3.2 Parameter - und Intervallschätzung im Bernoulli Modell

Hajo Holzmann

Philipps-Universität Marburg

Beobachtungen: $x_1, \ldots x_n \in \{0,1\}$,

Modell: Realisierungen von Z.V.s. $X_1, \ldots, X_n \sim Ber(p)$, unabhängig.

Definition: Ein Schätzer T für den Parameter $p \in [0,1]$ ist eine Abbildung $T : \{0,1\}^n \to [0,1]$.

Beobachtungen: $x_1, \dots x_n \in \{0,1\}$,

Modell: Realisierungen von Z.V.s. $X_1, \dots, X_n \sim Ber(p)$, unabhängig.

Definition: Ein Schätzer T für den Parameter $p \in [0,1]$ ist eine Abbildung $T : \{0,1\}^n \to [0,1]$.

Bsp.:

- Anteil der Erfolge:
  $T(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.
- $T(x_1, \dots, x_n) = x_1$.
- $T(x_1, \dots, x_n) = 1/2$.

Genauer: $T = T_n$ abhängig von Beobachtungsanzahl.

Maximum Likelihood

Herleiten von $\bar{x}_n$ als Maximum Likelihood (ML) Schätzer .

Haben: Beobachtungsfolge $x_1, \ldots, x_n$

Ist $p \in [0,1]$ wahre Parameter, so Wahrscheinlichkeit

$$P_p(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}\right), \qquad p \in [0,1].$$

Maximum Likelihood

Herleiten von $\bar{x}_n$ als Maximum Likelihood (ML) Schätzer .

Haben: Beobachtungsfolge $x_1, \ldots, x_n$

Ist $p \in [0,1]$ wahre Parameter, so Wahrscheinlichkeit

$$P_p(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}\right), \qquad p \in [0,1].$$

Ansatz: Wähle Parameter $p \in [0,1]$, der die Wahrscheinlichkeit $P_p(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$, die Beobachtungsfolge zu erhalten, **maximiert**.

Maximum Likelihood

Betrachte für **feste Beobachtungen** $x_1, \ldots, x_n$ als Funktion von p:

Likelihood Funktion

$$L_n(p) = P_p(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n), \qquad p \in [0,1].$$

ML Schätzer: Maximalstelle von $\mathcal{L}_n(p)$:

$$\hat{p}^{ML} = \mathrm{argmax}_p L_n(p) = \mathrm{argmax}_p \prod_{k=1}^{n} \left(p^{x_k} (1-p)^{1-x_k} \right).$$

Maximum Likelihood

Betrachte für **feste Beobachtungen** $x_1, \ldots, x_n$ als Funktion von p:

Likelihood Funktion

$$L_n(p) = P_p(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n), \qquad p \in [0,1].$$

ML Schätzer: Maximalstelle von $\mathcal{L}_n(p)$:

$$\hat{p}^{ML} = \text{argmax}_p L_n(p) = \text{argmax}_p \prod_{k=1}^{n} \left(p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}\right).$$

Randfälle:

- Sind $x_1 = \ldots = x_n = 0$, so ist $\hat{p}^{ML} = 0$.
- Sind $x_1 = \ldots = x_n = 1$, so ist $\hat{p}^{ML} = 1$.
- Ist $1 \leq \sum_i x_i \leq n-1$, so ist $\hat{p}^{ML} \in (0,1)$.

Log-Likelihood

Im folgenden: $1 \leq \sum_i x_i \leq n-1$, so dass $\hat{p}^{ML} \in (0,1)$.

Äquivalent: Maximalstelle der Log-Likelihood Funktion:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n(p) &= \log\left(L_n(p)\right) \\
&= \log\left(\prod_{k=1}^{n}\left(p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\log\left(p^{x_k}(1-p)^{1-x_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k\log(p) + (1-x_k)\log(1-p)\right).
\end{aligned}$$

Berechnung des ML Schätzers

$$\partial_p \mathcal{L}_n(p) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n x_k - \frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^n (1-x_k) \overset{!}{=} 0.$$

Somit

$$(1-p)\sum_{k=1}^n x_k - p\Big(n - \sum_{k=1}^n x_k\Big) = 0$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^n x_k = np, \qquad \text{also } p = \bar{x}_n.$$

$$\partial_p \mathcal{L}_n(p) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n x_k - \frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^n (1-x_k) \overset{!}{=} 0.$$

Somit

$$(1-p)\sum_{k=1}^n x_k - p\Big(n - \sum_{k=1}^n x_k\Big) = 0$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^n x_k = np, \qquad \text{also } p = \bar{x}_n.$$

