3.3 Schätztheorie

Hajo Holzmann

Philipps-Universität Marburg

Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ein statistisches Modell.

Def: Ein k-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$ ist eine Abbildung $\gamma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^k$.

Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ein statistisches Modell.

Def: Ein *k*-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$ ist eine Abbildung $\gamma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^k$.

Bsp.:

- $\mathcal{P} = (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ mit $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ parametrisches Modell, so setze

$$\gamma(P_\theta) = \theta.$$

Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ein statistisches Modell.

Def: Ein *k*-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$ ist eine Abbildung $\gamma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^k$.

Bsp.:

- $\mathcal{P} = (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ mit $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ parametrisches Modell, so setze

$$\gamma(P_\theta) = \theta.$$

- Enthält $\mathcal{P}$ alle Verteilungen mit existierendem Erwartungswert,

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P|X| < \infty\},$$

so setze

$$\gamma(P) = E_P X, \qquad X \sim P.$$

Parameter

- $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P X^2 < \infty\}$, so setze

$$\gamma(P) = \big(E_P X, \operatorname{Var}_P X\big), \qquad X \sim P.$$

- $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}),\quad$ Ist X Z.V. , $X \sim P$, so ist $E_P X^2 < \infty\}$, so setze

$$\gamma(P) = \big(E_P X, \operatorname{Var}_P X\big), \qquad X \sim P.$$

- Ist $\mathcal{P} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$, so setze

$$\gamma(P) = \gamma(F_P) = P\big((-\infty, x]\big) = F_P(x),$$

mit F_P Verteilungsfunktion von P.

Parameter

- $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P X^2 < \infty\}$, so setze
$$\gamma(P) = \big(E_P X, \operatorname{Var}_P X\big), \qquad X \sim P.$$
- Ist $\mathcal{P} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$, so setze
$$\gamma(P) = \gamma(F_P) = P\big((-\infty, x]\big) = F_P(x),$$
mit F_P Verteilungsfunktion von P.
- $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad P \text{ absolut stetig, Dichte } f_P \in C^1(\mathbb{R})\}$, und ist $x \in \mathbb{R}$, so setze
$$\gamma(P) = f_P(x).$$

Schätzer

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: k-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.

Schätzer

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: k-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.

Def: Ein Schätzer $T = T_n$ von γ ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Schätzer

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: k-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.

Def: Ein Schätzer $T = T_n$ von γ ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Bsp.:
$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P|X| < \infty\}$,
$\gamma(P) = E_P X$, wobei $X \sim P$, so setze

$$T(x_1, \ldots, x_n) = T_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x}_n.$$

Bem.: Dann ist $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ eine Z.V. für jedes $P \in \mathcal{P}$.

3.3.2. Eigenschaften von Schätzern: Erwartungstreue

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: 1-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.
- $T = T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Schätzer für γ.

3.3.2. Eigenschaften von Schätzern: Erwartungstreue

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: 1-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.
- $T = T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Schätzer für γ.

Def.: Der Schätzer T_n heißt erwartungstreu für γ, falls gilt

$$E_P T_n(X_1, \ldots, X_n) = \gamma(P) \quad \forall\ P \in \mathcal{P}.$$

3.3.2. Eigenschaften von Schätzern: Erwartungstreue

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: 1-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.
- $T = T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Schätzer für γ.

Def.: Der Schätzer T_n heißt erwartungstreu für γ, falls gilt

$$E_P T_n(X_1, \ldots, X_n) = \gamma(P) \quad \forall\ P \in \mathcal{P}.$$

Bsp.: Ist $\gamma(P) = E_P(X)$, $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k = \bar{X}_n$, so ist

$$E_P T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_P X_k = E_P X_1 = \gamma(P).$$

Konsistenz

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: 1-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.
- $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Schätzfolge für γ.

Konsistenz

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$: statistisches Modell.
- γ: 1-dimensionaler Parameter von $\mathcal{P}$.
- Beobachte $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ u.i.v., $X_i \sim P \in \mathcal{P}$.
- $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Schätzfolge für γ.

Def.: Eine Folge von Schätzern (T_n) für γ heißt konsistent, falls für alle $\epsilon > 0$, $P \in \mathcal{P}$ gilt

$$P_P\Big(\big|T_n(X_1, \ldots, X_n) - \gamma(P)\big| \geq \epsilon\Big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Bsp.:

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P X^2 < \infty\},$$

$$\gamma(P) = E_P X, \quad T_n(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}_n,$$

so ist für alle $\epsilon > 0$, $P \in \mathcal{P}$,

$$P_P\big(\big|\bar{X}_n - E_P X\big| \geq \epsilon\big) \to 0, \quad n \to \infty.$$

nach schwachem Gesetz der großen Zahlen.

