Fachbereich Mathematik und Informatik SS 2009
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Ulrich Friedrich

Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen

4. Übungsblatt

Besprechung: Montag, 22.06.2009

Aufgabe 13: Lemma 3.1.1.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und der Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \,, \quad x \in \Omega$$

gleichmäßig elliptisch in Ω mit $a_\alpha(x)$ hinreichend glatt. Dann lässt sich L in der Form

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha$$

schreiben.

Aufgabe 14: Lemma 3.1.4.

Sei V ein Hilbertraum, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige elliptische Bilinearform, $V_0 \subset V$ dicht und $f \in V'$. Dann ist eine Lösung x von

$$a(x, y) = f(y) \,, \quad y \in V$$

eindeutig durch

$$a(x, y) = f(y) \,, \quad y \in V_0$$

bestimmt. Was gilt, wenn a nicht elliptisch ist?

Aufgabe 15: Rechte Seiten.

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{K}$ eine $H^1(\Omega)$-elliptische Bilinearform. Dann ist die Abbildung

$$H^1(\Omega) \ni u_0 \longmapsto a(u_0, \cdot) \in (H^1(\Omega))'$$

stetig. Was folgt aus der Elliptizität?

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Lipschitzrand $\partial\Omega$, $g \in L_2(\Omega)$ und $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$. Dann ist durch

$$f(v) := \int_\Omega g(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) v(x) d\Gamma \,, \quad v \in H^1(\Omega)$$

ein lineares Funktional $f \in (H^1(\Omega))'$ gegeben mit

$$\|f\|_{(H^1(\Omega))'} \leq C\big(\|g\|_{(H^1(\Omega))'} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \big) .$$