Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. G. Schumacher
Dipl.-Math. T. Geiger

Sommersemester 2013

# Klausur zur Funktionentheorie I

Freitag, den 26.07.2013, 09:15–11:15 Uhr,
Hörsaal B, Hörsaalgebäude Chemie, Lahnberge

**Name:** ........................................

**Vorname:** Musterlösung

**Matrikelnummer:** ........................................

**Studiengang:** ........................................

Diese Prüfung ist mein letzter Prüfungsversuch in diesem Modul: ☐ ja ☐ nein

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter dem Aufgabentext, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keine Hilfsmittel zulässig.

Es werden maximal 50 Punkte erwartet, d.h. 50 Punkte entsprechen 100%.

Viel Erfolg!

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 60 |
| erreichte Punkte | | | | | | | |

Name: ..............................................................................

## Aufgabe 1 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es werden keine Begründungen verlangt.

Jede richtig beantwortete Teilaufgabe bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Teilaufgabe ergibt einen Punkt Abzug. Nicht beantwortete Teile werden nicht gewertet. Wird in der Summe eine negative Punktzahl erreicht, so wird diese auf 0 Punkte aufgerundet.

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}$ offen ist in $p \in D$ holomorph, wenn $f$ in $p$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt.

   *wahr* ☐ *falsch* ☒

2. Sei $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolge. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in N}$ auf jeder beschränkten Menge $B \subset \mathbb{C}$ gleichmäßig.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

3. Auf dem Kreisring $B_{1,2}(0)$ gibt es eine holomorphe Logarithmusfunktion.

   *wahr* ☐ *falsch* ☒

4. Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem sternförmigen Gebiet $G$, dann hängt das Integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von $\gamma$ ab.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

5. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

6. Die Taylorreihe einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um einen beliebigen Punkt $p \in \mathbb{C}$ hat den Konvergenzradius $\infty$.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

7. Es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

   *wahr* ☐ *falsch* ☒

8. Besitzt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ überabzählbar viele Nullstellen, dann gilt bereits $f = 0$.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

9. Besitzt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ in 0 eine hebbare Singularität, dann kann $f$ mit dem Wert $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$ in 0 holomorph fortgesetzt werden.

   *wahr* ☒ *falsch* ☐

10. Besitzt die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ in 0 eine wesentliche Singularität, dann gibt es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Nullfolge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, so dass die Folge $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $w$ konvergiert.

    *wahr* ☒ *falsch* ☐

Name: ..............................................................................................

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in G$ ein Punkt und

$$f : G \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion deren Ableitung $f' : G \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ in $p$ holomorph fortsetzbar ist. Zeigen Sie, dass dann auch $f$ in $p$ holomorph fortsetzbar ist.

Bezeichne $g: G \to \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung von $f'$, d.h. es ist $g|_{G\setminus\{p\}} = f'$.

Da $G \subset \mathbb{C}$ offen und $p \in G$ ist, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(p) \subset G$. Da $B_r(p)$ sternförmig und $g|_{B_r(p)}$ holomorph ist, existiert nach dem Cauchy-Integralsatz eine Stammfunktion, d.h. es existiert

$$h: B_r(p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $h' = g|_{B_r(p)}$, insbesondere also $h'|_{B_r(p)\setminus\{p\}} = f'|_{B_r(p)\setminus\{p\}}$.

Auf dem Gebiet $B_r(p)\setminus\{p\}$ sind also $f|_{B_r(p)\setminus\{p\}}$ und $h|_{B_r(p)\setminus\{p\}}$ zwei Stammfunktionen von $f'|_{B_r(p)\setminus\{p\}}$.

$$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow} \quad f|_{B_r(p)\setminus\{p\}} = \underbrace{h|_{B_r(p)\setminus\{p\}}}_{\text{in } p \text{ holomorph fortsetzbar}} + c \quad \text{für eine Konstante } c \in \mathbb{C}.$$

$\Longrightarrow$ $f$ ist in $p$ holomorph fortsetzbar. ▨

Name: ..........................................................................................