Verteilung von Schätzern

- Verteilung von $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ häufig nicht explizit bekannt.
- Ist $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ konsistent für $\gamma(P)$, so gilt oftmals $\forall\ P \in \mathcal{P}$, $a < b$,

$$P_P\Big(a \leq \frac{T_n(X_1, \ldots, X_n) - \gamma(P)}{\sigma(T_n, P)} \leq b\Big) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

mit $\sigma(T_n, P) > 0$.

$\to$ T_n ist asymptotisch normalverteilt.

Verteilung von Schätzern

- Verteilung von $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ häufig nicht explizit bekannt.
- Ist $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ konsistent für $\gamma(P)$, so gilt oftmals $\forall\ P \in \mathcal{P},\ a < b$,

$$P_P\left(a \leq \frac{T_n(X_1, \ldots, X_n) - \gamma(P)}{\sigma(T_n, P)} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

  mit $\sigma(T_n, P) > 0$.

  $\to$ T_n ist asymptotisch normalverteilt.
- Bsp: Ist

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P X^2 < \infty\},$$

  so gilt nach ZGWS

$$P_P\left(a \leq \frac{\bar{X}_n - E_P X_1}{\sigma_P(X_1)} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

Varianzschätzung. Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P X^2 < \infty\},\\ \gamma(P) &= \mathrm{Var}_P X_1.\end{aligned}$$

Varianzschätzer

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}_n\right)^2.$$

Varianzschätzung. Sei

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \text{ so ist } E_P X^2 < \infty\},$$
$$\gamma(P) = \mathrm{Var}_P X_1 .$$

Varianzschätzer

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X}_n)^2 .$$

Eigenschaften

- erwartungstreu: $E_P S_n^2 = \mathrm{Var}_P X_1$ (beachte Normierung mit $1/(n-1)$)
- konsistent, unter weiteren Annahmen asymptotisch normalverteilt.

Schätzung der Verteilungsfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \qquad \gamma(P) = F_P(x) = P(X_1 \leq x).$$

Empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(-\infty, x]}(X_k) = \frac{1}{n} \#\{k : X_k \leq x\}.$$

Schätzung der Verteilungsfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \qquad \gamma(P) = F_P(x) = P(X_1 \le x).$$

Empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(X_k) = \frac{1}{n} \#\{k : X_k \le x\}.$$

Eigenschaften

- erwartungstreu $E_P \hat{F}_n(x) = F_P(x)$.
- konsistent, asymptotisch normalverteilt.

Schätzen in parametrischen Modellen

- $\mathcal{P} = (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$.
- Parameter: $\gamma(P_\theta) = \theta$.
- Schätzmethode: Maximum Likelihood.

Maximum Likelihood: Diskret

- P_θ: diskrete Verteilungen (etwa auf $\mathbb{Z}$).
- Beobachtet: $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
- Wahrscheinlichkeit für feste Beobachtungsfolge: Likelihood Funktion

$$L_n(\theta) = P_\theta\Big(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\Big) = \prod_{k=1}^{n} P_\theta(X_k = x_k).$$

$\rightarrow$ maximiere über den Parameter θ.

- Maximum Likelihood Schätzer für θ:

$$\hat{\theta}_n^{ML} \in \mathrm{argmax}_\theta L_n(\theta).$$

- $\mathcal{P} = \{Poi(\lambda),\ \lambda > 0\}$.
- Beobachtet: $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
- Likelihood Funktion:

$$L_n(\lambda) = P_\lambda\Big(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\Big) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_k}}{x_k!}.$$

$\rightarrow$ maximiere über λ.

Log-Likelihood Funktion

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \log L_n(\lambda) = -n\lambda + \sum_{k=1}^{n} \Big(x_k \log(\lambda) - \log(x_k!)\Big).$$

Bsp.: Poisson

Ableitung der Log-Likelihood Funktion, setze $= 0$

$$\mathcal{L}_n'(\lambda) = -n + \sum_{k=1}^{n} x_k/\lambda = 0.$$

Erhalte

$$\hat{\lambda}_n^{ML} = \bar{x}_n.$$

Maximum Likelihood: Stetig

- P_θ: Verteilungen mit stetigen Dichten $f(x;\theta)$.
- Beobachtet: $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$.
- Wert der gemeinsamen Dichte für feste Beobachtungsfolge: Likelihood Funktion

$$L_n(\theta) = \prod_{k=1}^{n} f_\theta(x_k;\theta).$$

$\rightarrow$ maximiere über den Parameter θ.

