Algebra I, WiSe 2011\2012 – Lösung Blatt 3

3.1.

- $H \subset G$ Untergruppe vom Index 2. $\Rightarrow \# G/H = 2$

$\overset{\text{Blatt 2,}}{\underset{\text{Aufg. 3}}{\Longrightarrow}} \quad H \lhd G$

$\Rightarrow$ G/H ist eine Gruppe mit 2 Elementen.

$\Rightarrow$ $G/H \cong \mathbb{F}_2$ wobei $\mathbb{F}_2$ gegeben durch $\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$.

$\Rightarrow$ $\forall g \in G$ ist $gH \cdot gH = H$.

Also: $H = gH \cdot gH = g^2 H \quad (\forall g \in G)$.

$\Rightarrow$ $\forall g \in G$ ist $g^2 \in H$.

- Sei nun $g \in G$ ein Element ungerader Ordnung, d.h.

$$g^{2n+1} = e \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ $g^{2n+1} \in H$.

Wegen $g^2 \in H$ ist auch $g^{2n} = \underbrace{g^2 \cdot \ldots \cdot g^2}_{n\text{-mal}} \in H$ (da Untergr.)

also auch $g^{-2n} \in H$ (Invers zu g^{2n})

$$\Rightarrow \quad g = g^{-2n} \cdot g^{2n} \cdot g = \underbrace{g^{-2n}}_{\in H} \cdot \underbrace{g^{2n+1}}_{\in H} \in H.$$

Also: Alle $g \in G$ ungerader Ordnung liegen in H.

- Damit:

$$\langle \{ g \in G \mid \operatorname{ord} g \text{ ungerade} \} \rangle \subset H \quad \text{Untergruppe.}$$

Wegen $[G : H] = 2$ ist bereits $H \subsetneq G$ echte Untergruppe von G.

Also: Die Elemente ungerader Ordnung erzeugen echte Untergruppe von G.

$\blacksquare$

3.2.

- Sei $U \subset \mathbb{Z}/_{360\mathbb{Z}}$ Untergruppe.

$\Rightarrow \quad \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{Z}$ ist Untergruppe. (da $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{360\mathbb{Z}}$ Hom.

$\overset{VL}{\Longrightarrow} \quad \pi^{-1}(U) = m \cdot \mathbb{Z}$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$.

π surjektiv $\Rightarrow \quad \pi(\pi^{-1}(U)) = U$

Also: Jede Untergruppe $U \subset \mathbb{Z}/_{360\mathbb{Z}}$ ist von der Form $\pi(m\mathbb{Z})$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$.

Ebenfalls Klar: Alle $\pi(m\mathbb{Z})$ sind Untergruppen.

- Sei $m \in \mathbb{N}$ fixiert. Setze

$$g := ggT(m, 360) \in \mathbb{N}.$$

Dann: $l \cdot g = m$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$\overline{x} \in \pi(m\mathbb{Z}) \Rightarrow \overline{x} = k \cdot \overline{m} \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$
$$= k \cdot l \cdot \overline{g}$$
$$\Rightarrow \overline{x} \in \pi(g\mathbb{Z}).$$

Also: $\pi(m\mathbb{Z}) \subset \pi(g\mathbb{Z})$

Andererseits: $g = ggT(m, 360)$

$\Rightarrow \quad g = p \cdot m + q \cdot 360$ für geeignete $p, q \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \quad \overline{g} = p \cdot \overline{m} + q \cdot \underbrace{\overline{360}}_{=0} = p \cdot \overline{m}$

Damit: $\bar{x} \in \pi(g\mathbb{Z}) \Rightarrow \bar{x} = k \cdot \bar{g}$ für $k \in \mathbb{Z}$ geeignet

$$= k \cdot p \cdot \bar{m}$$

$$\Rightarrow \bar{x} \in \pi(m\mathbb{Z})$$

d.h. $\pi(g\mathbb{Z}) \subset \pi(m\mathbb{Z})$.

Insgesamt: $\pi(m\mathbb{Z}) = \pi(\mathrm{ggT}(m, 360)\mathbb{Z}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Wir erhalten bereits alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$, wenn wir die $\pi(d\mathbb{Z})$ mit d Teiler von 360 betrachten.

