Algebra I, WiSe 2011\2012 – Lösung Blatt 8

8.1. (i) Mit dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen und Aufgabe 2 (ii) von Blatt 7 ergeben sich wegen $36 = 2^2 \cdot 3^2$ folgende mögliche Klassen (Angabe jeweils eines Repräsentanten):

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$$

(Beachte: • Aufgabe 2 (ii) wurde in abgewandelter Form verwendet: n_1, n_2 teilerfremde natürliche Zahlen, G irgendeine Gruppe, dann

$$G \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \cong G \times \mathbb{Z}/n_1 n_2\mathbb{Z}$$

Denn: Sei $f: \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n_1 n_2\mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus Aufgabe 2 (ii).

Definiere:
$$h: G \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \to G \times \mathbb{Z}/n_1 n_2\mathbb{Z}$$
$$(g, h) \mapsto (g, f(h))$$

Klar: Da id und f Gruppenisomorphismen sind, ist auch h einer.

• Außerdem wurde verwendet:

$$G \times H \cong H \times G$$

und $G_1 \times G_2 \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$.

(bei Bedarf im Tutorium die Isomorphismen hinschreiben!))

(ii) Analog zu (i) mit dem Hauptsatz. Wir schreiben

$$G = G(2) \times G(3) \times G(4)$$

Dann folgt (mit einer offensichtlichen, abkürzenden Notation für Gruppen der Form $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z}$, etc.):

- $G(2)$ Kann von folgendem Typ sein:

  $(2^1, 2^1, 2^1, 2^1, 2^1, 2^1)$; $(2^2, 2^1, 2^1, 2^1, 2^1)$; $(2^2, 2^2, 2^1, 2^1)$;
  $(2^2, 2^2, 2^2)$; $(2^3, 2^1, 2^1, 2^1)$; $(2^3, 2^2, 2^1)$; $(2^3, 2^3)$; $(2^4, 2^1, 2^1)$;
  $(2^4, 2^2)$; $(2^5, 2^1)$; (2^6)

  $\Rightarrow$ 11 mögliche verschiedene (nicht isomorphe) Typen.

- $G(3)$ Kann von folgendem Typ sein:

  $(3^1, 3^1, 3^1, 3^1)$; $(3^2, 3^1, 3^1)$; $(3^2, 3^2)$; $(3^3, 3^1)$; (3^4)

  $\Rightarrow$ 5 verschiedene Typen

- $G(5)$ Kann von folgendem Typ sein:

  $(5^1, 5^1)$; (5^2)

  $\Rightarrow$ 2 verschiedene Typen.

Insgesamt folgt damit:

Es gibt $11 \cdot 5 \cdot 2 = 110$ verschiedene Isomorphieklassen. ∎

8.2. $|G| = 45 = 5 \cdot 3^2$.

$\Rightarrow$ Es gibt eine 3-Sylowgruppe U_3 und eine 5-Sylowgruppe U_5.

~~Das Folgende ist eigentlich überflüssig, da in Aufgabe 2(ii) von Blatt 7 auf die Voraussetzung „Normalteiler" verzichtet werden kann.~~

s_p sei Anzahl der p-Sylowgruppen.

- $s_3 \equiv 1 \mod 3$ und $s_3 \mid 5$

  $(s_3 \in \{1, 4, 7, \ldots\}$ und $s_3 \in \{1, 5\})$

  $\Rightarrow s_3 = 1 \Rightarrow U_3 \lhd G$

- $s_5 \equiv 1 \mod 5$ und $s_5 \mid 9$

  $(s_5 \in \{1, 6, 11, \ldots\}$ und $s_5 \in \{1, 3, 9\})$

  $\Rightarrow s_5 = 1 \Rightarrow U_5 \lhd G$.

Es ist $|U_3| = 9$, $|U_5| = 5$, d.h.

$$|G| = 45 = 5 \cdot 9 = |U_3| \cdot |U_5| \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(|U_3|, |U_5|) = 1$$

$$\overset{\text{A2(i),}}{\underset{\text{Blatt 7}}{\Longrightarrow}} G = U_3 \oplus U_5.$$

- Wegen $|U_5| = 5$ folgt: $U_5 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
- $|U_3| = 9 = 3^2 \overset{\text{A3(ii)}}{\underset{\text{Blatt 5}}{\Longrightarrow}} U_3$ abelsch

$\overset{\text{Hauptsatz}}{\Longrightarrow}$ Entweder $U_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ oder $U_3 \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Damit gilt:

$$G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \underset{\text{A2(ii), Blatt 7}}{\cong} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \quad \text{oder} \quad G \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/45\mathbb{Z}.$$

$\blacksquare$

8.3. (i)

- Sei a Kein Linksnullteiler.

$\lightning$ $b \cdot a \neq 1 \Rightarrow 1 - b \cdot a \neq 0$

$$\overset{a \text{ Kein}}{\underset{\text{LNT}}{\Longrightarrow}} \quad 0 \neq a(1 - b\cdot a) = a - a(ba) = a - \underbrace{(ab)}_{=1}a$$

$$= a - a = 0 \ \lightning$$

$\Rightarrow \quad b \cdot a = 1.$

- Sei b Kein Rechtsnullteiler.

