Algebra I, WiSe 2011\2012 – Lösung Blatt 4

4.1. (i) $\forall g \in G$ gilt:

$$g N g^{-1} \underset{N \subset Z(G)}{=} g g^{-1} N = N$$

$$\Rightarrow N \lhd G.$$

(ii) Sei G/N zyklisch und aN ein erzeugendes Element von G/N, d.h.

$$G/N = \{ (aN)^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ a^k N \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Seien $b, c \in G$. Zu zeigen: $b \cdot c = c \cdot b$.

Wegen $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} a^k N = G$ (VL) folgt: $b \in a^k N$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \exists\, z_b \in \mathbb{Z},\ n_b \in N: \quad b = a^{z_b} n_b$$

Analog: $\exists\, z_c \in \mathbb{Z},\ n_c \in N: \quad c = a^{z_c} n_c$.

Damit:

$$b \cdot c = a^{z_b} n_b a^{z_c} n_c \overset{N \subset Z(G)}{=} a^{z_b} a^{z_c} n_c n_b = a^{z_b + z_c} n_c n_b$$
$$= a^{z_c + z_b} n_c n_b = a^{z_c} a^{z_b} n_c n_b \overset{N \subset Z(G)}{=} a^{z_c} n_c a^{z_b} n_b$$
$$= c \cdot b.$$

$\Rightarrow$ G ist abelsch. ∎

4.2. (i) • $[G,G]$ ist Untergruppe von G:

Wegen $[e,e] = e \in [G,G]$ ist $[G,G] \neq \emptyset$.

Seien $A, B \in [G,G]$. Zu zeigen: $AB^{-1} \in [G,G]$ (Klar?)

Sei $A = [a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_n, b_n]$

$B = [c_1, d_1] \cdot \ldots \cdot [c_m, d_m]$

Allgemein ist $[x,y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$

$= [y,x]$

Also ist

$$B^{-1} = ([c_1, d_1] \cdot \ldots \cdot [c_m, d_m])^{-1} = [c_m, d_m]^{-1} \cdot \ldots \cdot [c_1, d_1]^{-1}$$

$$= [d_m, c_m] \cdot \ldots \cdot [d_1, c_1]$$

$$\Rightarrow A \cdot B^{-1} = [a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_n, b_n] \cdot [d_m, c_m] \cdot \ldots \cdot [d_1, c_1]$$

d.h. $A \cdot B^{-1} \in [G,G]$ nach Definition.

• $[G,G] \lhd G$, denn:

$$g[a,b]g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = ga\underbrace{g^{-1}g}_{=e}b\underbrace{g^{-1}g}_{=e}a^{-1}\underbrace{g^{-1}g}_{=e}b^{-1}g^{-1}$$

$$= (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1}$$

$$= [gag^{-1}, gbg^{-1}]$$

Damit folgt für ein beliebiges Produkt:

$$g[a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_n, b_n]g^{-1} = g[a_1, b_1]g^{-1} \cdot g[a_2, b_2]g^{-1} \cdot \ldots \cdot g[a_n, b_n]g^{-1}$$

$\overset{\text{s.o.}}{=} [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}] \cdot \ldots \cdot [ga_ng^{-1}, gb_ng^{-1}] \in [G,G]$.

Also: $\forall g \in G$ ist $g[G,G]g^{-1} \subset [G,G]$

$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} [G,G] \trianglelefteq G$.

(ii) „$\Rightarrow$": Sei G/N abelsch.

Seien $a,b \in G$. Dann (in G/N):

$$(a^{-1}b^{-1})N = a^{-1}N\, b^{-1}N \underset{G/N \text{ abel.}}{=} b^{-1}N\, a^{-1}N = (b^{-1}a^{-1})N$$

$$\overset{\text{VL}}{\Rightarrow} \underbrace{(b^{-1}a^{-1})^{-1} a^{-1}b^{-1}}_{= aba^{-1}b^{-1}} \in N$$

Also: $\forall a,b \in G$ ist $[a,b] \in N$.

Ist $A \in [G,G]$ beliebig $\Rightarrow A = \underbrace{[a_1,b_1]}_{\in N} \cdot \ldots \cdot \underbrace{[a_n,b_n]}_{\in N} \in N$

$\Rightarrow [G,G] \subset N$.

„$\Leftarrow$": Gelte $[G,G] \subset N$. Seien $a,b \in G$.

Zu zeigen: $aN\,bN = bN\,aN$.

$\Leftrightarrow (ab)N = (ba)N$

$\overset{\text{VL}}{\Leftrightarrow} (ba)^{-1}(ab) \in N$

$\Leftrightarrow a^{-1}b^{-1}ab \in N$.