Somit Maximum Likelihood Schätzer

$$\hat{p}^{ML} = \bar{X}_n.$$

Ist lokales (dann globales Maximum):

$$\partial_p^2 \mathcal{L}_n(\bar{x}_n) = -\frac{n}{\bar{x}_n} - \frac{n}{1-\bar{x}_n} < 0.$$

Bemerkung: Für Schätzer $T = T_n$ und jedes feste p ist

$$T(X_1, \ldots, X_n) = T_n(X_1, \ldots, X_n) \quad \textit{Zufallsvariable}.$$

Für $p \in [0,1]$ gibt $T(X_1, \ldots, X_n)$ Informationen über Schätzgenauigkeit.

Bemerkung: Für Schätzer $T = T_n$ und jedes feste p ist

$$T(X_1, \ldots, X_n) = T_n(X_1, \ldots, X_n) \quad \textit{Zufallsvariable}.$$

Für $p \in [0, 1]$ gibt $T(X_1, \ldots, X_n)$ Informationen über Schätzgenauigkeit.

Notation: Ist p wahre Parameter, dann

- P_p: W-keit bzgl. $Ber(p)$ für X_i,
- E_p: Erwartungswert bzgl. $Ber(p)$ für X_i.

Erwartungstreue

Def.: Ein Schätzer T_n für p heißt erwartungstreu, falls für alle $p \in [0, 1]$

$$E_p T_n(X_1, \ldots, X_n) = p.$$

$\rightarrow$: Schätze im Mittel richtig.

Def.: Ein Schätzer T_n für p heißt erwartungstreu, falls für alle $p \in [0,1]$

$$E_p T_n(X_1, \ldots, X_n) = p.$$

$\rightarrow$: Schätze im Mittel richtig.

Der ML-Schätzer $\bar{X}_n$ ist erwartungstreu:

$$\begin{aligned} E_p \bar{X}_n &= E_p\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \\ &= E_p X_1 = p. \end{aligned}$$

Konsistenz

Def.: Eine Folge von Schätzern (T_n) für p heißt konsistent, falls für alle $p \in [0,1]$ und alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$P_p\Big(\big| T_n(X_1, \dots, X_n) - p \big| \geq \epsilon \Big) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

$\to$: Schätze für größere Stichproben immer genauer.

Konsistenz

Def.: Eine Folge von Schätzern (T_n) für p heißt konsistent, falls für alle $p \in [0,1]$ und alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$P_p\Big(\big|T_n(X_1,\dots,X_n) - p\big| \geq \epsilon\Big) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

$\rightarrow$: Schätze für größere Stichproben immer genauer.

ML-Schätzer konsistent:

Nach *schwachen Gesetz der großen Zahlen*

$$P_p\Big(\big|\bar{X}_n - p\big| \geq \epsilon\Big) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

Verteilung von Schätzern

Volle Information über Genauigkeit von Schätzer T:

Verteilung von $T(X_1, \ldots, X_n)$ für alle $p \in [0, 1]$.

Beispiel: Für alle $p \in [0, 1]$ gilt unter P_p:

$$n\bar{X}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim Bin(n, p).$$

Verteilung von Schätzern

Volle Information über Genauigkeit von Schätzer T:

Verteilung von $T(X_1, \ldots, X_n)$ für alle $p \in [0, 1]$.

Beispiel: Für alle $p \in [0, 1]$ gilt unter P_p:

$$n\bar{X}_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim Bin(n, p).$$

Häufig: Verteilung von $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ unbekannt
$\to$ asymptotische Verteilung

Beispiel: Für alle $p \in (0, 1)$, $a < b$ gilt nach ZGWS

$$P_p\Big(a \leq \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - p}{\big(p(1-p)\big)^{1/2}} \leq b)\Big) \to \Phi(b) - \Phi(a),$$

wobei Φ Verteilungsfunktion von $N(0, 1)$.

3.2.3. Intervallschätzung, Konfidenzintervall

Aus (asymptotischer) Verteilung: Konfidenzintervalle (Vertrauensintervalle).

Def.: Eine Intervallschätzung für $p \in [0,1]$ besteht aus zwei Abbildungen $L = L_n, U = U_n : \{0,1\}^n \to [0,1]$, $L \leq U$ (also $L(x_1, \ldots, x_n) \leq U(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$. Das zufällige Intervall

$$[L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n(X_1, \ldots, X_n)]$$

heißt dann Intervallschätzer.

Bem.: Die Intervallschätzung $[L(x_1, \ldots, x_n), U(x_1, \ldots, x_n)]$ sollte den wahren Parameter mit großer Wahrscheinlichkeit enthalten.

