Vorlesung Analysis III / Stochastik I

W. Gromes

Wintersemester 96/97

Inhaltsverzeichnis

I
Grundlagen der Integrationstheorie

Ausgangspunkt der Maß- und Integrationstheorie sind i.a. entweder

- Lineare Funktionale auf Funktionenräumen, genauer *Radon-Integrale*

oder

- Additive Mengenfunktionen, genauer *Prämaße.*

In Kap.1 wird gezeigt, daß beide *Daniell-Integrale* sind, die hier für den Aufbau zugrundegelegt werden. Die zentralen Resultate dieses Teils sind die Grenzwertsätze in Kap.2, der abstrakte Teil der Theorie wird mit den Darstellungssätzen in Kap.3 abgeschlossen.
Die "moderne" Integrationstheorie geht auf Lebesgue (1902) zurück.

1 Allgemeine Daniell-Integrale

Neben dem Begriff des Daniell-Integrals werden noch die zwei wichtigsten Beispielklassen von Daniell-Integralen behandelt.

1.1 Bezeichnungen

Die folgenden Standardbezeichnungen werden in der weiteren Vorlesung benutzt:
Mit X wird stets eine nichtleere, ansonsten bel. (Grund-)Menge bezeichnet.
Sind $f, f_k : X \to \mathsf{R}$, so bedeutet, wenn nichts anderes gesagt wird, $f_k \to f$ immer die punktweise Konvergenz und

$$f_k \searrow f :\Leftrightarrow f_k(x) \searrow f(x) \; \forall x \in X.$$

Ferner sei

$$\{f > 0\} := \{x \in X \,|\, f(x) > 0\},$$

analog sei z.B. $\{f = 0\}$, $\{f \neq 0\}$ definiert.
Für $A \subset X$ sei 1_A die charakteristische Funktion von A. Die Menge A läßt sich mit 1_A identifizieren, ist z.B. $A_j \subset X$ für $j \in \mathsf{N}$, so sei

$$A_j \nearrow A :\Leftrightarrow 1_{A_j} \nearrow 1_A \quad (\Leftrightarrow A_j \subset A_{j+1} \;\; \forall j \text{ und } \bigcup A_j = A\,).$$

Sind $A_j \subset X$ paarweise disjunkt, d.h. $A_j \cap A_k = \emptyset$ für $j \neq k$, so schreiben wir $\sum A_j$ statt $\bigcup A_j$,
endliche Summen oder Vereinigungen kennzeichnen wir durch $\sum'$ bzw. $\bigcup'$.
Ferner sei $A \backslash B := \{x \in A \,|\; x \notin B\}$, $A^c := X \backslash A$ und
$\mathsf{N} := \{0, 1, 2, ...\}$, $\mathsf{R}_+ := [0, \infty[$ und $\overline{\mathsf{R}}_+ := [0, \infty]$.

1.2 Definition des Daniell-Integrals

Wir beginnen mit einigen grundlegenden Begriffen:

1.1 Definition Ein $\mathsf{R}-$Vektorraum $\mathcal{V} \subset \{f : X \to \mathsf{R}\} =: \mathsf{R}^X$ heißt ein *Vektorverband (VV),* wenn gilt:

$$f, g \in \mathcal{V} \Rightarrow \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{V}.$$

1.2 Lemma *Ist $\mathcal{V}$ ein $\mathsf{R}-$ VR, so gilt*
$\mathcal{V}$ ist Vektorverband $\Leftrightarrow f \in \mathcal{V} \Rightarrow |f| \in \mathcal{V}$.

Beweis: "$\Rightarrow$" Mit $f \in \mathcal{V}$ ist auch $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := -\min(f, 0)$ aus $\mathcal{V}$, also ist auch $|f| = f^+ + f^-$ aus $\mathcal{V}$.
"$\Leftarrow$" Da $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. ■

1.3 Beispiel $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathsf{R} \,|\, f \text{ ist stetig}\}$ (wobei X metrischer Raum sei) ist VV, da mit f auch $|f|$ stetig ist.

1.4 Definition (Daniell, 1917) Sei $\mathcal{V}$ ein VV. $\mu : \mathcal{V} \to \mathsf{R}$ heißt *Daniell-Integral,* wenn μ

a) linear,

b) *positiv*, d.h. $f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$,

c) *nullstetig*, d.h. $f_k \searrow 0 \Rightarrow \mu(f_k) \to 0$ (*Daniell-Eigenschaft*).

1.5 Lemma *Ist $\mu : \mathcal{V} \to \mathsf{R}$ linear und positiv, so gilt $\forall f, g \in \mathcal{V}$:*

a) $f \leq g \Rightarrow \mu(f) \leq \mu(g)$

b) $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$.

Beweis: a) $\mu(g) - \mu(f) = \mu(g - f) \geq 0$
b) Da $f = f^+ - f^-$ ist $|\mu(f)| = |\mu(f^+) - \mu(f^-)| \leq \mu(f^+) + \mu(f^-) = \mu(|f|)$. ■

1.3 Radon-Integrale

In dieser ersten Beispielklasse wird ein metrischer (lokalkompakter) Raum zugrundegelegt.

