Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Hans Peter Schlickewei
Dipl.-Math. Thomas Geiger

Klausur zur Vorlesung ALGEBRA im Wintersemester 2011/2012
Donnerstag, den 02.02.2012, 08.00 – 10.00 Uhr

☐ Frau ☐ Herr

Name: Musterlösung

Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

☐ Diese Klausur ist mein letzter Prüfungsversuch im Modul Algebra.

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen!
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen sollten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

VIEL ERFOLG!

A1	A2	A3	A4	$\sum$
4	4	3	4	15

1. (i) Sei $(A, \oplus)$ die abelsche Gruppe der reellen Zahlen x mit $0 \leq x < 1$ und mit der durch

$$x \oplus y := \begin{cases} x+y & \text{falls } x+y<1 \\ x+y-1 & \text{falls } x+y \geq 1 \end{cases}$$

definierten Addition. Bestimmen Sie die Torsionsuntergruppe A_t von A.
Es ist *nicht* nachzurechnen, daß $(A, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G mit ord $G = \infty$, in welcher das neutrale Element e das einzige Element endlicher Ordnung ist.

(iii) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G mit ord $G = \infty$, in welcher jedes Element endliche Ordnung besitzt.

(iv) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G, welche unendlich viele Elemente endlicher Ordnung und unendlich viele Elemente unendlicher Ordnung enthält.

(i) Offenbar ist A ein vollständiges Repräsentanten-system für die Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, und $\oplus$ ist die Addition in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, eingeschränkt auf diese Repräsentanten. $\Rightarrow$ $A \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Sei $\bar{a} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit einem Repräsentanten $a \in \mathbb{R}$. Dann:

$\bar{a}$ hat endliche Ordnung

$\Leftrightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n\bar{a} = \bar{0}$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $na \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, z \in \mathbb{Z}$ mit $na = z$

$\Leftrightarrow$ $a = \frac{z}{n}$ für gewisse $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Reduktion modulo $\mathbb{Z}$ liefert daher:

Eine Restklasse $\bar{a}$ ist von endlicher Ordnung, genau dann, wenn sie einen Repräsentanten

$$a = \frac{z}{n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{Z},\ 0 \leq z < n$$

besitzt. Also folgt für die Torsionsuntergruppe von A:

$$A_t = \left\{ \frac{z}{n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{Z},\ 0 \leq z < n \right\}$$
$$= A \cap \mathbb{Q} \quad .$$

(ii) $G = (\mathbb{Z}, +)$

(iii) $(A_t, \oplus)$ aus Teil (i) ist eine Gruppe unendlicher Ordnung und als Torsionsuntergruppe besitzt jedes Element endliche Ordnung.

(iv) $(A, \oplus)$ aus Teil (i), denn die Torsionsuntergruppe ist die unendliche Gruppe $A \cap \mathbb{Q}$ und entsprechend besitzen alle $a \in A$ mit a irrational unendliche Ordnung (davon gibt es unendlich viele in A!).

$\blacksquare$

2. Zeigen Sie: Das Ideal $(2, X)$ ist maximal in $\mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{Z}[X]/(2, X)$$

explizit.

- Sei $f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$.

  Dann gilt

  $$f(X) \equiv a_0 \mod (2, X)$$

  denn $a_1 X + \ldots + a_n X^n = (a_1 + \ldots + a_n X^{n-1}) X \in (2, X)$.

  $\Rightarrow$ Jede Restklasse in $\mathbb{Z}[X]/(2,X)$ besitzt einen Repräsentanten $a \in \mathbb{Z}$.

- Sei $a \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[X]$. Dann folgt:

  Ist a gerade $\Rightarrow a = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, d.h. $a \in (2, X)$

  $$\Rightarrow a \equiv 0 \mod (2, X)$$

  Ist a ungerade $\Rightarrow a = 1 + 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

  $$\Rightarrow a \equiv 1 \mod (2, X).$$

  $\Rightarrow$ Jede Restklasse in $\mathbb{Z}[X]/(2,X)$ kann durch 0 oder $1 \in \mathbb{Z}$ repräsentiert werden.

