Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Hajo Holzmann

Philipps-Universität Marburg

Termine für die Tutorien

Termin	Raum	
Montag, 14:00-16:00	SR 10	Lehramt
Montag, 16:00-18:00	SR 9	
Dienstag, 14:00-16:00	SR 9	
Dienstag, 16:00-18:00	SR 8	
Dienstag, 16:00-18:00	SR 9	Lehramt

Die ersten Tutorien finden in der zweiten Vorlesungswoche statt.

Leistungsnachweis

- Regelmäßige und aktive Mitarbeit im Tutorium. (Näheres dazu im ersten Tutorium)
- 50% der Punkte, der zu bearbeitenden Aufgaben.
- Bestehen einer Klausur.

Leistungsnachweis

- Regelmäßige und aktive Mitarbeit im Tutorium. (Näheres dazu im ersten Tutorium)
- 50% der Punkte, der zu bearbeitenden Aufgaben.
- Bestehen einer Klausur.

Anmeldung

- verbindliche Modulanmeldung bis spätestens vier Wochen vor Ende der Vorlesungszeit (Freitag, den 15.01.2010)
- zum Eintragen rechtzeitig in der Vorlesung bzw. im Tutorium Listen herumgehen.

Übungszettel

- Die Ausgabe der Übungsblätter und die Abgabe der Lösungen erfolgt Freitags vor der Vorlesung
- Der erste Übungszettel wird Freitag, 16.10.2009, ausgegeben
- Die Übungsblätter können auch von der Website zur Verantstaltung

  http://www.mathematik.uni-marburg.de/~fketterer/Stoch0WS09.htm

  heruntergeladen werden.

Deutsche Lehrbücher

- Herold Dehling und Beate Haupt (2004) *Einführung in die Wahrscheinlichkeistheorie und Statistik*. 2. Auflage. Springer, Berlin.
- Norbert Henze (2008) *Stochastik für Einsteiger*. 7. Auflage. Vieweg, Wiesbaden.

Deutsche Lehrbücher

- Herold Dehling und Beate Haupt (2004) *Einführung in die Wahrscheinlichkeistheorie und Statistik*. 2. Auflage. Springer, Berlin.
- Norbert Henze (2008) *Stochastik für Einsteiger*. 7. Auflage. Vieweg, Wiesbaden.
- Ulrich Krengel (2005) *Einführung in die Wahrscheinlichkeistheorie und Statistik*. 8. Auflage. Vieweg, Wiesbaden
- H. O. Georgii (2009) *Stochastik*. 4. Auflage. De Gruyter Verlag.
- Christian Hesse (2009) *Wahrscheinlichkeitstheorie : eine Einführung mit Beispielen und Anwendungen*. 2. Auflage. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Englische Lehrbücher

- G. Grimmett und D. Stirzacker (1992) *Probablity and Random Processes*. 2. Auflage, Oxford Univ. Press.
- William Feller (1968) *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. 3. Auflage. Wiley, New York.
- M. D. Ungarte, A. F. Militino, A. Arnholt (2008) *Probability and Statistics with R.* Chapman and Hall.

Gliederung der Vorlesung

1. Wahrscheinlichkeitstheorie (2/3)
   - 1.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie
   - 1.2 Allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere stetige Merkmale

Gliederung der Vorlesung

1. Wahrscheinlichkeitstheorie (2/3)
   - 1.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie
   - 1.2 Allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie, insbesondere stetige Merkmale
2. Statistik (1/3)
   - 2.1 Deskriptive (beschreibende) Statistik
   - 2.2 Schließende Statistik

Stochastik?

Begriff Stochastik

- von altgriechisch stochastike = zum Erraten gehörende Kunst
- Sammelbegriff für Wahrscheinlichkeitsheorie und Statistik

Geschichtliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie

- 16. Jhdt. Beginnendes Interesse für die beim Würfelspiel beobachteten Zufallsgesetze.
  Cardano (1501 - 1576): Liber de ludo aleae.
- 1654: Briefwechsel Blaise Pascal (1623-1682) und Pierre Fermat (1601 - 1665): Briefwechsel über Gewinnaussichten in Spielsituationen.
  $\rightarrow$ Begriffe Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert.
- 1657: Christian Huygens (1629 - 1695): vollständige Theorie des Würfelspiels.

- 16. Jhdt. Beginnendes Interesse für die beim Würfelspiel beobachteten Zufallsgesetze.
  Cardano (1501 - 1576): Liber de ludo aleae.
- 1654: Briefwechsel Blaise Pascal (1623-1682) und Pierre Fermat (1601 - 1665): Briefwechsel über Gewinnaussichten in Spielsituationen.
  $\rightarrow$ Begriffe Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert.
- 1657: Christian Huygens (1629 - 1695): vollständige Theorie des Würfelspiels.