Bezeichnung Ist $X = (X, d)$ ein metrischer Raum, $f \in \mathcal{C}(X)$, so sei
$\operatorname{supp} f := \overline{\{f \neq 0\}}$ der *Träger von f* und
$\mathcal{C}_c(X) := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid \operatorname{supp} f \text{ kompakt }\}$.

Bemerkung Da

$$\{f + g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} \cup \{g \neq 0\} \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \ ,$$

ist

$$\operatorname{supp}(f + g) \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \, .$$

Ist $f, g \in \mathcal{C}_c(X)$, so ist $\operatorname{supp}(f + g)$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst kompakt, $\mathcal{C}_c(X)$ ist also ein VR, und demnach (vgl. Bsp.1.3) auch VV.

Der folgende Satz dient dem Nachweis der Nullstetigkeit positiver linearer Funktionale auf $\mathcal{C}_c(X)$.

1.6 Satz (Dini) *Ist $(\varphi_k) \subset \mathcal{C}_c(X)$ mit $\varphi_k \searrow 0$, so konvergiert φ_k gleichmäßig gegen Null.*

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ und $G_k := \{\varphi_k < \epsilon\}$.
Da φ_k stetig, ist G_k offen, und aus $\varphi_k \searrow 0$ folgt $G_k \nearrow X$. Da $K := \operatorname{supp} \varphi_0$ kpt existiert $k_0 \in \mathsf{N}$ mit $K \subset G_{k_0}$. Ist $k \geq k_0$, so ist
$\varphi_k(x) < \epsilon$ falls $x \in K$, und $\varphi_k(x) = 0$ falls $x \in X \setminus K$, also gilt $\|\varphi_k\|_\infty \to 0$. ■

Daraus folgt unmittelbar

1.7 Satz *Ist $\mu : \mathcal{C}_c(X) \to \mathsf{R}$ linear und positiv, so ist μ ein Daniell-Integal.*

Beweis: Sei $\mathcal{C}_c(X) \ni \varphi_k \searrow 0$ und $\psi_k := \sqrt{\varphi_k}$. Dann gilt, wegen der Stetigkeit der Wurzel, auch $\mathcal{C}_c(X) \ni \psi_k \searrow 0$. Da

$$\varphi_k = \psi_k^2 \leq \|\psi_k\|_\infty \psi_k \leq \|\psi_k\|_\infty \psi_0$$

folgt aus dem Satz von Dini

$$0 \leq \mu(\varphi_k) \leq \|\psi_k\|_\infty \, \mu(\psi_0) \to 0 \; .$$

■

Im folgenden werden nur spezielle metrische Räume betrachtet:

1.8 Definition Ein metrischer Raum X heißt *lokalkompakt* wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x hat, die relativ kompakt ist, d.h. $\overline{U_x}$ ist kompakt.

1.9 Beispiel lkpt Räume:

a) Offene oder abgeschlossene Teilmengen von R^n oder C^n,
b) Kompakte Räume,
c) n-dim. Mannigfaltigkeiten.

1.10 Definition Ist X lkpt, so heißt $\mu : \mathcal{C}_c(X) \to \mathsf{R}$ ein *Radon-Integral,* falls μ linear und positiv ist.

Die Bedeutung der Lokalkompaktheit wird erst in Kap.3 erklärt.

Aus der elementaren Integrationstheorie erhält man das Standardbeispiel eines Radonintegals:

1.11 Beispiel Ist $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R})$, $I \subset \mathsf{R}$ ein kompaktes Intervall mit $\operatorname{supp} \varphi \subset I$, so ist $\varphi|_I$ regel-(und Riemann-)integrierbar und der Wert des Integrals $\int_I \varphi\,(x)\,dx$ hängt nicht von I ab. Man setzt deshalb
$\lambda(\varphi) := \int_{\mathsf{R}} \varphi(x)\,dx := \int_I \varphi(x)\,dx$.
$\lambda : \mathcal{C}_c(\mathsf{R}) \to \mathsf{R}$ ist offensichtlich linear und positiv, also ein Radon-Integral.

Eine Beispielklasse von Radon-Integralen ist in Kap.2 behandelt.

1.4 Prämaße

Eine Grundforderung an das "Messen von Mengen" ist die Additivität:

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B),$$

(wobei $A + B := A \cup B$ und A, B disjunkt). Die wichtigsten Mengensysteme, auf denen add. Mengenfunktionen betrachtet werden gibt