Nach Voraussetzung ist $[a^{-1},b^{-1}] \in [G,G] \subset N$, d.h.

$N \ni [a^{-1},b^{-1}] = a^{-1}b^{-1}ab$.

$\Rightarrow G/N$ ist abelsch. $\blacksquare$

4.3.

- $|X| < \infty \Rightarrow$ Operation liefert endlich viele Bahnen. Seien K deren Anzahl und $x_1, \dots, x_K$ Repräsentanten der Bahnen.

- $\forall x \in X$ ist (vgl. VL): $[G : \mathrm{Stab}(x)] = |B(x)|$

$$\Rightarrow \quad |G| \underset{\text{Lagrange}}{=} [G : \mathrm{Stab}(x)] \cdot |\mathrm{Stab}(x)| = |B(x)| \cdot |\mathrm{Stab}(x)|$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \text{ ist } |\mathrm{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|B(x)|} \qquad (*)$$

- Wir berechnen nun:

$$\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \underset{\substack{\text{Bahnen sind} \\ \text{Zerlegung v. } X!}}{=} \sum_{i=1}^{K} \sum_{x \in B(x_i)} |\mathrm{Stab}(x)|$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{K} \sum_{x \in B(x_i)} \frac{|G|}{|B(x)|}$$

$$\overset{B(x) = B(x_i)\ \forall x \in B(x_i)}{=} |G| \cdot \sum_{i=1}^{K} \sum_{x \in B(x_i)} \frac{1}{|B(x_i)|}$$

$$= \dots$$

Es ist

$$\sum_{x \in B(x_i)} \frac{1}{|B(x_i)|} = |B(x_i)| \cdot \frac{1}{|B(x_i)|} = 1$$

also können wir weiterrechnen:

$$\dots = |G| \cdot \sum_{i=1}^{K} 1 = |G| \cdot K$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

$\blacksquare$

4.4. (i) Sei die Abbildung mit $\circ$ bezeichnet, d.h.

$$\circ : G \times \hat{X} \to \hat{X}$$
$$(g, H) \mapsto g \circ H := gHg^{-1}.$$

- $\circ$ ist wohldefiniert, da $\forall g \in G$

$$\tau_g : G \to G, \quad x \mapsto gxg^{-1}$$

ein Automorphismus ist, d.h. ist $H \in \hat{X}$, so ist

$$gHg^{-1} = \tau_g(H) \subset G$$

Untergruppe und damit $gHg^{-1} \in \hat{X}$.

- $\circ$ ist Gruppenoperation, denn:

- $e \in G$ neutral, $H \in \hat{X}$, dann:

$$e \circ H = eHe^{-1} = H$$

- Sind $a, b \in G$, $H \in \hat{X}$, dann:

$$(ab) \circ H = (ab)H(ab)^{-1} = a \underbrace{bHb^{-1}}_{b \circ H} a^{-1}$$

$$= a(b \circ H)a^{-1}$$

$$= a \circ (b \circ H).$$

(ii) $B(H) = \{H\} \iff \forall g \in G$ ist $g \circ H = H$

$$\iff \forall g \in G \text{ ist } gHg^{-1} = H$$

$$\overset{VL}{\iff} H \lhd G.$$

(iii). Sei X Menge der Untergruppen von G.

$|G| = p^n < \infty \Rightarrow |X| < \infty$.

Aus (ii) folgt: $H \in X$ ist kein Normalteiler, genau dann, wenn

$$|\mathcal{B}(H)| > 1 .$$

d.h. die Untergruppen, welche keine Normalteiler sind liegen genau in den Bahnen mit Länge > 1. Seien $H_1, \dots, H_k$ Repräsentanten dieser Bahnen und z die Anzahl der Untergruppen, welche kein Normalteiler sind (d.h. $z = |X| - |\{\text{Normalteiler}\}|$)

$$\Rightarrow \quad z = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{B}(H_i)|$$

- Sei nun $j \in \{1, \dots, k\}$. Nach Vorlesung ist $|\mathcal{B}(H_j)| = [G : \mathrm{Stab}(H_j)]$, d.h.

$$[G : \mathrm{Stab}(H_j)] > 1 .$$

Nach Lagrange folgt

$$[G : \mathrm{Stab}(H_j)] \mid |G| = p^n .$$

Zusammen ergibt sich: $p \mid [G : \mathrm{Stab}(H_j)] \quad (= |\mathcal{B}(H_j)|)$

Also: $\forall j \in \{1, \dots, k\}$ ist $p \mid |\mathcal{B}(H_j)|$. $\quad (*)$

- Wegen $z = \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{B}(H_i)|$ folgt mit $(*)$:

$$p \mid z .$$

$\blacksquare$