

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Hans Peter Schlickewei
Dipl.-Math. Thomas Geiger

Klausur zur Vorlesung ALGEBRA im Wintersemester 2011/2012
Donnerstag, den 02.02.2012, 08.00 – 10.00 Uhr

Frau Herr

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Diese Klausur ist mein letzter Prüfungsversuch im Modul Algebra.

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen!
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter der Aufgabenstellung und auf der Rückseite des Aufgabenblattes nicht ausreichen sollten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

VIEL ERFOLG!

A1	A2	A3	A4	Σ
4	4	3	4	15

Aufgabe 1.*(4 Punkte)*

- (i) Sei (A, \oplus) die abelsche Gruppe der reellen Zahlen x mit $0 \leq x < 1$ und mit der durch

$$x \oplus y := \begin{cases} x + y & \text{falls } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{falls } x + y \geq 1 \end{cases}$$

definierten Addition. Bestimmen Sie die Torsionsuntergruppe A_t von A . Es ist *nicht* nachzurechnen, daß (A, \oplus) eine abelsche Gruppe ist.

- (ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G mit $\text{ord } G = \infty$, in welcher das neutrale Element e das einzige Element endlicher Ordnung ist.
- (iii) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G mit $\text{ord } G = \infty$, in welcher jedes Element endliche Ordnung besitzt.
- (iv) Geben Sie ein Beispiel für eine Gruppe G , welche unendlich viele Elemente endlicher Ordnung und unendlich viele Elemente unendlicher Ordnung enthält.

Aufgabe 2.*(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Das Ideal $(2, X)$ ist maximal in $\mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{Z}[X]/(2, X)$$

explizit.

Aufgabe 3.*(3 Punkte)*

Sei G eine Gruppe der Ordnung 51. Zeigen Sie:

- (i) G besitzt zwei nichttriviale Normalteiler.
- (ii) G ist zyklisch.

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Sei R ein ZPE-Ring. Zeigen Sie: Zu jedem Hauptideal (a) in R mit $(a) \neq (0)$ gibt es nur endlich viele Hauptideale (b) , welche $(a) \subset (b)$ erfüllen.

Schmierblatt

Schmierblatt

Schmierblatt