1.12 Definition Ein Mengensystem aus $\{A \subset X\} =: \mathcal{P}(X)$ heißt

a) *Semiring* $\mathcal{S}$ auf X, falls $\emptyset \in \mathcal{S}$,
$A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$ und $\exists$ endlich viele $C_j \in \mathcal{S}$ mit $A \backslash B = \sum' C_j$

b) *Ring* $\mathcal{R}$ auf X, wenn $\emptyset \in \mathcal{R}$,
$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$ und $A \backslash B \in \mathcal{R}$,

c) *Algebra* $\mathcal{R}_a$ auf X, wenn $\mathcal{R}_a$ Ring mit $X \in \mathcal{R}_a$,

d) σ-*Algebra* $\mathcal{A}$ auf X, wenn $\mathcal{A}$ Algebra und
$A_0, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Bemerkung Da $A \cap B = A \backslash B^c = A \backslash (A \backslash B)$, sind Ringe abgeschlossen unter *endlichen* Vereinigungen, Durchschnitten und Differenzen, Algebren auch noch unter Komplementbildungen.
Da $\bigcap A_j = \bigcup (A_j^c)^c$, sind σ-Algebren abgeschlossen unter *abzählbaren* Vereinigungen und Durchschnitten.
Es gilt insbesonders: σ-Algebra$\Rightarrow$Algebra$\Rightarrow$Ring$\Rightarrow$Semiring.

1.13 Beispiel a) Sei

$$\#(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, \text{ falls } A \text{ endl.} \\ +\infty \text{ sonst} \end{cases} ,$$

so ist
$\{A \subset X \,|\, \#(A) \text{ endlich}\}$ Ring, i.a. keine Algebra.

b) $\mathcal{S}_{\mathsf{R}} := \{I \subset \mathsf{R} | \, I$ ist beschränktes Intervall $\}$ ist ein Semiring auf R, kein Ring.

c) $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ sind $\sigma-$Algebren.

Das folgende Lemma verallgemeinert ein Resultat, das auch bei der Definition des Regel-Integrals benötigt wird

1.14 Lemma *Ist $\mathcal{R}$ ein Ring und sind $A_1, A_2, ...A_m \in \mathcal{R}$, so existiert eine* disjunkte Verfeinerung *dieses Mengensystems, d.h. eine endl. Familie* $\mathcal{D} = \{C_l\} \subset \mathcal{R}$ *von p.d. Mengen mit*

$$A_j = \sum_{C_l \subset A_j}' C_l \quad \forall j \, .$$

Beweis: Sei

$$A^{\varepsilon} := \begin{cases} A & \text{falls } \varepsilon = 1 \\ X \backslash A & \text{falls } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

und

$$\mathcal{D} := \{A_1^{\epsilon_1} \cap A_2^{\epsilon_2} \cap ... \cap A_m^{\epsilon_m} \mid \sum_j \epsilon_j > 0\} \, .$$

Da

$$A_j \cap (X \backslash A_k) = A_j \backslash A_k \tag{*}$$

und mindestens ein $\epsilon_j > 0$, ist $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ und $\mathcal{D}$ ist p.d. , da für $\epsilon_j \neq \epsilon_j'$

$$(A_1^{\epsilon_1} \cap ... \cap A_m^{\epsilon_m}) \cap (A_1^{\epsilon_1'} \cap ... \cap A_m^{\epsilon_m'}) = \emptyset.$$

Ferner gilt $C_l \subset A_j$ oder $C_l \cap A_j = \emptyset$ und zu $x \in A_j$ existiert $\epsilon_1, ..., \epsilon_m$ mit $x \in A_k^{\varepsilon_k} \quad \forall k$. ■

Bemerkung Das Resultat gilt mit i.W. gleichem Beweis auch für Semiringe $\mathcal{S}$: Man setze in (*) jeweils $A_j \backslash A_k = \sum' C_n$ mit $C_n \in \mathcal{S}$ ein.

1.15 Definition a) Ist $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit $\emptyset \in \mathcal{C}$, so heißt $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathsf{R}}_+$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ *additiv*, wenn

$$A = \sum_{j=0}^{m} A_j \text{ mit } A, A_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{j=0}^{m} \mu(A_j)$$

und σ-*additiv,* wenn

$$A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \text{ mit } A, A_j \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j) \tag{*}$$

b) Ist $\mu : \mathcal{C} \to \mathsf{R}_+$ additiv, so heißt μ ein *Inhalt.*

c) Ist $\mu : \mathcal{R} \to \mathsf{R}_+$ σ-additiv und $\mathcal{R}$ ein Ring, so heißt μ ein *Prämaß auf* $\mathcal{R}$.

d) Ist $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathsf{R}}_+$ σ-additiv und $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra, so heißt m ein *Maß auf* $\mathcal{A}$.
$(X, \mathcal{A}, m)$ heißt dann ein *Maßraum.*
m heißt *endliches Maß*, wenn $m(X) < \infty$,
Wahrscheinlichkeits-Maß, wenn $m(X) = 1$.

Bemerkung a) Ist $\mathcal{R}$ ein Ring, so gilt:

i. Ist $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B) \;\; \forall \; A, B \in \mathcal{R}$ p.d. und $\mu(\emptyset) = 0$, so ist μ additiv.

ii. Ist μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$, so gilt für $A, B \in \mathcal{R}$:
$A \subset B \Rightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$, da $B = B \backslash A - A$,
$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \backslash A) = \mu(B)$, μ ist also monoton.
Daraus folgt
$\mu(A \cup B) = \mu(A \backslash B + B) = \mu(A \backslash B) + \mu(B) \leq \mu(A) + \mu(B) \; \forall A, B \in \mathcal{R}.$

b) In (*) kann $\sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$ konvergent oder bestimmt divergent sein, insbesondere ist $\sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j) := \infty$, falls $\mu(A_j) = \infty$ für ein $j \in \mathsf{N}$.

