

## Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen

### 3. Übungsblatt

Besprechung: Montag, 08.06.2009

#### Aufgabe 9:

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet,  $d \geq 2$ .

(i) Zeige, dass

$$V := \{ u|_{\Omega} : u \in C^2(\mathbb{R}^d) \text{ harmonisch} \}$$

ein unendlich-dimensionaler, linearer Teilraum von  $H^1(\Omega)$  ist.

(ii) Was bedeutet dies für  $H^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$ ?

(iii) Im Fall  $d = 1$  gilt  $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \Pi^1$ . Was bedeutet dies für (i) und (ii)?

#### Aufgabe 10:

Zeige Lemma 2.3.8 der Vorlesung: Seien die Hilberträume  $V \subset U$  stetig und dicht eingebettet. Dann ist auch  $U'$  stetig und dicht in  $V'$  eingebettet.

#### Aufgabe 11:

Ist  $V \subset U \subset V'$  ein Gelfand-Dreier mit  $T \in L(V', V)$ , dann gilt (mit evtl. eingeschränktem  $T$ )

$$T \in L(V', V'), T \in L(U, U), T \in L(U, V), T \in L(V, V), T \in L(V', U).$$

#### Aufgabe 12:

Zeige Lemma 2.4.4 der Vorlesung: Sei  $V$  ein Hilbertraum.

(i)  $A \in L(V, V')$  gehört genau dann zu einer stetigen Bilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , d.h.

$$a(x, y) = \langle Ax, y \rangle_{V' \times V}, \quad x, y \in V,$$

wenn  $A'$  zu  $a^*(x, y) = a(y, x)$  gehört.

(ii) Wenn  $a$  symmetrisch ist, dann gilt  $A = A'$ .