Algebra I, WiSe 2011\2012 - Lösung Blatt 9

9.1. • Einheitengruppe:

$f \in R$ Einheit $\Leftrightarrow \exists\, g \in R$ mit $f \cdot g = 1$ (Konstante Funktion!)

$\Leftrightarrow \exists\, g \in R$ mit $f(x) \cdot g(x) = 1 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Leftrightarrow f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(„$\Rightarrow$": Klar, „$\Leftarrow$": Analysis I: $\frac{1}{f(x)}$ ist stetig)

Also: Die Einheitengruppe ist

$$\{ f \in R \mid f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \}.$$

• Nullteiler:

Behauptung: Die Menge der Nullteiler ist genau

$$\{ f \in R \setminus \{0\} \mid \exists \text{ Intervall } (c,d) \subset (a,b) \text{ mit } c<d \text{ und } f(x)=0 \ \forall x \in (c,d) \}$$

Beweis:

„$\subset$": Sei $f \in R$ Nullteiler. ($\Rightarrow f \neq 0$)

$\Rightarrow \exists\, g \in R \setminus \{0\}$ mit $f \cdot g = 0$ (0: jeweils Konstante Funktion!

d.h. $f(x) \cdot g(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Da $g \neq 0$ ist, $\exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $g(x_0) \neq 0$.

g stetig $\overset{\text{Analysis}}{\Longrightarrow} \exists$ offene Umgebung $x_0 \in U$ mit $g(x) \neq 0 \ \forall x \in U$

$\Rightarrow \exists\, (c,d) \subset U \subset (a,b)$ mit $c<d$ und $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (c,d)$.

Wegen $f(x) \cdot g(x) = 0$ muss dann aber $f(x) = 0 \quad \forall x \in (c,d)$

gelten.

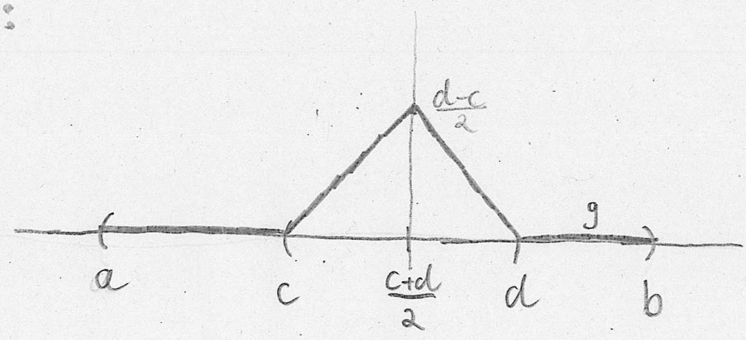
„⊃": Sei $f \in R \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0 \quad \forall x \in (c,d) \subset (a,b)$ mit $c<d$.

Definiere $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (a,c] \\ x-c & \text{für } x \in (c, \frac{c+d}{2}] \\ -x+d & \text{für } x \in (\frac{c+d}{2}, d) \\ 0 & \text{für } x \in [d,b) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ g ist stetig, d.h. $g \in R$, $g \neq 0$ (wegen $c<d$).

Anschauung:



Klar: Auf (a,b) gilt: $f(x) \cdot g(x) = 0$

$\Rightarrow$ f ist Nullteiler. ∎

9.2.

- Eindeutigkeit. Sei $\tilde{\varphi} : R_S \to K$ gegeben mit

$$\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$$

Seien $r \in R$ und $s \in S = R \setminus \{0\}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right) \cdot \varphi(s) &= \tilde{\varphi}\left(\frac{r}{1} \cdot \left(\frac{s}{1}\right)^{-1}\right) \cdot \varphi(s) \\
&= \tilde{\varphi}\left(\iota(r) \cdot \iota(s)^{-1}\right) \tilde{\varphi}(\iota(s)) \\
&= \tilde{\varphi}\left(\iota(r) \cdot \iota(s)^{-1} \cdot \iota(s)\right) \\
&= \tilde{\varphi}(\iota(r)) \\
&= \varphi(r).
\end{aligned}$$

Da $s \in R \setminus \{0\}$ und φ injektiv, ist $\varphi(s) \neq 0$, d.h. $\varphi(s) \in K^*$. Damit folgt:

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right) = \varphi(r) \cdot \varphi(s)^{-1}$$

also ist $\tilde{\varphi}$ eindeutig (wenn es überhaupt existiert, ist es durch diese Formel gegeben).

- Existenz. Wir haben keine Wahl und definieren daher

$$\tilde{\varphi} : R_S \to K, \quad \frac{r}{s} \mapsto \varphi(r) \cdot \varphi(s)^{-1}.$$

Müssen zeigen, dass $\tilde{\varphi}$ wohldefiniert und ein Homomorphismus ist:

Wohldefiniertheit: Gelte für $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} \in R_S$

$$\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}, \quad \text{d.h.} \quad rs' = r's.$$

$\Rightarrow \varphi(r)\varphi(s') = \varphi(rs') = \varphi(r's) = \varphi(r')\varphi(s)$

$\Rightarrow \varphi(r)\varphi(s)^{-1} = \varphi(r')\varphi(s')^{-1}$

Also:

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1} = \varphi(r')\varphi(s')^{-1} = \tilde{\varphi}\left(\frac{r'}{s'}\right)$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ ist wohldefiniert.