1.16 Beispiel a) Für bel. X ist das *Zählmaß*

$m_z : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathsf{R}}_+$, $A \mapsto \#(A)$ ein Maß: Ist $\#(A_j) > 0$ für unendlich viele j, so ist $\sum \#(A_j) = \infty = \#(\sum A_j)$, andernfalls ist nur die Additivität zu prüfen.

b) Auf dem Ring $\mathcal{R}_X := \{A \subset X \,|\, \#(A) < \infty\}$ ist $\mu_z := m_z|_{\mathcal{R}_X}$ ein Prämaß, das *Zähl-Prämaß.*

c) Das *Dirac-Maß* $\delta_x : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$, $A \mapsto 1_A(x)$ (mit $x \in X$ fest) ist trivialerweise ein Maß.

d) Ist X abzählbar unendlich, $\mathcal{R} := \{A \subset X \,|\, A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$, so ist

$$\mu : \mathcal{R} \to [0,1],\ A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad A \quad \text{endlich} \\ 1 & \text{falls} \quad A^c \quad \text{endlich} \end{cases},$$

ein Inhalt (A, B p.d. und A^c endl.$\Rightarrow B$ endl.), aber kein Prämaß.

Der folgende Satz charakterisiert die σ-Additivität durch eine Stetigkeitsaussage. Er wird (analog zum Satz von Dini) beim Beweis der Nullstetigkeit des Elementar-Integrals (s.u.) benötigt

1.17 Satz (0-Stetigkeit des Prämaßes) *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to \mathsf{R}_+$ ein Inhalt. Äquivalent:*

a) *μ ist Prämaß auf $\mathcal{R}$*

b) *μ ist* 0-stetig*: Ist $(B_j)_{j\geq 0} \subset \mathcal{R}$ mit $B_j \searrow \emptyset$, so gilt $\mu(B_j) \to 0$.*

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Da $B_0 \supset B_1 \supset ...$ und $\cap B_j = \emptyset$ ist $B_0 = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \backslash B_{j+1}$, $\Rightarrow$

$$\mu(B_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j \backslash B_{j+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mu(B_j) - \mu(B_{j+1})) = \mu(B_0) - \lim \mu(B_{j+1}),$$

also gilt b).
b) $\Rightarrow$ a): Sei $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$ mit $A, A_k \in \mathcal{R}$, $B_j := A \backslash \sum_{k\leq j} A_k$
so gilt $\mathcal{R} \ni B_j \searrow \emptyset$, also folgt
$\mu(A) = \mu(B_j) + \mu(\sum_{k\leq j} A_k) \to \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$. ■

1.5 Das Integral elementarer Funktionen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß jedes Prämaß in natürlicher Weise ein D-I erzeugt.
Wir untersuchen zunächst den VR der Elementar-Funktionen

1.18 Definition Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, so sei

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}) = \text{ Span } \{1_A \,|\, A \in \mathcal{C}\}$$

der Vektorraum der *Elementar-Funktionen über $\mathcal{C}$.*

Für die weitere Behandlung werden Normaldarstellungen benötigt:

1.19 Lemma *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Jedes $\varphi = \sum_j' \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ hat eine* Normaldarstellung, *d.h. $\varphi = \sum_l' \gamma_l 1_{C_l}$ mit $C_l \in \mathcal{R}$ p.d.. Insbesondere ist $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ ein VV.*

Beweis: Sei nach Lemma 1.14 $\mathcal{D} = \{C_l\} \subset \mathcal{R}$ eine disjunkte Verfeinerung von $\{A_j\}$, also

$$A_j = \sum_{\{l|C_l \subset A_j\}}' C_l \;\; \forall j \; ,$$

so ist

$$\varphi = \sum_j' \alpha_j \sum_{\{l|C_l \subset A_j\}} 1_{C_l} = \sum_l' (\sum_{\{j|C_l \subset A_j\}} \alpha_j) 1_{C_l} \; . \qquad (*)$$

Mit φ ist demnach auch $|\varphi| \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$, also ist nach Lemma 1.2 $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ ein Vektorverband. ∎

Für einen Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$ erhält man damit eine natürliche Def. eines Integrals auf $\mathcal{E}(\mathcal{R})$

1.20 Lemma *Sei $\mu : \mathcal{R} \to \mathsf{R}_+$ ein Inhalt, so gibt es eine Abbildung $\mu' : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \to \mathsf{R}$, mit*

$$\mu'(\varphi) = \sum_j' \alpha_j \mu(A_j) \;\; \textit{falls} \; \varphi = \sum_j' \alpha_j 1_{A_j} \;\; \in \mathcal{E}(\mathcal{R}) \; .$$

μ' ist linear und positiv.

