Wintersemester 2011/2012

3. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 10.11.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei G eine Gruppe, welche eine Untergruppe H vom Index 2 besitzt. Zeigen Sie: Die Elemente ungerader Ordnung in G erzeugen eine echte Untergruppe von G.

   Anleitung: Benutzen Sie Aufgabe 3 von Übungsblatt 2.

2. Bestimmen Sie den Verband der Untergruppen der additiven Gruppe $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$. Geben Sie insbesondere für jede dieser Untergruppen ein erzeugendes Element in $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$ an.

3. Seien M eine nichtleere Menge und $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. $\mathrm{Abb}\,(M, G)$ sei die Gruppe der Abbildungen $f : M \to G$ mit der durch
$$(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad x \in M$$
   definierten Verknüpfung $\circ$. Sei M' eine nichtleere Teilmenge von M. Zeigen Sie:

   (i) $N = \{f \in \mathrm{Abb}\,(M, G) \mid f(x) = e \ \forall x \in M'\}$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{Abb}\,(M, G)$.

   (ii) Es ist $\mathrm{Abb}\,(M, G)/N \simeq \mathrm{Abb}\,(M', G)$.

4. (i) In einer Gruppe G heißt die Menge
$$Z(G) = \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z \ \forall g \in G\}$$
   Zentrum von G. Mit $\mathrm{Inn}(G)$ bezeichnen wir die Gruppe der inneren Automorphismen von G. Zeigen Sie, daß
$$Z(G) \lhd G \qquad \text{und} \qquad G/Z(G) \simeq \mathrm{Inn}(G)$$
   gilt.

Bitte wenden!

(ii) Sei $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Gruppe der n-reihigen, regulären, reellen Matrizen (mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung). Sei

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Sei weiter $\mathbb{R}^*$ die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$$

gilt.