Wintersemester 2011/2012

## 9. Übungsblatt zur Algebra

Abgabe: Do, 22.12.2011, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

1. Seien $a$, $b$ reelle Zahlen mit $a < b$. Sei $R$ der Ring der stetigen Funktionen
$$f : (a, b) \to \mathbb{R}.$$
Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $R$, und charakterisieren Sie die Menge der Nullteiler in $R$.

2. Sei $R$ ein Integritätsbereich. Sei $S = R \setminus \{0\}$. Für ein Paar $(r, s) \in R \times S$ sei $\frac{r}{s}$ die von $(r, s)$ repräsentierte Äquivalenzklasse in $R_S$. Sei
$$\iota : R \to R_S$$
durch $\iota(r) = \frac{r}{1}$ definiert. Zeigen Sie: Ist $K$ ein Körper, und ist
$$\varphi : R \to K$$
ein injektiver Ringhomomorphismus, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\widetilde{\varphi} : R_S \to K$ mit
$$\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi.$$

3. Sei $K$ ein Körper. Sei $\mathfrak{M}(2, K)$ der Ring der $2\times2$-Matrizen mit Koeffizienten aus $K$.
   (i) Zeigen Sie: Die Menge der Matrizen der Gestalt
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
   bildet einen kommutativen Unterring $R$ mit Eins in $\mathfrak{M}(2, K)$.
   (ii) Bestimmen Sie die Menge der Nullteiler und die Einheitengruppe von $R$.
   (iii) Zeigen Sie: Im Polynomring $R[X]$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad $n$, welches eine Einheit ist.

Bitte wenden!

4. Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Sei $a \in R$ und $\mathfrak{a}$ das vom Polynom $X - a$ erzeugte Ideal in $R[X]$. Zeigen Sie:

$$R[X] \big/ \mathfrak{a} \simeq R$$

Geben Sie dazu explizit einen Isomorphismus an.