Beweis: Ist $\varphi = \sum_j' \alpha_j 1_{A_j}$, $\psi = \sum_k' \beta_k 1_{B_k} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$, so existiert eine *gemeinsame Normaldarstellung für* φ und ψ : Sei nach Lemma 1.14 $\{C_l\} \subset \mathcal{R}$ eine disjunkte Verfeinerung von $\{A_j\} \cup \{B_k\}$ so ist nach (*)

$$\varphi = \sum_l' (\sum_{C_l \subset A_j} \alpha_j) \, 1_{C_l} \, , \;\; \psi = \sum_l' (\sum_{C_l \subset B_k} \beta_k) \, 1_{C_l} \, .$$

Ist $\varphi = \psi$, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_j' \alpha_j \mu(A_j) \underset{\mu \text{ add.}}{=} \sum_j' \alpha_j \sum_{C_l \subset A_j} \mu(C_l) \;\; &= \;\; \sum_l' (\sum_{C_l \subset A_j} \alpha_j) \mu(C_l) \\ &= \;\; \sum_l' (\sum_{C_l \subset B_k} \beta_k) \mu(C_l) = \sum_k' \beta_k \mu(B_k). \end{aligned}$$

μ' ist also (wohl-)definiert. Die Positivität und Linearität folgt wie eben durch eine (gemeinsame) Normaldarststellung von φ und ψ gemäß (*). ∎

Bemerkung Wir identifizieren $A \subset X$ mit $1_A \in \mathsf{R}^X$ und schreiben statt $\mu(A)$ auch $\mu(1_A)$. Damit ist μ' die lineare Fortsetzung des Inhalts μ von $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{E}(\mathcal{R})$. Statt μ' wird deshalb i.a. wieder μ geschrieben und statt $\mu(\varphi)$ schreiben wir auch $\int \varphi \, d\mu$.

Bezeichnung $\mu : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \to \mathsf{R}$, $\varphi = \sum_j' \alpha_j 1_{A_j} \mapsto \sum_j' \alpha_j \mu(A_j)$ heißt das *Elementar-Integral auf* $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ bzgl. μ.

1.21 Beispiel Ist $\mu_z : \{A \subset \mathsf{N} \,|\, \#(A) < \infty\} =: \mathcal{R}_\mathsf{N} \to \mathsf{R}_+$, $A \mapsto \#(A)$ das Zähl-Prämaß auf N aus Bsp.1.16, so ist jedes $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mathsf{N})$ von der Form $\varphi = \sum' \alpha_j 1_{\{j\}}$, und demnach

$$\mu_z(\varphi) = \sum_j{}' \alpha_j = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j).$$

Für die Nullstetigkeit des Integrals auf $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ wird die von μ benötigt:

1.22 Satz *Ist μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$, so ist das Elementar-Integral $\mu : \mathcal{E}(\mathcal{R}) \to \mathsf{R}$ ein Daniell-Integral.*

Beweis: Sei $(\varphi_k) \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$, φ_k in Normaldarstellung, $\varphi_k \searrow 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$B := \{\varphi_0 > 0\} \text{ und } B_k := \{\varphi_k > \varepsilon\} \text{ aus } \mathcal{R}$$

und es gilt $B_k \searrow \emptyset$. Aus der Stetigkeit des Prämaßes auf $\mathcal{R}$ folgt $\mu(B_k) \to 0$, und da $\varphi_k \leq \|\varphi_0\|_\infty 1_{B_k} + \varepsilon\, 1_B$ folgt mit der Monotonie von μ:

$$0 \leq \mu(\varphi_k) \leq \mu(\|\varphi_0\|_\infty 1_{B_k} + \varepsilon 1_B) \ \to \varepsilon\, \mu(B)\ . \quad \blacksquare$$

Bemerkung Im Weiteren betrachten wir, wenn nichts anderes gesagt wird, nur Elementar-Integale bzgl. eines Prämaßes, also D-I.

2 Vollständige Daniell-Integrale

In diesem Kap. wird die Abschließung von abstrakten D.-I.definiert (nach van Daele, Am. Math. Monthly, 1990) und deren grundlegende Eigenschaften untersucht.

2.1 Die Halbnorm μ^*

Sei $\mu : \mathcal{V} \to \mathsf{R}$ ein D-I , $\mathcal{V}_+ := \{f \in \mathcal{V} \,|\, f \geq 0\}$.

2.1 Definition Sei $\mu^* : \{f : X \to \mathsf{R}\}\ (= \mathsf{R}^X) \to \overline{\mathsf{R}_+}$,

$$\mu^*(f) := \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} \mu(\varphi_k) \,|\, \varphi_k \in \mathcal{V}_+,\ |f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k\} \qquad (*)$$

(mit $\inf \emptyset := \infty =: \inf\{\infty\}$) die *μ-Halbnorm* (oder das *Oberintegral von* $|f|$).