- Da $1 \notin (2, X)$ ist, folgt

  $$\mathbb{Z}[X]/(2,X) = \{\bar{0}, \bar{1}\} \quad \text{mit } \bar{0} \neq \bar{1}$$

Also ist $\mathbb{Z}[X]/(2,X)$ ein zweielementiger Ring mit Eins (da $\mathbb{Z}[X]$ ein Ring mit Eins ist).

$$\Rightarrow \quad \mathbb{Z}[X]/(2,X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Da $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein Körper ist, ist auch $\mathbb{Z}[X]/(2,X)$ ein Körper und $(2,X)$ nach Vorlesung ein maximales Ideal. $\blacksquare$

3. Sei G eine Gruppe der Ordnung 51. Zeigen Sie:

(i) G besitzt zwei nichttriviale Normalteiler.

(ii) G ist zyklisch.

(i) $51 = 3 \cdot 17$.

Sei s_3 die Anzahl der 3-Sylowgruppen in G und s_{17} die Anzahl der 17-Sylowgruppen.

Mit den Sylowsätzen folgt:

$$s_3 \equiv 1 \mod 3, \quad s_3 \mid 17 \quad \Rightarrow \quad s_3 = 1$$
$$s_{17} \equiv 1 \mod 17, \quad s_{17} \mid 3 \quad \Rightarrow \quad s_{17} = 1$$

Sei U_3 die 3-Sylowgruppe in G und U_{17} die 17-Sylowgruppe. Dann:

$$s_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad U_3 \lhd G$$
$$s_{17} = 1 \quad \Rightarrow \quad U_{17} \lhd G$$

Also gibt es zwei nichttriviale Normalteiler in G.

(ii) U_3, U_{17} aus (i) sind Normalteiler in G mit

- $\operatorname{ord} G = 51 = 3 \cdot 17 = \operatorname{ord} U_3 \cdot \operatorname{ord} U_{17}$
- $\operatorname{ggT}(\operatorname{ord} U_3, \operatorname{ord} U_{17}) = \operatorname{ggT}(3, 17) = 1$

Mit Übungsaufgabe 7.2 folgt daher:

$$G = U_3 \oplus U_{17} \cong U_3 \times U_{17} \underset{\text{3, 17 Primzahlen}}{\cong} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \cong \underset{\text{zyklische Gruppe}}{\mathbb{Z}/51\mathbb{Z}}$$

■

4. Sei R ein ZPE-Ring. Zeigen Sie: Zu jedem Hauptideal (a) in R mit $(a) \neq (0)$ gibt es nur endlich viele Hauptideale (b), welche $(a) \subset (b)$ erfüllen.

Sei $(a) \subset R$ Ideal mit $(a) \neq (0)$.

- Ist a eine Einheit, so ist $(a) = R$ und damit enthält nur das Ideal $R = (1)$ das Ideal (a).
- Sei also a keine Einheit.

$\xRightarrow[\text{ZPE-Ring}]{R \text{ ist}}$ $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ wobei $p_1, \ldots, p_r \in R$ Primelemente sind (nicht notwendig verschieden).

Sei nun (b) für $b \in R$ ein Hauptideal mit $(a) \subset (b)$.

$\Rightarrow$ $a \in (b)$, d.h. $\exists\, c \in R$ mit $a = b \cdot c$, also

$$b \cdot c = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$$

Da R ein ZPE-Ring ist und die p_i Primelemente sind, gibt es eine Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, r\}$ und eine Einheit $\varepsilon \in R$, so dass gilt:

$$b = \varepsilon \cdot \prod_{i \in I} p_i$$

$$\left(c = \varepsilon^{-1} \cdot \prod_{i \in \{1, \ldots, r\} \setminus I} p_i \right)$$

Damit folgt:

Die einzigen Hauptideale (b) in R, für welche

$$(a) \subset (b)$$

gelten kann, sind gegeben durch

$$\left(\prod_{i \in I} p_i \right)$$

wobei I die Teilmengen von $\{1, \ldots, r\}$ durchläuft.

$\Rightarrow$ Es gibt höchstens 2^r Hauptideale (b) in R mit $(a) \subset (b)$, d.h. auf jeden Fall nur endlich viele. $\blacksquare$