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Berechnen Sie das folgende Integral wobei der Rand der Kreisscheibe in positiver Drehrichtung durchlaufen werde.

$$\int_{\partial B_1(\frac{i}{2})} \frac{\exp(\pi z)}{z^2+1}\, dz$$

Es ist

$$\frac{\exp(\pi z)}{z^2+1} = \frac{\exp(\pi z)}{(z-i)(z+i)} = \frac{f(z)}{z-i}$$

wobei wir definieren:

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{\exp(\pi z)}{z+i}$$

Wegen $|-i-\frac{i}{2}| = \frac{3}{2} > 1$ ist $\overline{B_1(\frac{i}{2})} \subset \mathbb{C} \setminus \{-i\}$,

so dass mit der Cauchy-Integralformel folgt:

$$\int_{\partial B_1(\frac{i}{2})} \frac{\exp(\pi z)}{z^2+1}\, dz = \int_{\partial B_1(\frac{i}{2})} \frac{f(z)}{z-i}\, dz$$

$$\overset{\substack{\text{CIF,}\\ i \in B_1(\frac{i}{2})}}{=} 2\pi i \cdot f(i)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\exp(\pi i)}{2i}$$

$$= -\pi .$$

$\blacksquare$

Name: ..........................................................................................

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow G, \qquad g : \mathbb{D} \longrightarrow G$$

zwei holomorphe Funktionen. Es gelte $f(0) = g(0)$ und $f$ sei biholomorph. Zeigen Sie, dass für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$

$$g(B_r(0)) \subset f(B_r(0))$$

gilt.

- Da $f$ biholomorph ist, existiert $f^{-1} : G \to \mathbb{D}$ und ist holomorph.

$\Rightarrow$ $h := f^{-1} \circ g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist holomorph mit

$$h(0) = f^{-1}(g(0)) = 0 \quad \text{wegen} \quad f(0) = g(0).$$

Mit dem Lemma von Schwarz folgt also:

$$|f^{-1} \circ g(z)| \leq |z| \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

- Ist nun $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$ sowie $z \in B_r(0)$ gegeben.

$\Rightarrow$ $|f^{-1} \circ g(z)| \leq |z| < r$, d.h. $f^{-1}(g(z)) \in B_r(0)$.

$\Rightarrow$ $g(z) = f(f^{-1}(g(z))) \in f(B_r(0))$.

Da $z \in B_r(0)$ beliebig war, folgt also

$$g(B_r(0)) \subset f(B_r(0)).$$

$\blacksquare$

Name: ..............................................................................................

**Aufgabe 5 (10 Punkte)**

Bestimmen Sie alle Paare $(f, g)$ ganzer Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = g(\overline{z})$$

für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ gilt.

- Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $f(z) = g(\overline{z}) \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}$.

  Für $z \in \partial\mathbb{D}$ ist $1 = |z|^2 = z\overline{z}$, also $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

$\Rightarrow$ Es gilt $f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in \partial\mathbb{D}$.

- Da $\partial\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^\times$ nicht diskret ist, folgt aus dem Identitätssatz angewandt auf $f|_{\mathbb{C}^\times}$ und $\left(z \mapsto g\left(\frac{1}{z}\right)\right)$:

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}^\times.$$

Wegen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist also $z \mapsto g\left(\frac{1}{z}\right)$ in $0 \in \mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar und damit insbesondere um $0$ herum beschränkt.

$\Rightarrow \exists M > 0 : \left|g\left(\frac{1}{z}\right)\right| < M \quad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Wegen $|z| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$ gilt also

$$|g(z)| = \left|g\left(\frac{1}{\frac{1}{z}}\right)\right| < M \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| > 1.$$

- Als stetige Funktion ist $g$ aber auch auf $\overline{\mathbb{D}}$

und damit insgesamt auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt.

$\overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow}$ $g$ ist konstant, d.h. für ein $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$g(z) = a \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = a \quad \forall z \in \mathbb{C}^\times$$

$$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \quad f(z) = a \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Also folgt insgesamt: $f$ und $g$ sind konstant mit

$$f = g.$$

- Da umgekehrt offenbar solche Paare $(f,g)$ die gewünschte Gleichung erfüllen, folgt:

$$\left\{ (f,g) \mid f,g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \text{ mit } f(z) = g(\overline{z}) \ \forall z \in \partial\mathbb{D} \right\}$$

$$= \left\{ (f,f) \mid f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \text{ konstant} \right\}.$$

$\blacksquare$

Name: ..........................................................................

**Aufgabe 6 (10 Punkte)**

Bestimmen Sie zur Funktion

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\cos(\pi z)}$$

die isolierten Singularitäten und deren Art. Geben Sie im Fall einer hebbaren Singularität die holomorphe Fortsetzung und im Falle eines Pols die Ordnung an.

- Es ist $\cos(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z \in \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right)\pi \Leftrightarrow z \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Die isolierten Singularitäten von $f$ sind die Elemente aus $\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) \cup \{0\}$.