$\lightning$ $b \cdot a \neq 1 \Rightarrow 1 - b \cdot a \neq 0$

$$\overset{b \text{ Kein}}{\underset{\text{RNT}}{\Longrightarrow}} \quad 0 \neq (1 - b\cdot a)b = b - (ba)b = b - b\underbrace{(ab)}_{=1}$$

$$= b - b = 0 \ \lightning$$

$\Rightarrow \quad b \cdot a = 1.$

(ii) Sei $a \in R \setminus \{0\}$.

- Sei a Kein Linksnullteiler.

$\Rightarrow$ $\forall\, b, c \in R$ mit $b \neq c$ folgt $a(b-c) \neq 0$, d.h. $ab \neq ac$

$\Rightarrow$ Linkstranslation l_a mit a (multiplikativ)

$$l_a : R \to R$$
$$b \mapsto ab$$

ist injektiv.

$\overset{R \text{ endlich}}{\Longrightarrow}$ l_a ist bijektiv.

Da $1 \in R$, folgt: $\exists\, b \in R$ mit $l_a(b) = 1$, d.h. $ab = 1$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $b \cdot a = 1$

$\Rightarrow$ a ist Einheit in R.

- Sei a kein Rechtsnullteiler. (völlig analog)

$\Rightarrow$ $\forall\, b, c \in R$ mit $b \neq c$ ist $(b-c)a \neq 0$, d.h. $ba \neq ca$.

$\Rightarrow$ Rechtstranslation r_a mit a

$$r_a : R \longrightarrow R$$
$$b \longmapsto ba$$

ist injektiv

$\overset{R \text{ endlich}}{\Longrightarrow}$ r_a ist bijektiv.

Da $1 \in R$, folgt: $\exists\, b \in R$ mit $r_a(b) = 1$, d.h. $ba = 1$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $ab = 1$

$\Rightarrow$ a ist Einheit in R.

$\blacksquare$

8.4. Orientieren uns am Beweis des Chinesischen Restsatzes und lösen zunächst folgende Systeme:

- $$\left.\begin{aligned} x_2 &\equiv 1 \mod 2 \\ x_2 &\equiv 0 \mod 3 \\ x_2 &\equiv 0 \mod 5 \\ x_2 &\equiv 0 \mod 7 \end{aligned}\right\} \quad (S_2)$$

Suchen also $l, k \in \mathbb{Z}$ mit

$$l \cdot 2 + k \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7) = 1 .$$

Dann ist $x_2 = k \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7)$ eine Lösung (vgl. Beweis).

Dazu: Euklidischer Algorithmus:

$$z_0 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$z_1 = 2$$

$$\Rightarrow z_2 = 1 \qquad \text{und} \qquad z_0 = 52 \cdot z_1 + z_2$$

$$\Rightarrow 1 = z_2 = -52 z_1 + z_0$$

$$= -52 \cdot 2 + 1 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7)$$

Also: $-52 \cdot 2 + 1 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7) = 1$

$\Rightarrow x_2 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ ist eine Lösung von S_2.

- $$\left.\begin{aligned} x_3 &\equiv 0 \mod 2 \\ x_3 &\equiv 1 \mod 3 \\ x_3 &\equiv 0 \mod 5 \\ x_3 &\equiv 0 \mod 7 \end{aligned}\right\} \quad (S_3)$$

Es ist $-23 \cdot 3 + 1 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) = 1$ (analog zu eben)

$\Rightarrow x_3 = 1 \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) = 70$ ist eine Lösung von S_3.

- $x_5 \equiv 0 \mod 2$

  $x_5 \equiv 0 \mod 3$

  $x_5 \equiv 1 \mod 5$ $\qquad (S_5)$

  $x_5 \equiv 0 \mod 7$

  Es ist $17 \cdot 5 - 2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7) = 1$

  $\Rightarrow x_5 = -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = -84$ ist eine Lösung von S_5.

- $x_7 \equiv 0 \mod 2$

  $x_7 \equiv 0 \mod 3$

  $x_7 \equiv 0 \mod 5$ $\qquad (S_7)$

  $x_7 \equiv 1 \mod 7$

  Es ist $13 \cdot 7 - 3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = 1$

  $\Rightarrow x_7 = -3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = -90$ ist eine Lösung von S_7.

Damit folgt nun (vgl. Beweis): Alle Lösungen der simultanen Kongruenzen sind gegeben durch

$$x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 2 + x_5 \cdot 3 + x_7 \cdot 5 + (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)\mathbb{Z}$$

$$= 105 \cdot 1 + 70 \cdot 2 - 84 \cdot 3 - 90 \cdot 5 + 210\mathbb{Z}$$

$$= -457 + 210\mathbb{Z}$$

$$= -457 + 3 \cdot 210 + 210\mathbb{Z}$$

$$= 173 + 210\mathbb{Z}.$$

Also: Die Lösungen sind

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 173 + k \cdot 210 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\}.$$

$\blacksquare$