# Algebra I, WiSe 2011\2012 – Lösung Blatt 5

**5.1.** Wir zeigen zunächst:

$$\mathrm{Stab}(g\circ x) = g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1} \quad \forall g\in G,\ \forall x\in X \qquad (*)$$

Dazu: „$\supseteq$": Sei $f\in g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}$.

$\Rightarrow \exists\, h\in \mathrm{Stab}(x)$ mit $f = ghg^{-1}$.

Es ist

$$f\circ(g\circ x) = (f\cdot g)\circ x = (ghg^{-1}g)\circ x = (gh)\circ x$$
$$= g\circ(h\circ x) \underset{h\in\mathrm{Stab}(x)}{=} g\circ x.$$

$\Rightarrow f\in \mathrm{Stab}(g\circ x)$.

„$\subseteq$": Sei $f\in\mathrm{Stab}(g\circ x)$

$$\Rightarrow (g^{-1}fg)\circ x = g^{-1}\circ(f\circ(g\circ x))$$
$$\overset{f\in\mathrm{Stab}(g\circ x)}{=} g^{-1}\circ(g\circ x) = (g^{-1}g)\circ x = e\circ x$$
$$= x$$

$\Rightarrow g^{-1}fg\in\mathrm{Stab}(x)$

$\Rightarrow f\in g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}$.

Damit ist $(*)$ gezeigt. Nun zur Aufgabe:

$$\mathrm{Stab}(x)\vartriangleleft G \iff \forall g\in G:\ g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1} = \mathrm{Stab}(x)$$
$$\overset{(*)}{\iff} \forall g\in G:\ \mathrm{Stab}(g\circ x) = \mathrm{Stab}(x)$$
$$\overset{B(x)=\{g\circ x\mid g\in G\}}{\iff} \forall y\in B(x):\ \mathrm{Stab}(y) = \mathrm{Stab}(x).$$

$\blacksquare$

$\underline{5.2.}$ $\operatorname{ord} \mathcal{S}_4 = 4! = 24 = 3 \cdot 8 = 3 \cdot 2^3$

$\Rightarrow$ Müssen $p=2$ und $p=3$ betrachten. Sei $s_p$ die Anzahl der $p$-Sylowgruppen.

$p=3$:

$\overset{\text{Sylow}}{\Longrightarrow}$ $s_3 \equiv 1 \mod 3$ und $s_3 \mid 8$

d.h. $s_3 \in \{1,4,7,\dots\}$ und $s_3 \in \{1,2,4,8\}$

$\Rightarrow$ $s_3 \in \{1,4\}$

Gruppen der Ordnung 3 sind zyklisch, werden also von einem Element erzeugt.

(In $\mathcal{S}_4$ liegt es nahe als Erzeuger 3-Zykel $(a,b,c)$ mit $a<b<c$ auszuprobieren $\rightsquigarrow$ haben offenbar Ordnung 3...)

$$\langle\{(1\,2\,3)\}\rangle = \{(1\,2\,3), (1\,3\,2), (1)\}$$

$$\langle\{(1\,2\,4)\}\rangle = \{(1\,2\,4), (1\,4\,2), (1)\}$$

$$\langle\{(1\,3\,4)\}\rangle = \{(1\,3\,4), (1\,4\,3), (1)\}$$

$$\langle\{(2\,3\,4)\}\rangle = \{(2\,3\,4), (2\,4\,3), (1)\}$$

Da alle Gruppen verschieden sind, folgt $s_3 = 4$ und obige Untergruppen sind alle 3-Sylowgruppen in $\mathcal{S}_4$.

$p=2$:

$\overset{\text{Sylow}}{\Longrightarrow}$ $s_2 \equiv 1 \mod 2$ und $s_2 \mid 3$

d.h. $s_2 \in \{1,3,\dots\}$ und $s_2 \in \{1,3\}$

$\Rightarrow$ $s_2 \in \{1,3\}$

Suchen Untergruppen von $\mathcal{S}_4$ mit Ordnung 8.

Es ist (rechnen...)

$\langle \{(13), (1234)\} \rangle$

$= \{(1), (1234), (13)\circ(24), (1432), (13), (24), (12)\circ(34), (14)\circ(23)\}$

Untergruppe der Ordnung 8. (Diedergruppe $D_4$)

Andererseits:

$\langle \{(12), (1324)\} \rangle$

$= \{(1), (1324), (12)\circ(34), (1423), (12), (14)\circ(23), (34), (13)\circ(24)\}$

$\langle \{(14), (1342)\} \rangle$

$= \{(1), (1342), (14)\circ(23), (1243), (14), (12)\circ(34), (23), (13)\circ(24)\}$

Dies sind 3 verschiedene Untergruppen der Ordnung 8.