Konfidenzniveau

Def.: Die Überdeckungswahrscheinlichkeit einer Intervallschätzung $[L_n(x_1, \ldots, x_n), U_n(x_1, \ldots, x_n)]$ ist die Wahrscheinlichkeit

$$P_p\Big(p \in [L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n(X_1, \ldots, X_n)]\Big).$$

(also eine Funktion des zugrundeliegenden Parameters $p \in [0, 1]$).

Konfidenzniveau

Def.: Die Überdeckungswahrscheinlichkeit einer Intervallschätzung $[L_n(x_1,\ldots,x_n), U_n(x_1,\ldots,x_n)]$ ist die Wahrscheinlichkeit

$$P_p\Big(p \in [L_n(X_1,\ldots,X_n), U_n(X_1,\ldots,X_n)]\Big).$$

(also eine Funktion des zugrundeliegenden Parameters $p \in [0,1]$).

Das Konfidenzniveau einer Intervallschätzung ist die minimale Überdeckungswahrscheinlichkeit,

$$\inf_p P_p\Big(p \in [L_n(X_1,\ldots,X_n), U_n(X_1,\ldots,X_n)]\Big).$$

Konfidenzintervall

Def.: Eine Intervallschätzung $[L_n(x_1, \ldots, x_n), U_n(x_1, \ldots, x_n)]$ heißt Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ (für ein festes $\alpha \in [0, 1]$), falls die Intervallschätzung ein Konfidenzniveau $\geq 1 - \alpha$ hat, falls also

$$P_p\Big(p \in [L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n(X_1, \ldots, X_n)]\Big) \geq 1 - \alpha \qquad \forall p \in [0, 1].$$

Def.: Eine Intervallschätzung $[L_n(x_1,\ldots,x_n), U_n(x_1,\ldots,x_n)]$ heißt Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ (für ein festes $\alpha \in [0,1]$), falls die Intervallschätzung ein Konfidenzniveau $\geq 1-\alpha$ hat, falls also

$$P_p\Big(p \in [L_n(X_1,\ldots,X_n), U_n(X_1,\ldots,X_n)]\Big) \geq 1-\alpha \qquad \forall p \in [0,1].$$

Die Folge von Intervallschätzungen heißt asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$, falls

$$\lim_{n\to\infty} P_p\Big(p \in [L_n(X_1,\ldots,X_n), U_n(X_1,\ldots,X_n)]\Big) \geq 1-\alpha \qquad \forall p \in (0,1).$$

Bem.: Falls nicht nur asymptotisch, manchmal zur Betonung exakt.

Für $\alpha \in [0,1]$: Ist q_α das α-Quantil von $N(0,1)$, so ist für $p \in (0,1)$

$$P_p\Big(- q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\, \frac{\bar{X}_n - p}{\big(p(1-p)\big)^{1/2}} \leq q_{1-\alpha/2}\Big) \to 1 - \alpha$$

(asymptotische Verteilung von $\bar{X}_n$ und $q_\beta = -q_{1-\beta}$). Es gilt

$$-q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\, \frac{\bar{X}_n - p}{\big(p(1-p)\big)^{1/2}} \leq q_{1-\alpha/2}$$

genau dann, wenn

$$n\big(\bar{X}_n - p\big)^2 \leq c^2\, p\,(1-p), \qquad c = q_{1-\alpha/2}. \tag{1}$$

Gleichsetzen in (1)

$\rightarrow$ erhalte zwei Lsg. der quadratischen Gleichung

$\rightarrow$ in diesem Intervall gilt in (1) $\leq$, da für $p = 0,1$ gilt $\geq$.

Erhalte

$$n\left(\bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n p + p^2\right) = c^2 p(1-p)$$

bzw.

$$\left(p - \frac{c^2 + 2n\bar{X}_n}{2(n+c^2)}\right)^2 = \frac{c^2\left(c^2/4 + n\bar{X}_n - n\bar{X}_n^2\right)}{(n+c^2)^2}$$

Asymptotisches Konfidenzintervall

Somit (mit $c = q_{1-\alpha/2}$) für

$$
\begin{aligned}
L_n(X_1, \ldots, X_n) &= \frac{c^2 + 2n\bar{X}_n}{2(n+c^2)} - \frac{c\big(c^2/4 + n\bar{X}_n - n\bar{X}_n^2\big)^{1/2}}{(n+c^2)} \\
U_n(X_1, \ldots, X_n) &= \frac{c^2 + 2n\bar{X}_n}{2(n+c^2)} + \frac{c\big(c^2/4 + n\bar{X}_n - n\bar{X}_n^2\big)^{1/2}}{(n+c^2)}
\end{aligned}
$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} P_p\Big(p \in [L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n(X_1, \ldots, X_n)]\Big) \geq 1-\alpha \qquad \forall p \in (0,1).$$