Problem: Bei zwei Würfelspielen

1) mit 1 Würfel, 6 Ausfälle, in 4 Würfen mindestens eine Sechs,
2) mit 2 Würfeln, $6 \cdot 6 = 36$ Ausfälle, in $6 \cdot 4 = 24$ Würfen mindestens eine Doppelsechs

Gleichen Chancen, da Verhältnisse $6 : 4$ und $36 : 24$ gleich?

Geschichtliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie

- 1713: Jakob Bernoulli (1654 - 1705): Ars conjectandi.
  Erste grundlegende Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält Gesetz der großen Zahlen.
- 1812 Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827): Théorie analytique des probabilités.
  Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Verhältnis der günstigen Fälle zu den möglichen Fällen.

Geschichtliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie

- 1713: Jakob Bernoulli (1654 - 1705): Ars conjectandi.
  Erste grundlegende Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält Gesetz der großen Zahlen.
- 1812 Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827): Théorie analytique des probabilités.
  Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Verhältnis der günstigen Fälle zu den möglichen Fällen.
- 1919 Richard von Mises (1883 - 1953): Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
  Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit
- 1933: Andrei Nikolajewitsch Kolmogoroff (1903 - 1987): Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
  Axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Theorie der stochastischen Prozesse:

$\rightarrow$ Zufällige Phänome, die sich über die Zeit entwickeln.

Beispiel: Brownsche Bewegung

- Robert Brown (britischer Botaniker, 1773-1858) Bewegung schwimmender Partikel in Flüssigkeiten
- Albert Einstein (1879 - 1955): Erklärung der molekularen Struktur von Wasser
- Norbert Wiener (1894 - 1964): Formale mathematische Konstruktion als stochastischer Prozess

Verbindung mit anderen Wissenschaften: Physik, Biologie, Finanzmathematik

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Wahrscheinlichkeit in Zufallsexperiment

- (relative) Häufigkeit eines Ereignisses eines physikalischen Prozesses
- Ausgang nicht vorhersagbar

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Wahrscheinlichkeit in Zufallsexperiment

- (relative) Häufigkeit eines Ereignisses eines physikalischen Prozesses
- Ausgang nicht vorhersagbar

Unterscheide

- deterministischen Prozess, bei vollständiger Information prinzipiell vorhersagbar (Würfelwurf, Wetter)
- nichtdeterministischer Prozess, der prinzipiell nicht vorhersagbar ist (radioaktiver Zerfall)

Beispiel: Roulette

Ergebnisraum

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 35, 36\}.$$

Elemente $\omega \in \Omega$: Ergebnisse, Elementarereignisse

Beispiel: Roulette

Ergebnisraum

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 35, 36\}.$$

Elemente $\omega \in \Omega$: Ergebnisse, Elementarereignisse

Teilmengen $A \subset \Omega$: Ereignisse

Beispiele beim Roulette

- rot ($A = \{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36\}$) oder schwarz (die anderen bis auf 0, ist grün).
- gerade (ohne 0) oder ungerade
- klein ($1 - 18$) oder groß ($19 - 36$)

Wahrscheinlichkeiten im Roulette

- Im fairen Roulette: Jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich,

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{37}, \qquad \omega \in \Omega.$$

$\rightarrow$ Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum.

Wahrscheinlichkeiten im Roulette

- Im fairen Roulette: Jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich,

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{37}, \qquad \omega \in \Omega.$$

$\rightarrow$ Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum.

- Wahrscheinlichkeiten von allg. Ereignissen

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1], \qquad P(A) = \frac{\text{card } A}{37}.$$

- Wahrscheinlichkeit ist additiv: Sind $A, B \subset \Omega$ disjunkt, so ist

$$P(A \cup B) = \frac{\text{card } (A \cup B)}{37} = \frac{\text{card } A}{37} + \frac{\text{card } B}{37} = P(A) + P(B).$$

Reizzwecke werfen

Zufallsexperiment: Werfe Reizzwecke

- 0 falls Spitze schräg nach unten
- 1 falls Spitze nach oben
- Wahrscheinlichkeit nicht berechenbar.

Reizzwecke werfen

Zufallsexperiment: Werfe Reizzwecke

- 0 falls Spitze schräg nach unten
- 1 falls Spitze nach oben
- Wahrscheinlichkeit nicht berechenbar.

Sei Ω ein Ergebnisraum (etwa $\Omega = \{0, 1\}$).

- Führe Zufallsexperiment mit Ergebnissen in Ω unter gleichen Bedingungen n mal durch.
- Erhalte Vektor $\mathbf{a} = (a_1 \ldots, a_n), \qquad a_i \in \Omega.$

Relative Häufigkeiten

Für Ereignis $A \subset \Omega$ setze

$$r_{n,\mathbf{a}}(A) = \frac{1}{n} \operatorname{card} \{j : a_j \in A, j = 1, \dots, n\}.$$

relative Häufigkeit des Ereignisses A im n-Tupel $\mathbf{a}$.

