Algebra I, WiSe 2011\2012 - Lösung Blatt 2

2.1.

(i) • H bei $\circ$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $\circ$ ist Verknüpfung auf H.

Da $\circ$ auf G assoziativ ist, ist $\circ$ auch eingeschränkt auf H assoziativ.

$\Rightarrow$ $(H, \circ)$ ist Halbgruppe.

• $\forall a \in H$ gilt: Rechtstranslation r_a und Linkstranslation l_a sind als Abbildungen $G \to G$ bijektiv, also insbesondere injektiv.

H Halbgruppe $\Rightarrow r_a(H) \subset H$, $l_a(H) \subset H$

$\Rightarrow$ r_a und l_a sind als Abbildungen $H \to H$ zumindest injektiv

$\overset{H \text{ endlich!}}{\Longrightarrow}$ r_a und l_a sind als Abbildungen $H \to H$ sogar bijektiv (s.u.)

$\overset{\text{Lemma 1.7}}{\Longrightarrow}$ $(H, \circ)$ ist eine Gruppe, also eine Untergruppe von $(G, \circ)$.

(ii) Wähle $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$ und $H := \{ m \in \mathbb{Z} \mid m > 0 \}$

$\Rightarrow$ H bei $+$ abgeschlossen aber keine Untergruppe (es fehlt sowohl neutrales Element $0 \in \mathbb{Z}$, als auch die Inversen...)

$\blacksquare$

<u>Bemerkung:</u> (falls erforderlich)

M <u>endliche</u> Menge, $f: M \to M$ Abbildung. Äquivalent:

(i) f injektiv

(ii) f surjektiv

(iii) f bijektiv ("Schubfachprinzip")

<u>Denn:</u> (genügt zu zeigen: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) denn (iii) $\Rightarrow$ (ii) klar und (ii) $\Rightarrow$ (i) ist dann gezeigt und (i) & (ii) $\Rightarrow$ (iii))

"$\Rightarrow$": $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$ $\quad m = \# M$.

$\lightning$ $f(M) \neq M$, d.h.

$$m = \# M > \# f(M) = \# f(\{a_1, \ldots, a_m\}) \overset{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}{=} \# \{f(a_1), \ldots, f(a_m)\}$$

$\Rightarrow f(a_i) = f(a_j)$ für gewisse $i \neq j$

$\Rightarrow f$ nicht injektiv. $\lightning$

"$\Leftarrow$": $m = \# M = \# f(M) \overset{\text{wie eben}}{=} \# \{f(a_1), \ldots, f(a_m)\}$

Also: $f(a_i) \neq f(a_j)$ für $i \neq j$, d.h. f ist injektiv.

$\blacksquare$

2.2.

(i) $\mathcal{S}_3 = \{ (1), (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2) \}$

(ii) $H = \langle \{(1,2)\} \rangle = \{ (1,2)^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ (1), (1,2) \}$ wegen $(1,2) \circ (1,2) = (1)$

Linksnebenklassen:

$(1) \circ H = (1,2) \circ H = H$ (Klar wegen $(1,2)^2 = (1)$).

$(1,3) \circ H \underset{(1,3)\circ(1,2)=(1,2,3)}{\overset{\uparrow}{=}} \{ (1,3), (1,2,3) \}$

$(1,2,3) \circ H \underset{(1,2,3)\circ(1,2)=(1,3)}{\overset{\uparrow}{=}} \{ (1,2,3), (1,3) \}$

gleiche Nebenklasse.

$(2,3) \circ H \underset{(2,3)\circ(1,2)=(1,3,2)}{\overset{\uparrow}{=}} \{ (2,3), (1,3,2) \}$

$(1,3,2) \circ H \underset{(1,3,2)\circ(1,2)=(2,3)}{\overset{\uparrow}{=}} \{ (1,3,2), (2,3) \}$

gleiche Nebenklasse.

(iii) Es ist:

$(1,3) \circ H = \{ (1,3), (1,2,3) \}$ (s.o.)

$H \circ (1,3) = \{ (1,3), (1,3,2) \}$ wegen $(1,2) \circ (1,3) = (1,3,2)$

$\Rightarrow (1,3) \circ H \neq H \circ (1,3)$

$\Rightarrow H$ ist kein Normalteiler in $\mathcal{S}_3$.

$\blacksquare$

2.3.

Es ist $G = H \dot{\cup} (G-H)$.

Nach Voraussetzung gilt $\# G/H = 2$ und damit (vgl. VL) auch $\# G \backslash H = 2$. Nach VL folgt also:

$$G = H \dot{\cup} aH \qquad \forall a \in G-H$$

und $$G = H \dot{\cup} Ha \qquad \forall a \in G-H.$$

$\Rightarrow$ $\forall a \in G-H$ gilt:

$$aH = G-H = Ha.$$

Trivialerweise gilt $\forall a \in H$: $aH = H = Ha$.

Insgesamt: $\forall a \in G$ ist $aH = Ha$

$$\Rightarrow H \triangleleft G.$$

$\blacksquare$

2.4. Sei $\varphi : (\mathbb{Q},+) \to (\mathbb{Z},+)$ Gruppenhomomorphismus.

↯ $\varphi \neq 0$.

- $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\varphi(\alpha) \neq 0$. Da $\varphi(0) = 0$ ist, folgt

  $\alpha \neq 0$.

OE sei $\varphi(\alpha) > 0$ also $\varphi(\alpha) \in \mathbb{N}$

(sonst betrachte $-\alpha$, denn
$\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha) > 0$ wenn $\varphi(\alpha) < 0$.)

- Sei $\beta \in \mathbb{Q}$ ein Element, für welches φ den Kleinsten Wert in $\mathbb{N}$ annimmt (existiert wegen $\varphi(\alpha) \in \mathbb{N}$), d.h. mit

$$m := \varphi(\beta) \in \mathbb{N}$$

gilt: Ist $\gamma \in \mathbb{Q}$ mit $\varphi(\gamma) > 0$, so ist $\varphi(\gamma) \geq m$. (*)

- Betrachte $\frac{\beta}{2} \in \mathbb{Q}$:

$$m = \varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2 \cdot \varphi\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \varphi\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{m}{2} < m \quad ↯$$

↯ Zur Minimalität von m, also gegen (*).

$\Rightarrow \varphi = 0$.

■