Homomorphismus:

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'}\right) = \tilde{\varphi}\left(\frac{rs' + r's}{ss'}\right) = \varphi(rs' + r's)\,\varphi(ss')^{-1}$$

$$= \big(\varphi(r)\varphi(s') + \varphi(r')\varphi(s)\big)\varphi(s)^{-1}\varphi(s')^{-1}$$

$$= \varphi(r)\varphi(s)^{-1} + \varphi(r')\varphi(s')^{-1}$$

$$= \tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right) + \tilde{\varphi}\left(\frac{r'}{s'}\right)$$

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s}\cdot\frac{r'}{s'}\right) = \tilde{\varphi}\left(\frac{rr'}{ss'}\right) = \varphi(rr')\varphi(ss')^{-1} = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}\varphi(r')\varphi(s')^{-1}$$

$$= \tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right)\cdot\tilde{\varphi}\left(\frac{r'}{s'}\right)$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ Homomorphismus, Klar: $\tilde{\varphi}(\iota(r)) = \tilde{\varphi}\left(\frac{r}{1}\right) = \varphi(r)\varphi(1)^{-1} = \varphi(r)$.

(Beachte bei allen Rechnungen: R Integritätsbereich, d.h. insb. Multiplikation ist kommutativ !) ∎

(**Bemerkung:** Die Aufgabe zeigt, dass R_S der kleinste Körper ist, in den R sich einbetten lässt, da jede Einbettung $R \hookrightarrow K$ durch R_S faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & K \\ & R_S \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

)

9.3. (i) R ist Unterring:

- Zeige: Additive Untergruppe.

  $R \neq \emptyset$, denn $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$.

  Sind $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$, dann:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 0 & a-c \end{pmatrix} \in R$$

  $\Rightarrow$ additive Untergruppe

- Da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ muss nur noch gezeigt werden: R abgeschlossen bezüglich Multiplikation. Seien dazu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R.$$

  Dann:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} \in R.$$

$\Rightarrow$ R ist ein Unterring mit Eins.

R ist Kommutativ, denn sind $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$, dann:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb+da \\ 0 & ca \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ K \text{ Körper}}}{=} \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

(ii) • Einheitengruppe von R:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R$ Einheit

$$\Longleftrightarrow \exists \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \text{ mit } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Lineare Algebra}}{\Longleftrightarrow} \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 \neq 0$$

$$\underset{\text{Nullteilerfrei}}{\overset{K \text{ Körper, also}}{\Longleftrightarrow}} \quad a \neq 0$$

(Invers ist in diesem Fall $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in R$)

$\Rightarrow$ Einheitengruppe ist $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; a \in K \setminus \{0\},\, b \in K \right\}$.

• Menge der Nullteiler:

Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R$. Ist $a \neq 0 \Rightarrow$ Einheit $\Rightarrow$ Kein Nullteiler.

Einzige Möglichkeiten für Nullteiler sind also $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$.

Für beliebiges $b \in K$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also: Die Menge der Nullteiler ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; b \in K \right\}.$$

(iii) Für $b \in K$ mit $b \neq 0$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^n + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R[X]$$

Einheit, denn:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^n + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(-\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^n + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ vgl. (ii)}} X^{2n} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^n - \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X^n + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

9.4. Definiere:

- $\varphi: R[X] \to R, \quad f \mapsto f(a)$ „Auswertungshomomorphismus"

(Homomorphismus, denn sei $f = \sum a_k X^k$, $g = \sum b_k X^k$.

$$\Rightarrow \varphi(f+g) = \varphi\left(\sum (a_k + b_k) X^k\right) = \sum (a_k + b_k) a^k$$
$$= \sum a_k a^k + \sum b_k a^k$$
$$= \varphi(f) + \varphi(g).$$

$$\varphi(f \cdot g) = \varphi\left(\sum \left(\sum_{m+n=k} a_m b_n\right) X^k\right) = \sum \left(\sum_{m+n=k} a_m b_n\right) a^k$$
$$= \left(\sum a_k a^k\right) \cdot \left(\sum b_k a^k\right)$$
$$= \varphi(f) \cdot \varphi(g)$$
)

- Sei $f \in R[X]$. Division mit Rest durch $(X-a)$ liefert:

$\exists\, q, r \in R[X]$, $\deg r < \deg(X-a) = 1$ oder $r = 0$ mit

$$f = (X-a) \cdot q + r$$

Also: $\exists\, q, r \in R[X]$, r „Konstantes" Polynom mit

$$f = (X-a) \cdot q + r.$$

Wegen $f(a) = (a-a) \cdot q(a) + r(a) = r(a)$ folgt:

$f(a) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow f = q \cdot (X-a)$ für ein $q \in R[X]$

$\Leftrightarrow f \in (X-a) = \mathfrak{a}$ (Ideal!)

- Damit folgt:

$$\mathrm{Kern}\,\varphi = \{ f \in R[X] \mid f(a) = 0 \} = \mathfrak{U}$$

Der Homomorphiesatz liefert also

$$R[X]/\mathfrak{U} \cong R$$

und $\overline{\varphi} : R[X]/\mathfrak{U} \longrightarrow R$, $[f] \longmapsto f(a)$ ist ein Isomorphismus.

$\blacksquare$