- Ist d Teiler von 360, dann ist $\frac{360}{d} \in \mathbb{N}$ und

$$\pi(d\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{d}, 2\bar{d}, \ldots (\tfrac{360}{d} - 1)\bar{d}\}$$

$$\Rightarrow \text{ord}\, \pi(d\mathbb{Z}) = \frac{360}{d} \quad \text{und} \quad \pi(d\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(\tfrac{360}{d})\mathbb{Z}.$$

Also: Sind d, d' zwei Teiler von 360, so sind $\pi(d\mathbb{Z})$ und $\pi(d'\mathbb{Z})$ verschieden (da unterschiedliche Ordnung).

Insgesamt: Zu jedem Teiler d von 360 gibt es genau eine Untergruppe in $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$ und dies sind alle Untergruppen. Die Untergruppe zu d ist isomorph zu $\mathbb{Z}/(\frac{360}{d})\mathbb{Z}$ und besitzt $\bar{d}$ als Erzeuger in $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$.

- Es ist $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Die Teiler sind also alle Potenzen

$$2^i 3^j 5^k \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} 0 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 2 \\ 0 \leq k \leq 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Die Teiler sind

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20,
24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360

$\blacksquare$

3.3. Setze

$$R: \mathrm{Abb}(M, G) \to \mathrm{Abb}(M', G).$$
$$f \mapsto f|_{M'}$$

- Klar: R ist Gruppenhomomorphismus

$\Big(\forall x \in M'$: $R(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)|_{M'}(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$= f|_{M'}(x) \cdot g|_{M'}(x) = (f|_{M'} \cdot g|_{M'})(x)$

$= (R(f) \cdot R(g))(x).$

$\Rightarrow R(f \cdot g) = R(f) \cdot R(g). \Big)$

- Klar: R ist surjektiv

$\Big(f \in \mathrm{Abb}(M', G)$. Setze trivial durch $e \in G$ auf M fort $\rightsquigarrow \tilde{f}$

$\Rightarrow R(\tilde{f}) = \tilde{f}|_{M'} = f. \Big)$

- Neutral in $\mathrm{Abb}(M, G)$ ist

$$E: M \to G$$
$$m \mapsto e$$

Neutral in $\mathrm{Abb}(M', G)$ ist

$$E': M' \to G$$
$$m \mapsto e$$

$\Rightarrow N = \mathrm{Kern}(R)$ (wirklich Klar)

- Also (VL): $N \triangleleft \mathrm{Abb}(M, G)$ $(\Rightarrow (i))$

und der Homomorphiesatz liefert

$$\mathrm{Abb}(M, G)/N \simeq \mathrm{Abb}(M', G) \qquad (\Rightarrow (ii))$$

3.4. (i) • Für $a \in G$ sei

$$\tau_a : G \to G$$
$$x \mapsto a x a^{-1}$$

der zugehörige innere Automorphismus. Setze

$$\tau : G \to \mathrm{Inn}(G) \qquad (\text{d.h. } \tau(a) = \tau_a)$$
$$a \mapsto \tau_a$$

$\Rightarrow$ τ ist surjektiv (nach Definition von $\mathrm{Inn}(G)$ ...)

• τ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn

$$\tau_{a \cdot b}(x) = a b x (ab)^{-1} = a b x b^{-1} a^{-1}$$
$$= a\, \tau_b(x)\, a^{-1}$$
$$= \tau_a \circ \tau_b (x) \qquad \Rightarrow \tau_{a \cdot b} = \tau_a \circ \tau_b$$

Also: $\tau(a \cdot b) = \tau_{a \cdot b} = \tau_a \circ \tau_b = \tau(a) \circ \tau(b)$.

• Bestimme Kern:

$$\tau(a) = id_G \Leftrightarrow \forall x \in G : \; a x a^{-1} = x$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in G : \; a x = x a$$
$$\Leftrightarrow a \in Z(G)$$

Also: $\mathrm{Kern}\, \tau = Z(G)$

$\overset{VL}{\Rightarrow}$ $Z(G) \trianglelefteq G$

und der Homomorphiesatz liefert

$$G / Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G).$$

(ii) $\det: GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, denn

- für $x \in \mathbb{R}^*$ ist $A := \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R})$ mit

  $\det(A) \overset{LA}{=} x$, d.h. det ist surjektiv

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ ist aus der Linearen Algebra I bekannt.

Es ist

$$\mathrm{Kern}(\det) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \} = SL(n,\mathbb{R})$$

$$\overset{VL}{\Longrightarrow} \quad SL(n,\mathbb{R}) \trianglelefteq GL(n,\mathbb{R})$$

und der Homomorphiesatz liefert

$$GL(n,\mathbb{R}) / SL(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$$

■