Wintersemester 2011/2012

4. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 17.11.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G (vergleiche Blatt 3, Aufgabe 4). Sei N eine Untergruppe von G mit $N \subset Z(G)$. Zeigen Sie:
   (i) $N \triangleleft G$
   (ii) Ist ${}^{G}\!/_{N}$ zyklisch, so ist G abelsch.

2. Sei G eine Gruppe. Für Elemente $a, b \in G$ heißt $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ der Kommutator von a und b. Sei $[G, G]$ die Menge der endlichen Produkte der Kommutatoren aus G. Zeigen Sie:
   (i) $[G, G] \triangleleft G$
   (ii) Für einen Normalteiler N in G gilt:
   $$ {}^{G}\!/_{N} \text{ abelsch} \iff N \supset [G, G] $$

3. Seien G eine endliche Gruppe und X eine endliche Menge. G operiere auf X. Zeigen Sie: Die Anzahl der Bahnen der Operation ist
   $$ \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \, . $$

4. Seien G eine Gruppe und X die Menge der Untergruppen von G. Zeigen Sie:
   (i) Durch
   $$ (g, H) \mapsto gHg^{-1} \qquad (g \in G, H \in X) $$
   wird eine Operation von G auf X definiert.
   (ii) Für ein Element $H \in X$ gilt:
   $$ B(H) = \{H\} \iff H \triangleleft G $$
   (iii) Sei p eine Primzahl und gelte $|G| = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann unterscheidet sich die Anzahl der Untergruppen von G von der Anzahl der Normalteiler von G um ein Vielfaches von p.