Insbesondere ist $f: \mathbb{C} \setminus \left(\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) \cup \{0\}\right) \to \mathbb{C}$ holomorph und da offenbar der Abstand zwischen zwei beliebigen isolierten Singularitäten stets $\geq \frac{1}{2}$ ist, können wir diese auf Scheiben mit dem Radius $\frac{1}{3}$ gut untersuchen, genauer gilt:

$\forall p \in \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) \cup \{0\}$ ist $B_{\frac{1}{3}}(p) \setminus \{p\} \subset \mathbb{C} \setminus \left(\left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) \cup \{0\}\right)$.

- Nun ist $f(z) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{z} \in \mathbb{Z}\pi$.

$\Rightarrow \quad f(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 0, 2\}\right\} \subset \overline{B_1(0)}$.

- <u>Behauptung:</u> $f$ besitzt in $0$ eine wesentliche Singularität.

Betrachte Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 4} \subset B_{\frac{1}{3}}(0) \setminus \{0\}$ welche gegen $0$ konvergiert.

↯ 0 wäre hebbare Singularität von $f$. Dann:

$$f(0) = f\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\overset{\text{Identitäts-}}{\underset{\text{satz}}{\Longrightarrow}} \quad f \equiv 0 \quad ↯$$

↯ $f$ besitzt in 0 eine Polstelle.

$$\overset{\text{Vorlesung}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{z\to 0} f(z) = \infty \quad ↯ \; \lim_{n\to\infty} f\left(\tfrac{1}{n}\right) = 0.$$

$\Rightarrow$ $f$ besitzt in 0 eine wesentliche Singularität.

- Behauptung: $f$ besitzt in $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ hebbare Singularitäten mit Fortsetzungen durch 4 bzw. $-4$.

Wegen $f(-z) = \dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{z}\right)}{\cos(-\pi z)} = -\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{\cos(\pi z)} = -f(z)$ genügt es, die Behauptung für $\frac{1}{2}$ zu zeigen.

Wegen $\sin\left(\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}\right) = \sin(2\pi) = 0$ sowie $\left(\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)\right)'\Big|_{\frac{1}{2}} = -4\pi$ folgt auf $B_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot g(z) \quad \text{für ein } g \in \mathcal{O}\left(B_{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

mit $g\left(\frac{1}{2}\right) = -4\pi \neq 0$.

Wegen $\cos\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 0$ sowie $\left(\cos(\pi z)\right)'\Big|_{\frac{1}{2}} = -\pi$

folgt auf $B_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{2})$:

$$\cos(\pi z) = (z-\tfrac{1}{2}) \cdot h(z) \qquad \text{für ein } h \in \mathcal{O}(B_{\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{2}))$$

mit $h(\frac{1}{2}) = -\pi \neq 0$.

Also erhalten wir auf $B_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{2}) \setminus \{\frac{1}{2}\}$:

$$f(z) = \frac{(z-\frac{1}{2}) \cdot g(z)}{(z-\frac{1}{2}) \cdot h(z)} = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{holomorph auf ganz } B_{\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{2}).$$

$\Longrightarrow$ f besitzt in $\frac{1}{2}$ hebbare Singularität und für die holomorphe Fortsetzung folgt: $f(\frac{1}{2}) = \frac{g(\frac{1}{2})}{h(\frac{1}{2})} = \frac{-4\pi}{-\pi} = 4$.

- Behauptung: In allen übrigen Punkten $p \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ besitzt f einen Pol der Ordnung 1.

Zunächst ist wegen $|p| \geq \frac{3}{2}$ $\;B_{\frac{1}{3}}(p) \cap \overline{B_1(0)} = \emptyset$ und damit $\sin(\frac{\pi}{z})$ nullstellenfrei auf $B_{\frac{1}{3}}(p)$.

Wegen $\cos(\pi p) = 0$ sowie $(\cos(\pi z))'\big|_p = -\pi \sin(\pi p) \neq 0$ folgt auf $B_{\frac{1}{3}}(p)$:

$$\cos(\pi z) = (z-p) \cdot h(z) \quad \text{für ein } h \in \mathcal{O}(B_{\frac{1}{3}}(p))$$

mit $h(p) \neq 0$.

Also erhalten wir auf $B_{\frac{1}{3}}(p) \setminus \{p\}$:

$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{(z-p)\cdot h(z)} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{h(z)}}{(z-p)}$$

holomorph auf ganz $B_{\frac{1}{3}}(p)$ und $\neq 0$ in $p$.

$\Rightarrow$ $f$ besitzt in $p$ einen Pol der Ordnung $1$. $\blacksquare$