Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Ulrich Friedrich SS 2009

Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen

1. Übungsblatt

Besprechung: Montag, 11.05.2009

Aufgabe 1: Lemma 1.2.1.4.

Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{d} a_{ii}$. Zeige:

(i) $a_{ii} \geq 0$ und $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) \geq 0$, falls $\mathbf{A}$ positiv semidefinit.

(ii) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}b_{ji}$

(iii) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \geq 0$, falls $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ positiv semidefinit.

Aufgabe 2: Beispiel 2.1.2. Der Raum $L_p(\Omega)$.

$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sei (Lebesgue-)meßbar. Man definiert

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{dx}\right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

und damit die Menge

$$\mathscr{L}_p(\Omega) := \{f \text{ meßbar} : \|f\|_p < \infty\}, \quad p \leq \infty$$

aller meßbaren Funktionen für die $\|f\|_p$ endlich ist. Auf dieser Menge betrachtet man die Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \text{ fast überall auf } \Omega \Leftrightarrow \{f - g \neq 0\} \text{ hat das Maß } 0$$

und geht zum Quotientenraum

$$L_p(\Omega) := \mathscr{L}_p(\Omega)/\sim\, = \{[f] := \{g \in \mathscr{L}_p(\Omega) : g \sim f\}, f \in \mathscr{L}_p(\Omega)\}$$

über. Für die Äquivalenzklassen $[f] \in L_p(\Omega)$ schreibt man kurz f. Zeige:

a) (kurz) Die Schreibweise $[f] = f$ für Elemente von $L_p(\Omega)$ ist wohldefiniert.

b) (kurz) $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $L_p(\Omega)$, aber nicht auf $\mathscr{L}_p(\Omega)$.

c) $L_p(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Hinweis für c): Hilfssatz (zu beweisen!): $g_i \in L_p(\Omega)$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \|g_i\|_p < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} g_i$ gegen $s \in L_p(\Omega)$. (Z.B. mit dem Satz von Beppo Levi)

Aufgabe 3: Satz 2.1.4. Fortsetzung dicht definierter stetiger Operatoren.

Sei $X_0 \subset X,\ \overline{X_0} = X,\ Y$ ein Banachraum und $|||S|||_U := \sup\{\frac{\|Sx\|_Y}{\|x\|_X}, 0 \neq x \in U\}$ für $S \in L(U, Y)$, wobei $U \in \{X_0, X\}$. Zeige:

a) $T_0 \in L(X_0, Y)$ besitzt eindeutige Fortsetzung $T \in L(X, Y)$, d.h. $Tx = T_0 x$ für alle $x \in X_0$.

b) $x_n \to x\ (x_n \in X_0,\ x \in X) \Rightarrow Tx = \lim_{n\to\infty} T_0 x_n$

c) $|||T|||_X = |||T_0|||_{X_0}$

Hinweis:
Definiere eine Fortsetzung, zeige das diese eindeutig und wohldefiniert ist.

Aufgabe 4: Orthogonalität und Dichtheit.

Es sei X ein Hilbertraum und $A \subset X$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen

a) $A \subset X$ dicht

b) $A^\perp = \{0\}$

c) $x \in X$ und $\langle x, a\rangle = 0$ für alle $a \in A \Rightarrow x = 0$

d) Für alle $x \in X \setminus \{0\}$ existiert $a \in A$ mit $\langle x, a\rangle \neq 0$

Scheinkriterien

- Teilnahme und Mitarbeit im Tutorium, Präsentation der Lösungen
- Bestehen einer mündlichen Prüfung