Vereinfachtes asymp. Konfidenzintervall

Kann zeigen: Für $p \in (0,1)$ gilt auch

$$P_p\Big(- q_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\, \frac{\bar{X}_n - p}{\big(\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)\big)^{1/2}} \leq q_{1-\alpha/2}\Big) \to 1-\alpha.$$

Somit asymptotisches Konfidenzintervall

$$\lim_{n\to\infty} P_p\Big(p \in [L_n(X_1,\dots,X_n), U_n(X_1,\dots,X_n)]\Big) \to 1-\alpha,$$

mit

$$\begin{aligned} L_n(X_1,\dots,X_n) &= \bar{X}_n - \frac{q_{1-\alpha/2}\big(\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)\big)^{1/2}}{\sqrt{n}}, \\ U_n(X_1,\dots,X_n) &= \bar{X}_n + \frac{q_{1-\alpha/2}\big(\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)\big)^{1/2}}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Gegeben: Max. Länge ϵ des Konfidenzintervalls

Bsp.: Meinungsforschungsinstitut für ja/nein: $+/-2\%$.

Setze

$$\epsilon = \frac{q_{1-\alpha/2}\big(\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)\big)^{1/2}}{\sqrt{n}}$$

und löse nach n auf. Ersetze dabei $\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)$ durch max. Wert 1/4:

$$\epsilon = \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}, \qquad \text{also } n = \frac{q^2_{1-\alpha/2}}{4\epsilon^2}.$$

Bsp.: $\alpha = 0,05$, dann $q_{1-\alpha/2} = 1,96$, $\epsilon = 0,02$, dann $n = 2401$.

Exaktes Konfidenzintervall

Setze $n\bar{X}_n = S_n =: x$: Anzahl der Erfolge.

Für alle $p \in (0,1)$ wähle

$$A(p) = \{k_l(p), k_l(p)+1, \dots, k_u(p)\} \subset \{0, \dots, n\}$$

wobei $k_l(p)$ maximal mit

$$\sum_{j=0}^{k_l(p)-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \leq \alpha/2,$$

$k_u(p)$ minimal mit

$$\sum_{j=k_u(p)+1}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \leq \alpha/2.$$

Exaktes Konfidenzintervall

Dann $\forall\ p \in (0,1)$

$$P_p\big(S_n \in A(p)\big) = P_p\big(k_l(p) \leq S_n \leq k_u(p)\big) \geq 1-\alpha.$$

Setze $(S_n = x)$

$$I(x) = \{p \in (0,1) :\ \ x \in A(p)\}.$$

Dann

$$p \in I(x) \Leftrightarrow x \in A(p),$$

somit

$$P_p\big(p \in I(S_n)\big) \geq 1-\alpha \quad \forall p \in (0,1).$$

Also: $I(S_n)$ Konfidenzbereich für p.

Verteilungsfunktion Binomialverteilung

Setze

$$F(x;p) = \sum_{j=0}^{x} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Verteilungsfunktion von $Bin(n;p)$. Für $x \in \{1, \dots, n-1\}$ gelten

$$G_1(p;x) = F(x;p) = 1 - \frac{n!}{x!\,(n-x-1)!} \int_0^p t^x (1-t)^{n-x-1}\, dt,$$

$\Rightarrow$ $G_1(p;x)$, stetig, streng monoton fallend in p,

$$G_2(p;x) = 1 - F(x-1;p) = \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} \int_0^p t^x (1-t)^{n-x}\, dt,$$

$\Rightarrow$ $G_2(p;x)$ stetig, streng monoton wachsend in p,

$I(x)$ ist Intervall

Setze

$$p_u(x) = G_1^{-1}(\alpha/2; x).$$

Dann $G_1(p_u(x), x) = \alpha/2$ und

$$\forall\ p < p_u(x): \quad G_1(p; x) = F(x; p) > \alpha/2 \ \Rightarrow x \geq k_l(p).$$

Setze

$$p_l(x) = G_2^{-1}(\alpha/2; x).$$

Dann $G_2(p_l(x), x) = \alpha/2$ und

$$\forall\ p > p_l(x): \quad G_1(p; x) = F(x; p) > \alpha/2 \ \Rightarrow x \leq k_u(p).$$

Insgesamt

$$I(x) = \big(p_l(x), p_u(x)\big).$$