Relative Häufigkeiten

Für Ereignis $A \subset \Omega$ setze

$$r_{n,\mathbf{a}}(A) = \frac{1}{n} \operatorname{card} \{j : a_j \in A, \, j = 1, \dots, n\}.$$

relative Häufigkeit des Ereignisses A im n-Tupel $\mathbf{a}$.

Eigenschaften

- $0 \leq r_{n,\mathbf{a}}(A) \leq 1, \qquad A \subset \Omega,$
- $r_{n,\mathbf{a}}(\Omega) = 1$
- $r_{n,\mathbf{a}}(A \cup B) = r_{n,\mathbf{a}}(A) + r_{n,\mathbf{a}}(B), \qquad A \cap B = \emptyset.$

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

- Die relativen Häufigkeiten "stabilisieren" sich.

  Bei Reizzwecke: $r_{n,a}(\{1\}) = \frac{124}{300}$.
- Konvergieren gegen die zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeiten.

Die Grenzwerte (also die Wahrscheinlichkeiten) behalten obige Eigenschaften.

Endlicher Wahrscheinlichkeitsraum

Definition. Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) besteht aus einem endlichen Ergebnisraum Ω und einer Abbildung

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

mit den Eigenschaften

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset$.

Ist (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt

Endliche Additivität: Sind $A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt, so gilt

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Beweis: Induktion

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) &= P\Big(\Big[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big] \cup A_{n+1}\Big) \\ &= P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + P(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Endliche Additivität

Ist (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt

Endliche Additivität: Sind $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt, so gilt

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Insbesondere

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P\big(\{\omega\}\big).$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion durch Auswertung auf Elementarereignissen bestimmt.

Nicht endliche Zufallsexperimente

- Anzahl der Würfe einer Münze bis zum ersten Mal Kopf
- Anzahl der Zerfälle in einem radioaktiven Präparat über einen festen Zeitraum
- Anzahl der Autos an bestimmten Tankstelle in einem Jahr

Nicht endliche Zufallsexperimente

- Anzahl der Würfe einer Münze bis zum ersten Mal Kopf
- Anzahl der Zerfälle in einem radioaktiven Präparat über einen festen Zeitraum
- Anzahl der Autos an bestimmten Tankstelle in einem Jahr
- Lebensdauer einer Glühbirne
- Körpergröße einer zufällig ausgewählten Person

Nicht endliche Zufallsexperimente

- Anzahl der Würfe einer Münze bis zum ersten Mal Kopf
- Anzahl der Zerfälle in einem radioaktiven Präparat über einen festen Zeitraum
- Anzahl der Autos an bestimmten Tankstelle in einem Jahr
- Lebensdauer einer Glühbirne
- Körpergröße einer zufällig ausgewählten Person

diskretes Merkmal $\leftrightarrow$ stetiges Merkmal

als Approximation/ Idealisierung endlicher Zufallsexperimente

Ω diskret, falls endlich oder abzählbar unendlich.

Definitionsversuch Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) besteht aus einem diskreten Ergebnisraum Ω und einer Abbildung

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

mit den Eigenschaften

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \emptyset$.

Beispiel

Es existiert eine Abbildung

$$m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0, 1\},$$

mit den Eigenschaften

- m hat Eigenschaften 1. und 2.
- $m(A) = 0$ für alle endlichen Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$.

Offenbar nicht zur Approximation endlicher Experimente geeignet.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume 2

Definition Ein diskreter Wahrscheinlichkeistraum (Ω, P) besteht aus einem diskreten Ergebnisraum Ω und einer Abbildung

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $P(\Omega) = 1$.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume 2

Definition Ein diskreter Wahrscheinlichkeistraum (Ω, P) besteht aus einem diskreten Ergebnisraum Ω und einer Abbildung

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ gilt

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume 2

Definition Ein diskreter Wahrscheinlichkeistraum (Ω, P) besteht aus einem diskreten Ergebnisraum Ω und einer Abbildung

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ gilt

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Eigenschaft 2. heißt σ-Additivität.

Bei endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen stets erfüllt.

σ–Additivität

(Ω, P) diskret. Bei σ-Additivität gilt wiederum für $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P\big(\{\omega\}\big).$$

σ–Additivität

(Ω, P) diskret. Bei σ-Additivität gilt wiederum für $A \subset \Omega$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P\big(\{\omega\}\big).$$

- geeignet zur Approximation endlicher Wahrscheinlichkeitsräume
- σ-Additivität ist kein intuitiver Begriff
- gibt Anwendungen etwa in der Zahlentheorie, bei denen endlich additive aber nicht σ-additive Wahrscheinlichkeitsfunktionen betrachtet werden.