$\Rightarrow s_2 = 3$

$\Rightarrow$ Obige Gruppen sind alle 2-Sylowgruppen. $\blacksquare$

5.3. (i) • Gruppenoperation:

$$G \times G \to G$$
$$(g,x) \mapsto g \circ x := g x g^{-1}$$

$\left( e \circ x = e x e^{-1} = x \quad , \quad (g \cdot h) \circ x = g h x (gh)^{-1} = g (h x h^{-1}) g^{-1} = g \circ h \circ x \right.$
$\left. \Rightarrow \text{Gruppenoperation} \right)$

• Damit: $\mathcal{B}(x) = \{ g \circ x \mid g \in G \} = \{ g x g^{-1} \mid g \in G \}$

Also folgt:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}(x)| = 1 &\Leftrightarrow \mathcal{B}(x) = \{x\} \\
&\Leftrightarrow \forall g \in G \text{ ist } g x g^{-1} = x \\
&\Leftrightarrow \forall g \in G \text{ ist } g x = x g \\
&\Leftrightarrow x \in Z(G).
\end{aligned}
$$

• Sei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ vollständiges Repräsentantensystem für die Bahnen der Operation.

$$\overset{VL}{\Rightarrow} \quad G = \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{B}(x_j) \qquad \text{(disjunkte Vereinigung!)}$$

$$\xrightarrow[\text{disjunkt}]{\text{Vereinigung}} \quad |G| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}(x_j)|$$

• Wegen $e \in Z(G)$ ist $|\mathcal{B}(e)| = 1$. $\Rightarrow e \in \{x_1, \ldots, x_k\}$

OE sei $x_1 = e$.

$$\Rightarrow \quad |G| = 1 + \sum_{j=2}^{k} |\mathcal{B}(x_j)| \qquad (*)$$

$\nearrow$ $Z(G) = \{e\}$

$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ $|B(x_j)| > 1 \quad \forall\ 2 \leq j \leq K$

Nach Vorlesung gilt:

$$|B(x_j)| = [G : \mathrm{Stab}(x_j)] \ \Big| \ |G| = p^n \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}$$

(Lagrange)

$\Longrightarrow$ $|B(x_j)| = p^{l_j} \quad \forall\ 2 \leq j \leq K$ und gewisse $l_j \in \mathbb{N}, l_j \geq 1$

Aus $(*)$ folgt daher:

$$|G| = 1 + \sum_{j=2}^{K} |B(x_j)| = 1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{K} p^{l_j}}_{\equiv 0 \bmod p}$$

$\Longrightarrow$ $|G| \equiv 1 \bmod p.$

Andererseits gilt nach Voraussetzung $|G| = p^n$, d.h.

$|G| \equiv 0 \bmod p$ $\quad ⚡$

$\Longrightarrow$ $\{e\} \subsetneq Z(G)$, d.h. das Zentrum ist nichttrivial.

(ii) • Lagrange $\Longrightarrow$ $|Z(G)| \in \{1, p, p^2\}$.

Da $G$ $p$-Gruppe ist folgt mit (i): $|Z(G)| \neq 1$

$\Longrightarrow$ $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$.

$\nearrow$ $|Z(G)| = p \Longrightarrow Z(G) \subsetneq G$, d.h. $G$ ist nicht abelsch.

Nach Blatt 4, Aufgabe 1 ist $Z(G) \triangleleft G$.

$\Longrightarrow$ $G/Z(G)$ ist Gruppe der Ordnung $p$

$\overset{\text{VL}}{\Longrightarrow}$ $G/Z(G)$ ist zyklisch (p Primzahl)

$\overset{\text{Aufg. 1}}{\underset{\text{Blatt 4}}{\Longrightarrow}}$ $G$ ist abelsch $\lightning$ (siehe oben) ☺

Es muss also $|Z(G)| = p^2 = |G|$ gelten, d.h.

$$Z(G) = G$$

$\Rightarrow$ $G$ ist abelsch (da $Z(G)$ stets abelsch ist). $\blacksquare$

$\underline{5.4.}$ $\operatorname{ord} G = 200 = 8 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^2$

Bezeichne $s_5$ die Anzahl der 5-Sylowgruppen.

$\overset{\text{Sylow}}{\Longrightarrow} \quad s_5 \equiv 1 \mod 5 \quad \text{und} \quad s_5 \mid 8$

d.h. $s_5 \in \{1, 6, 11, \ldots\}$ und $s_5 \in \{1, 2, 4, 8\}$

$\Longrightarrow \quad s_5 = 1$

$\Longrightarrow$ $G$ besitzt genau eine 5-Sylowgruppe $H$.

$\overset{\text{VL}}{\Longrightarrow} \quad H \triangleleft G$ (da $\forall g \in G$ auch $gHg^{-1}$ 5-Sylowgruppe ist, also $\forall g \in G \; gHg^{-1} = H$ gilt.)

Es ist $\operatorname{ord} H = 25 = 5^2$

$\overset{\text{Aufgabe 3(ii)}}{\Longrightarrow}$ $H$ ist abelsch.

Also: $H$ ist ein abelscher Normalteiler in $G$. $\blacksquare$