Zur Untersuchung von μ^* benötigen wir zunächst

2.2 Lemma *Sind $a_{j,k} > 0$ für $j \in \mathsf{N}, k \in \mathsf{N}$ und $\phi : \mathsf{N} \to \mathsf{N} \times \mathsf{N}$ bijektiv, so ist*

$$\sum_j \sum_k a_{j,k} = \sum_n a_{\phi(n)} =: \sum_{j,k} a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k}$$

(wobei alle Terme ∞ sei können).

Beweis: $\forall l, m \in \mathsf{N}$ ist $\sum_{j \leq l} \sum_{k \leq m} a_{j,k} \leq \sum_n a_{\phi(n)}$, also gilt $\sum_j \sum_k a_{j,k} \leq \sum_n a_{\phi(n)}$, und ebenso folgt die umgekehrte Ungleichung aus $\sum_{n \leq p} a_{\phi(n)} \leq \sum_j \sum_k a_{j,k}$. Da obige Formel symmetrisch, gilt die Behauptung. ■

2.3 Beispiel Für das D-I $\mu_z : \mathcal{E}(\mathcal{R}_{\mathsf{N}}) \to \mathsf{R}$ aus Bsp.2.21 folgt aus $|f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$ zunächst

$$\sum_j |f(j)| \leq \sum_j \sum_k \varphi_k(j) \underset{\text{L.2.2}}{=} \sum_k \sum_j \varphi_k(j) = \sum_k \mu_z(\varphi_k)\ ,$$

also ist $\sum_j |f(j)| \leq \mu_z^*(f)$ und für $\varphi_k := |f(k)|\, 1_{\{k\}}$ folgt

$$\sum_j |f(j)| = \mu_z^*(f).$$

Der folgende Satz gibt die für den weiteren Aufbau wesentlichen Eigenschaften von μ^*.

2.4 Satz *Sei μ ein D-I mit Halbnorm μ^*, so gilt*

a) $\mu(\varphi) = \mu^*(\varphi)\ \forall \varphi \in \mathcal{V}_+$

b) μ^* *ist $\sigma-$*subadditiv*: Ist $f, f_k : X \to \mathsf{R}_+$ mit $f \leq \sum_0^{\infty} f_k$ so ist* $\mu^*(f) \leq \sum_0^{\infty} \mu^*(f_k)$

c) $\mu^*(|f|) = \mu^*(f)$, $|f| \le |g| \Rightarrow \mu^*(f) \le \mu^*(g)$ $\forall f, g \in \mathsf{R}^X$

d) μ^* *ist eine* Halbnorm, *d.h.* $\forall f, g \in \mathsf{R}^X$, $\alpha \in \mathsf{R}$ *gilt*

   i. $\mu^*(\alpha f) = |\alpha|\, \mu^*(f)$

   ii. $\mu^*(f+g) \le \mu^*(f) + \mu^*(g)$.

Beweis: a) "$\ge$" : Wähle in (*) $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_k = 0$ $\forall k > 0$.
"$\le$" : Da $\mu^*(\varphi) \le \mu(\varphi) < \infty$ existiert zu $\epsilon > 0$ $(\varphi_k) \subset \mathcal{V}_+$ mit

$$\varphi \le \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\varphi_k) \le \mu^*(\varphi) + \epsilon.$$

Sei $\psi_j := \min(\sum_{k=0}^{j} \varphi_k, \varphi)$ $(\in \mathcal{V})$, so gilt $0 \le \psi_j \nearrow \varphi$,
aus der Nullstetigkeit folgt also $\mu(\varphi - \psi_j) \to 0$.
Da μ linear und monoton folgt

$$\begin{aligned}
\mu(\varphi) &= \lim \mu(\psi_j) \le \lim \mu(\sum_{k=0}^{j} \varphi_k) = \lim \sum_{k=0}^{j} \mu(\varphi_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\varphi_k) \le \mu^*(\varphi) + \epsilon \,.
\end{aligned}$$

b) Sei Œ $\sum_0^\infty \mu^*(f_k) < \infty$, und sei $\epsilon > 0$. Nach (*) existiert $\varphi_{kj} \in \mathcal{V}_+$ mit

$$f_k \le \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{kj} \text{ und } \sum_j \mu(\varphi_{kj}) \le \mu^*(f_k) + \frac{\epsilon}{2^k} \quad \forall k \,.$$

Mit Lemma 2.2 ist $f \le \sum_k \sum_j \varphi_{kj} = \sum_{k,j} \varphi_{kj}$ und demnach

$$\mu^*(f) \le \sum_{k,j} \mu(\varphi_{kj}) = \sum_k \sum_j \mu(\varphi_{kj}) \le \sum_k \mu^*(f_k) + 2\epsilon \,.$$

c) und d i) folgen direkt aus der Def. von μ^* ,
d ii) aus b), da $|f+g| \le |f| + |g|$. ∎

Man beachte, daß die Nullstetigkeit des D-I nur in a) benutzt wurde.

