Wintersemester 2011/2012

6. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 01.12.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Sei G eine endliche Gruppe. Seien p eine Primzahl und H eine p-Untergruppe von G. Zeigen Sie: Gilt $H \triangleleft G$, so ist H in jeder p-Sylowgruppe von G enthalten.

2. Zeigen Sie:
   (i) Jede Gruppe G der Ordnung 30 besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.
   (ii) Jede Gruppe G der Ordnung 56 besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.

3. Sei $(\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Zeigen Sie:
   (i) Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ mit $|M| \geq 2$, so ist M nicht frei.
   (ii) $(\mathbb{Q}, +)$ ist nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$.
   (iii) $(\mathbb{Q}, +)$ ist keine freie abelsche Gruppe.

4. Seien G eine endliche Gruppe, U eine Untergruppe von G und ${}^{G}\!/_{U}$ die Menge der Linksnebenklassen $\overline{h} = hU$ $(h \in G)$. Sei weiter $\mathfrak{T}\left({}^{G}\!/_{U}\right)$ die Gruppe der Permutationen von ${}^{G}\!/_{U}$. Zeigen Sie:
   (i) Durch $\varphi : G \to \mathfrak{T}\left({}^{G}\!/_{U}\right)$ mit $\varphi(g)(\overline{h}) = \overline{gh}$ $(g, h \in G)$ wird ein Homomorphismus definiert, und es gilt $\operatorname{Kern}(\varphi) \subset U$.
   (ii) Mit $m = [G : U]$ gilt: $m \mid [G : \operatorname{Kern}(\varphi)]$ und $[G : \operatorname{Kern}(\varphi)] \mid m!$
   (iii) Jede Gruppe der Ordnung 36 besitzt einen nichttrivialen Normalteiler.

   Anleitung: Wenden Sie (i) und (ii) an, wobei U eine 3-Sylowgruppe sei.