Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen – allgemeine Modelle

Hajo Holzmann

Philipps-Universität Marburg

Diskrete Zufallsvariablen

- (Ω, P) diskreter W-Raum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.
- P_X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$
- macht $(X(\Omega), P_X)$ zu diskretem W-Raum.

- (Ω, P) diskreter W-Raum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.
- P_X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$
- macht $(X(\Omega), P_X)$ zu diskretem W-Raum.

Erweitere P_X zu Wahrscheinlichkeitsverteilung auf ganz $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_X &: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1], \\ \tilde{P}_X(A) &= P_X\big(A \cap X(\Omega)\big), \qquad A \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\to$ Weiterhin σ-additiv, normiert.

Verteilungen für stetige Merkmale

Erwarten

- W-keit, das Beobachtung in gewisse Intervalle fällt, positiv
- Gleich (mit positiver Fkt) gewichtete Länge des Intervalls
- W-keit für individuellen Ausgang x dann $= 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Verteilungen für stetige Merkmale

Erwarten

- W-keit, das Beobachtung in gewisse Intervalle fällt, positiv
- Gleich (mit positiver Fkt) gewichtete Länge des Intervalls
- W-keit für individuellen Ausgang x dann $= 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz von Banach und Kuratowski

$P : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ σ-additiv und normiert

$\Rightarrow$ es existiert $x \subset \mathbb{R}$ mit $P(\{x\}) > 0$.

(Voraussetzung: Gültigkeit der Kontiuumshypothese).

Verteilungen für stetige Merkmale

Erwarten

- W-keit, das Beobachtung in gewisse Intervalle fällt, positiv
- Gleich (mit positiver Fkt) gewichtete Länge des Intervalls
- W-keit für individuellen Ausgang x dann $= 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz von Banach und Kuratowski

$P : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ σ-additiv und normiert

$\Rightarrow$ es existiert $x \subset \mathbb{R}$ mit $P(\{x\}) > 0$.

(Voraussetzung: Gültigkeit der Kontiuumshypothese).

$\to$: Es gibt keine auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ definierte Wahrscheinlichkeitfunktion für stetige Merkmale.

Lösung:

- Definiere Wahrscheinlichkeit nicht für alle $A \subset \mathbb{R}$.
- Nur für System von Teilmengen, dass
  - alle relevanten Mengen (etwa Intervalle) enthält
  - technisch praktisch zu handhaben ist: abgeschlossen unter allen abzählbaren Mengenoperationen

Systeme von Teilmengen: σ-Algebren

Lösung:

- Definiere Wahrscheinlichkeit nicht für alle $A \subset \mathbb{R}$.
- Nur für System von Teilmengen, dass
  - alle relevanten Mengen (etwa Intervalle) enthält
  - technisch praktisch zu handhaben ist: abgeschlossen unter allen abzählbaren Mengenoperationen

Definition Ω nicht leere Menge. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, falls

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Borel - σ Algebra

Sei $\mathcal{I}$ = alle Intervalle in $\mathbb{R}$.

Definition Die kleinste σ-Algebra über $\mathbb{R}$, die ganz $\mathcal{I}$ enthält, heißt die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$, Bez. $\mathcal{B}$. Formal ist

$$\mathcal{B} = \bigcap_{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})\ \sigma-\text{Algebra},\ \mathcal{I} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}.$$

$\rightarrow$ Nur Mengen $B \in \mathcal{B}$ (Borel-Mengen) wird Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

$\mathcal{B}$ enthält insbesondere alle diskreten Teilmengen $B \subset \mathbb{R}$.

Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsraum

Definition Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{A})$, falls gelten

1. $P(\Omega) = 1$.

Definition Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{A})$, falls gelten

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Definition Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{A})$, falls gelten

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition. Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsvariable, falls für alle Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Bemerkung

Für diskretes Ω ist $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\to$ jede Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.

Verteilung von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.

Definition. Die Verteilung von X ist gegeben durch

$$P_X(B) := P(X \in B) = P\big(\{\omega : X(\omega) \in B\}\big), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Wohldefiniert, da $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

Verteilung von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.

Definition. Die Verteilung von X ist gegeben durch

$$P_X(B) := P(X \in B) = P\big(\{\omega : X(\omega) \in B\}\big), \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Wohldefiniert, da $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

P_X ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}$ (den Borel Mengen)

$\to$: somit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

P_X diskret und X diskret verteilt, falls $P_X(B) = 1$ für $B \subset \mathbb{R}$ diskret.

Wahrscheinlichkeitsdichte

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariable.

Definition. X heißt (*absolut*) *stetig verteilt* mit Wahrscheinlichkeitsdichte (bzw. Dichte) f, falls $\exists\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar, $f \geq 0$, so dass

$$P_X(B) = \int_B f(t)\, dt, \qquad B \subset \mathcal{B}.$$

Bemerkungen zur Dichte

1. Für allgemeine Borel Mengen $B \in \mathcal{B}$ ist das Integral

$$\int_B f(t)\,dt$$

nicht als Riemann, sondern nur als Lebesgue Integral erklärt.

Für uns: B Intervall, f stetig diffbar, dann Riemann Integral.

Bemerkungen zur Dichte

1. Für allgemeine Borel Mengen $B \in \mathcal{B}$ ist das Integral

$$\int_B f(t)\,dt$$

nicht als Riemann, sondern nur als Lebesgue Integral erklärt.

Für uns: B Intervall, f stetig diffbar, dann Riemann Integral.

2. Die σ-Additivität bedeutet: Sind $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$ disjunkt, so gilt

$$\int_B f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f(t)\,dt, \qquad B = \bigcup_n B_n.$$

Wenn B, B_n Intervalle, Konvergenzsatz über Riemann Integral.

Definition Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

heißt Maß über $(\Omega, \mathcal{A})$, falls gilt

Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Definition Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

heißt Maß über $(\Omega, \mathcal{A})$, falls gilt

Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum.

Einordnung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitstheorie $\hat{=}$ Theorie der endlichen, normierten Maßräume.

Probability is just another chapter of measure theory

Einordnung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitstheorie $\hat{=}$ Theorie der endlichen, normierten Maßräume.

Probability is just another chapter of measure theory

Joseph Leo Doob (1910–2004)

Probability is simply a branch of measure theory, with its own special emphasis and field of application.

Einordnung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wahrscheinlichkeitstheorie $\hat{=}$ Theorie der endlichen, normierten Maßräume.

Probability is just another chapter of measure theory

Joseph Leo Doob (1910–2004)

Probability is simply a branch of measure theory, with its own special emphasis and field of application.

Wahrscheinlichkeitsmaße lassen sich auf komplizierten Mengen konstruieren, etwa

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad \mathbb{R}[0,\infty), \qquad C[0,1], \qquad C[0,\infty).$$

Probability is just another chapter of measure theory

Kai Lai Chung (1917–2009) spricht von

- *specious utterance* trügerische, einfältige Äußerung
- *not so much false as it is fatuous* (einfältig), *as it would be to say that number theory is just a chapter of algebra*

Einordnung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Probability is just another chapter of measure theory

Kai Lai Chung (1917–2009) spricht von

- *specious utterance* trügerische, einfältige Äußerung
- *not so much false as it is fatuous* (einfältig), *as it would be to say that number theory is just a chapter of algebra*

Probability often used as a front (Fassade) *for certain types of analysis such as combinatorial, Fourier, functional and whatnot.*