2.2 Die Abschließung $\overline{\mu}$ von μ

Mit den Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt sei nun $\mathcal{L}^1(\mu)$ *der Abschluss von* $\mathcal{V}$ *unter* μ^* :

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) :\Leftrightarrow \exists\, (\varphi_k) \subset \mathcal{V} \text{ mit } \mu^*(f - \varphi_k) \to 0 \,. \qquad (*)$$

Da μ^* Halbnorm, hat μ ein natürliche (μ^*-stetige) Fortsetzung auf $\mathcal{L}^1(\mu)$:
Aus $\mu^*(f - \varphi_k) \to 0$ folgt nämlich aus Lemma 1.5 b), Satz 2.4 a) und d)

$$\begin{aligned} |\mu(\varphi_j) - \mu(\varphi_k)| &= |\mu(\varphi_j - \varphi_k)| \leq \mu(|\varphi_j - \varphi_k|) \qquad (\#) \\ &= \mu^*(|\varphi_j - \varphi_k|) \\ &\leq \mu^*(|\varphi_j - f|) + \mu^*(|\varphi_k - f|) \to 0 \text{ für } j, k \to \infty. \end{aligned}$$

$(\mu(\varphi_k))$ ist also Cauchy-Folge in R , demnach existiert $\lim \mu(\varphi_k)$, und da (vgl. (#))

$$|\mu(\varphi_k) - \mu(\psi_k)| \leq \mu^*(|\varphi_k - f|) + \mu^*(|\psi_k - f|)$$

ist dieser Grenzwert von der Wahl der Folge (φ_k) unabhängig.

2.5 Definition Sei $\overline{\mu} : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$, $f \mapsto \lim \mu(\varphi_k)$ die *Abschließung von* μ, wobei $(\varphi_k) \subset \mathcal{V}$ mit $\mu^*(f - \varphi_k) \to 0$.

Alle wesentlichen Eigenschaften von μ übertragen sich auf $\overline{\mu}$. Wir beginnen mit

2.6 Satz a) $\overline{\mu} : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ *ist eine Fortsetzung von* μ.

b) $\mathcal{L}^1(\mu)$ *ist VV und* $\overline{\mu}$ *ist linear und positiv.*

c) $\overline{\mu}(f) = \mu^*(f) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ *(vgl. S.2.4a))*

d) *Ist* $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ *und* $f \in \mathsf{R}^X$ *mit* $\mu^*(f - f_k) \to 0$, *so ist* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und* $\lim \overline{\mu}(f_k) = \overline{\mu}(f)$.

e) *Ist* $\mu^*(f) = 0$, *so ist* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und* $\overline{\mu}(f) = 0$.

Beweis: a) Setze für $f \in \mathcal{V}$ in Def.2.1 $\varphi_k := f \ \ \forall k$.
b) Gilt

$$\mu^*(f - \varphi_k) \to 0 \text{ und } \mu^*(g - \psi_k) \to 0$$

mit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\varphi_k, \psi_k \in \mathcal{V}$, so folgt, da μ^* Halbnorm, daß

$$\mu^*((f+g) - (\varphi_k + \psi_k)) \to 0, \text{ und } \mu^*(\alpha f - \alpha \varphi_k) \to 0,$$

also ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ VR und $\overline{\mu}$ ist linear:

$$\overline{\mu}(f+g) = \lim \mu(\varphi_k + \psi_k) = \lim \mu(\varphi_k) + \lim \mu(\psi_k) = \mu(f) + \mu(g)\,.$$

Sei

$$f \in \mathcal{L}^1_+(\mu),\ (\varphi_k) \subset \mathcal{V} \text{ mit } \mu^*(f - \varphi_k) \to 0.$$

Da

$$|f - \varphi_k^+| \leq |f - \varphi_k|$$

folgt aus Satz 2.4c) $\mu^*(f - \varphi_k^+) \to 0$, also ist

$$\overline{\mu}(f) = \lim \mu(\varphi_k) \geq 0.$$

Ferner ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ VV:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \ |f| \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

da $||f| - |\varphi_k|| \leq |f - \varphi_k|$.
c) Sei $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, $(\varphi_k) \subset \mathcal{V}_+$ mit $\mu^*(f - \varphi_k) \to 0$ (vgl.b)). Aus der Dreiecksungleichung für μ^* folgt, daß

$$|\mu^*(f) - \mu^*(\varphi_k)| \leq \mu^*(f - \varphi_k),$$

und damit ist mit Satz 2.4 a)

$$\overline{\mu}(f) = \lim \mu(\varphi_k) = \lim \mu^*(\varphi_k) = \mu^*(f).$$

d) Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $k \in \mathsf{N}$ mit $\mu^*(f - f_k) < \varepsilon/2$ und zu f_k ein $\varphi \in \mathcal{V}$ mit $\mu^*(\varphi - f_k) < \varepsilon/2$, aus der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\mu^*(f - \varphi) < \varepsilon.$$

Also ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und mit Lemma 1.5 und c) folgt

$$|\overline{\mu}(f) - \overline{\mu}(f_k)| \leq \overline{\mu}(|f - f_k|) = \ \mu^*(f - f_k) \to 0.$$

e) Aus der Def. von $\overline{\mu}$ mit $\varphi_k = 0 \ \ \forall k$.