- Maximum Likelihood Schätzer für θ:

$$\hat{\theta}_n^{ML} \in \mathrm{argmax}_\theta L_n(\theta).$$

Bsp.: Exponential

- $\mathcal{P} = \{Ex(\lambda),\ \lambda > 0\}$.
- Beobachtet: $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$.
- Likelihood Funktion:

$$L_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \left(\lambda e^{-\lambda x_k}\right).$$

$\rightarrow$ maximiere über λ.

Log-Likelihood Funktion

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \log L_n(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

Bsp.: Exponential

Ableitung der Log-Likelihood Funktion, setze $= 0$

$$\mathcal{L}_n'(\lambda) = n/\lambda - \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

Erhalte

$$\hat{\lambda}_n^{ML} = \big(\bar{x}_n\big)^{-1}.$$

Eigenschaften Maximum Likelihood Schätzer

- ML Schätzer allgemein nur numerisch berechenbar
- Theoretische Eigenschaften: ML Schätzer i.a. nicht erwartungstreu, Verteilung unbekannt
- Aber: konsistent, asymptotisch normalverteilt, asymptotisch bester Schätzer

- $\mathcal{P} = (P_\theta)_{\theta \in \Theta}$: parametrisches Modell
- $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ beobachtet
- $\hat{\theta}_n$: Schätzer für θ (etwa ML)

Dann: $P_{\hat{\theta}_n}$ Schätzung der Verteilung der X_i.

Frage: Ist dies eine gute Schätzung?

$\rightarrow$ Modellüberprüfung (Modellvalidierung).

Rutherford-Geiger Experiment

- radioaktives Präparat,
- Messe: Anzahl der Zerfälle k in Zeitintervallen von 7,5 Sekunden
- insgesamt: 2608 Intervalle, n_k Intervalle mit k Zerfällen

k	n_k	k	n_k
0	57	8	45
1	203	9	27
2	383	10	10
3	525	11	4
4	532	12	0
5	408	13	1
6	273	14	1
7	139		

Modellüberprüfung

- Insgesamt: $\sum_k kn_k = 10097$ Zerfälle
- Modell: Anzahl der Zerfälle Poisson-verteilt
- ML Schätzer: $\hat{\lambda}_n = \frac{10097}{2608} = 3,87$

Modellüberprüfung:

ein-dimensionaler Parameter γ.

Def.: Eine Intervallschätzung für γ besteht aus zwei Abbildungen $L = L_n, U = U_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $L \leq U$ (also $L(x_1, \ldots, x_n) \leq U(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$. Das zufällige Intervall

$$[L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n(X_1, \ldots, X_n)]$$

heißt dann Intervallschätzer.

ein-dimensionaler Parameter γ.

Def.: Eine Intervallschätzung für γ besteht aus zwei Abbildungen $L = L_n, U = U_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $L \leq U$ (also $L(x_1, \dots, x_n) \leq U(x_1, \dots, x_n)$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$. Das zufällige Intervall

$$[L_n(X_1, \dots, X_n), U_n(X_1, \dots, X_n)]$$

heißt dann Intervallschätzer.

Bem.: Die Intervallschätzung $[L(x_1, \dots, x_n), U(x_1, \dots, x_n)]$ sollte den wahren Parameter $\gamma(P)$ mit großer Wahrscheinlichkeit enthalten.

Konfidenzniveau

Def.: Die Überdeckungswahrscheinlichkeit einer Intervallschätzung $[L_n(x_1,\dots,x_n), U_n(x_1,\dots,x_n)]$ ist die Wahrscheinlichkeit

$$P_P\Big(\gamma(P) \in [L_n(X_1,\dots,X_n), U_n(X_1,\dots,X_n)]\Big),$$

also eine Funktion von $P \in \mathcal{P}$.

