Fachbereich Mathematik und Informatik SS 2009
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke Ulrich Friedrich

**Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen**

**5. Übungsblatt**

**Besprechung: Montag, 06.07.2009**

**Aufgabe 16:**

Sei $V$ ein Hilbertraum.

(i) Ist $W \subset V$ ein abgeschlossener Teilraum mit äquivalenter Norm und $a(\cdot,\cdot)$ eine $V$-elliptische Bilinearform, dann ist $a(\cdot,\cdot)$ auch $W$-elliptisch.

(ii) Sei $V_N \subset V$, $\dim V_N = N < \infty$ mit $\|\cdot\|_{V_N} = \|\cdot\|_V$. Dann gilt

$$\|f\|_{V_N'} \leq \|f\|_{V'}, \quad f \in V'.$$

**Aufgabe 17:** Lemma 4.1.7.

Sei $V$ ein Hilbertraum, $a(\cdot,\cdot)$ eine stetige Bilinearform und $\mathcal{L}$ die dazu gehörende Steifigkeitsmatrix auf $V_N \subset V$, $V_N = \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_N\}$.

(i) Falls $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch ist, dann auch $\mathcal{L}$.

(ii) Falls $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und $V$-elliptisch ist, dann ist $\mathcal{L}$ positiv definit und die Lösung $u^N$ von

$$\mathcal{L}u = F, \quad F = (F_1, \dots, F_N)^T, \; F_i = f(b_i)$$

löst auch das Variationsproblem

$$J(u^N) \leq J(u) := a(u,u) - 2f(u), \quad u \in V_N.$$

**Aufgabe 18:**

Sei $I = (0,1)$ und $f$ gegeben durch

$$f(\varphi) := \varphi\left(\frac{1}{2}\right), \quad \varphi \in H_0^1(I).$$

(i) Es gilt $f \in H^{-1}(I)$.

(ii) Bestimme die schwache Lösung $u \in H_0^1(I)$ von

$$-u'' = f, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

(iii) Sei

$$S := \left\{ (x_i, x_{i+1}) \,|\, i = 0, \dots, n, 0 = x_0 < \dots < x_{n+1} = 1 \right\}$$

eine Zerlegung von $I$ und

$$V_h := \left\{ v_h \in C(\bar{I}) \,|\, v_h|_{x_i,x_{i+1}} \in \Pi_1, i = 0, \dots, n \right\}.$$

Dabei gelte $n \geq 1$ und $x_i = 1/2$ für ein $i$.
Stelle das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und berechne die diskrete Lösung $u_h \in V_{h,0} := V_h \cap H_0^1(I)$.