Wintersemester 2011/2012

## 12. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 26.01.2012, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Zeigen Sie: Nicht jeder ZPE-Ring ist ein Hauptidealring.

   *Anleitung:* Untersuchen Sie im Polynomring $R[X]$ über einem Integritätsbereich $R$ das Ideal $(a, X)$, wo $a \in R \setminus \{0\}$ keine Einheit sei.

2. Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

   (i) $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$

   (ii) $X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

   (iii) $X^3 + 39X^2 - 4X + 8 \in \mathbb{Q}[X]$

   (iv) $X^5 - 2X^4 + 6X + 10 \in \mathbb{Q}[X]$

   (v) $X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]$

3. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f_n(X) = X^3 + nX^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{Z}$, für welche $f_n(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$ reduzibel ist.

4. Sei $K$ ein Körper. Im Polynomring $K[X]$ sei $f(X)$ ein irreduzibles Polynom.

   (i) Zeigen Sie: $K[X]/(f(X))$ ist ein Körper.

   (ii) Seien in (i) $K$ ein endlicher Körper mit $q$ Elementen und $f$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $n$. Wieviele Elemente enthält der Körper $K[X]/(f(X))$?

   (iii) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad $\leq 2$.

   (iv) Konstruieren Sie mit (ii) einen Körper mit 4 Elementen und geben Sie die Verknüpfungstafeln an.