Wintersemester 2011/2012

7. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 08.12.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Begründen Sie oder widerlegen Sie direkt (ohne die Ergebnisse aus §10 der Vorlesung zu benutzen) die folgenden Aussagen:
   (i) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
   (ii) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
   (iii) $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
   (iv) $\mathfrak{S}_3 \simeq D_3$ (Diedergruppe)

2. (i) Sei G eine endliche Gruppe, und seien U_1 und U_2 Normalteiler in G. Es gelte $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} U_1 \cdot \operatorname{ord} U_2$ und $(\operatorname{ord} U_1, \operatorname{ord} U_2) = 1$. Zeigen Sie:
   $$G = U_1 \oplus U_2.$$
   (ii) Seien n_1 und n_2 teilerfremde natürliche Zahlen. Zeigen Sie:
   $$\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$$

3. Sei I eine nichtleere Menge. Für jedes $i \in I$ seien G_i eine Gruppe und N_i ein Normalteiler in G_i. Wir definieren
   $$\prod_{i\in I} G_i := \{(g_i)_{i\in I} \mid g_i \in G_i \ \forall i \in I\}.$$
   Mit der komponentenweisen Verknüpfung ist $\prod_{i\in I} G_i$ eine Gruppe. Zeigen Sie:
   (i) $\prod_{i\in I} N_i \triangleleft \prod_{i\in I} G_i$
   (ii) $\left(\prod_{i\in I} G_i\right) \Big/ \left(\prod_{i\in I} N_i\right) \simeq \prod_{i\in I} \left(G_i/N_i\right)$

4. (i) Zeigen Sie: $\left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +\right)$ ist eine Torsionsgruppe.
   (ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung n in $\left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +\right)$. Bestimmen Sie diese Untergruppe.