}\psi + h\mathcal{D}\chi\rangle - i\langle\psi|\mathcal{D}\psi\rangle) \\ &= i \lim_{h \rightarrow 0} (\langle\psi|\mathcal{D}\chi\rangle + \langle\chi|\mathcal{D}\psi\rangle + h\langle\chi|\mathcal{D}\chi\rangle) \\ &= i(\langle\mathcal{D}\psi|\chi\rangle + \langle\chi|\mathcal{D}\psi\rangle) \\ &= i(\overline{\langle\chi|\mathcal{D}\psi\rangle} + \langle\chi|\mathcal{D}\psi\rangle) \\ &= -2 \text{Im}\langle\chi|\mathcal{D}\psi\rangle. \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist aber gerade äquivalent zu der gesuchten Gleichung $\mathcal{D}\psi = 0$. $\square$

Literatur

- [BT] Budinich, P., und Trautman, A., *The Spinorial Chessboard*, Springer, Berlin, 1988.
- [Ch] Chevalley, C., *Theory of Lie Groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [GS] Gökeler, M., und Schücker, T., *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, 1987.
- [He] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.
- [Hu] Hu, S., *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, 1959.
- [KN] Kobayashi, S., und Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience, John Wiley, New York, 1963.
- [La] Lang, S., *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.
- [LM] Lawson, H. B., Jr., und Michelsohn, M. L., *Spin-Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.