Def.: Die Überdeckungswahrscheinlichkeit einer Intervallschätzung $[L_n(x_1,\dots,x_n), U_n(x_1,\dots,x_n)]$ ist die Wahrscheinlichkeit

$$P_P\Big(\gamma(P) \in [L_n(X_1,\dots,X_n), U_n(X_1,\dots,X_n)]\Big),$$

also eine Funktion von $P \in \mathcal{P}$.

Das Konfidenzniveau einer Intervallschätzung ist die minimale Überdeckungswahrscheinlichkeit,

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} P_P\Big(\gamma(P) \in [L_n(X_1,\dots,X_n), U_n(X_1,\dots,X_n)]\Big).$$

Konfidenzintervall

Def.: Eine Intervallschätzung $[L_n(x_1, \ldots, x_n), U_n(x_1, \ldots, x_n)]$ heißt Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ (für ein festes $\alpha \in [0, 1]$), falls die Intervallschätzung ein Konfidenzniveau $\geq 1 - \alpha$ hat, falls also

$$P_P\Big(\gamma(P) \in [L_n(X_1, \ldots, X_n), U_n(X_1, \ldots, X_n)]\Big) \geq 1-\alpha \qquad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Konfidenzintervall

Def.: Eine Intervallschätzung $[L_n(x_1,\ldots,x_n), U_n(x_1,\ldots,x_n)]$ heißt Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ (für ein festes $\alpha \in [0,1]$), falls die Intervallschätzung ein Konfidenzniveau $\geq 1-\alpha$ hat, falls also

$$P_P\Big(\gamma(P) \in [L_n(X_1,\ldots,X_n), U_n(X_1,\ldots,X_n)]\Big) \geq 1-\alpha \qquad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Die Folge von Intervallschätzungen heißt asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$, falls

$$\lim_{n\to\infty} P_P\Big(\gamma(P) \in [L_n(X_1,\ldots,X_n), U_n(X_1,\ldots,X_n)]\Big) \geq 1-\alpha \qquad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Bem.: Falls nicht nur asymptotisch, manchmal zur Betonung exakt.

Bsp.: Konfidenzintervall Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \quad &= \quad \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \\ &\qquad \text{so ist } E_P X^2 < \infty, Var_P X_1 > 0\}, \qquad \gamma(P) = E_P X_1.\end{aligned}$$

Es gilt nach ZGWS für alle $a < b$, $P \in \mathcal{P}$,

$$P_P\Big(a \leq \frac{\bar{X}_n - \gamma(P)}{\sigma_P(X_1)} \leq b\Big) \to \Phi(b) - \Phi(a).$$

Bsp.: Konfidenzintervall Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \quad = \quad & \{P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \quad \text{Ist } X \text{ Z.V. }, X \sim P, \\ & \text{so ist } E_P X^2 < \infty, Var_P X_1 > 0\}, \qquad \gamma(P) = E_P X_1.\end{aligned}$$

Es gilt nach ZGWS für alle $a < b$, $P \in \mathcal{P}$,

$$P_P\Big(a \leq \frac{\bar{X}_n - \gamma(P)}{\sigma_P(X_1)} \leq b\Big) \to \Phi(b) - \Phi(a).$$

- $\sigma_P(X_1)$: Nuisance (Ärgernis)-Parameter (nicht von primären Interesse).
- Muss auch geschätzt werden durch $S_n = \sqrt{S_n^2}$, S_n^2: Varianzschätzer.

Bsp.: Konfidenzintervall Erwartungswert

q_α: α-Quantil von $N(0,1)$.

Es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$, $P \in \mathcal{P}$,

$$P_P\Big(-q_{1_\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \gamma(P)}{S_n} \leq q_{1_\alpha/2}\Big) \to 1-\alpha.$$

Bsp.: Konfidenzintervall Erwartungswert

q_α: α-Quantil von $N(0,1)$.

Es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$, $P \in \mathcal{P}$,

$$P_P\Big(-q_{1_\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \gamma(P)}{S_n} \leq q_{1_\alpha/2} \Big) \to 1 - \alpha.$$

Genau dann

$$-q_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \gamma(P)}{S_n} \leq q_{1-\alpha/2},$$

wenn $L(X_1, \dots X_n) \leq \gamma(P) \leq U(X_1, \dots X_n)$,

$$\begin{aligned} L(X_1, \dots X_n) &= \bar{X}_n - \frac{q_{1-\alpha/2} S_n}{\sqrt{n}}, \\ U(X_1, \dots X_n) &= \bar{X}_n + \frac{q_{1-\alpha/2} S_n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$