2.7 Beispiel Für das vom Zähl-Prämaß μ_z auf $\mathcal{R}_\mathsf{N}$ erzeugte D-I
$\mu_z : \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mathsf{N}) \to \mathsf{R}$ gilt nach Bsp.1.21 und 2.3

$$\mu_z(\varphi) = \sum_j \varphi(j) \ \ \forall \varphi \in \mathcal{V} \text{ und } \mu_z^*(f) = \sum |f(j)| \ \ \forall f \in \mathsf{R}^\mathsf{N}.$$

Für $f : \mathsf{N} \to \mathsf{R}$ folgt damit

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu_z) \Leftrightarrow \sum |f(j)| \text{ konvergiert:}$$

" $\Rightarrow$ " : Nach obigem Satz ist $\mu_z^*(f) = \mu_z(|f|) \in \mathsf{R}$, da $|f| \in \mathcal{L}^1_+(\mu_z)$.
" $\Leftarrow$ " : Für $\varphi_k := f \cdot 1_{\{0,1,\dots k\}} \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mathsf{N})$ gilt

$$\mu_z^*(f - \varphi_k) = \sum_{j>k} |f(j)| \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

also ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu_z)$ und

$$\overline{\mu}_z(f) = \lim \mu_z(\varphi_k) = \lim \sum_{j \leq k} f(j) \ = \sum_{j=0}^{\infty} f(j).$$

Bemerkung Die Nullstetigkeit von $\overline{\mu}$ wird im nächsten Abschnitt bewiesen.

Wegen Satz 2.6 a) schreiben wir i.a. statt $\overline{\mu}$ wieder μ

2.3 Die Grenzwertsätze

$\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ sei durch Def.2.5, μ^* durch Def.2.1 gegeben.
Die folgenden drei Sätze sind grundlegende Aussagen der Integrationstheorie.

2.8 Satz (B. Levi, 1906) *Sei $\mathcal{L}^1(\mu) \ni f_k \nearrow$ und $\mu(f_k)$ beschränkt. Sei*

$$f(x) := \begin{cases} \lim f_k(x) & \textit{falls } (f_k(x)) \textit{ konvergent} \\ \textit{beliebig} & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\lim \mu(f_k) = \mu(f)$.

Beweis: Für alle $x \in X$ gilt

$$|f(x) - f_k(x)| \leq \lim f_j(x) - f_k(x) = \sum_{j \geq k} (f_{j+1}(x) - f_j(x)).$$

Daraus folgt mit Satz 2.4 b) und 2.6 c)

$$\begin{aligned} \mu^*(f - f_k) &\leq \sum_{j \geq k} \mu^*(f_{j+1} - f_j) = \sum_{j \geq k} \mu(f_{j+1} - f_j) \\ &= \lim \mu(f_j) - \mu(f_k) \to 0 \text{ für } k \to \infty \end{aligned}$$

Aus Satz 2.6 d) folgt die Beh. ■

Bemerkung Der Satz gilt analog für monoton fallende Folgen aus $\mathcal{L}^1(\mu)$. Damit folgt also insbesonders:

$$\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R} \text{ ist Daniell-Integral.}$$

Aus dem Satz von B. Levi erhält man die folgende Version für Summen:

2.9 Folgerung *Sei $(g_k) \subset \mathcal{L}^1_+(\mu)$ und $\sum_k \mu(g_k)$ konvergent und sei*

$$g(x) := \begin{cases} \lim \sum_k g_k(x) & \textit{falls } \sum_k g_k(x) \textit{ konvergent} \\ \textit{beliebig} & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Dann ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\lim \sum_{k=0}^{\infty} \mu(g_k) = \mu(g)$.

Beweis: Setze im Satz von B.Levi $f_k := \sum_{j \leq k} g_j$. ■

Der zweite wichtige Grenzwertsatz ist

2.10 Satz (Lebesgue, 1910) *Sei $\mathcal{L}^1(\mu) \ni f_k \to f$ und es existiere $g \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ mit $|f_k| \leq g \ \forall k$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\lim \mu(f_k) = \mu(f)$.*

Beweis: Sei

$$g_k := \sup_{m \geq k} f_m, \quad (\text{d.h. } g_k(x) = \sup\{f_m(x) \,|\, m \geq k\} \ \ \forall x \in X)$$

so ist $g_k \geq -g$ und $g_k \searrow f$.
Ferner ist $g_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$: Sei

$$g_k^j := \max(f_k, ... f_{k+j}),$$

so gilt $g_k^j \nearrow g_k$ (k fest) und $\mu(g_k^j) \leq \mu(g) \ \forall j$,
also ist nach dem S. von B.Levi $g_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
Da $\mu(g_k) \geq \mu(-g)$ für alle k folgt wieder aus B.Levi

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ und } \mu(g_k) \to \mu(f).$$

Sei analog

$$h_k := \inf_{m \geq k} f_m,$$

so folgt ebenso $h_k \nearrow f$, $h_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und damit $\mu(h_k) \to \mu(f)$.
Da

$$h_k \leq f_k \leq g_k \ \forall k$$

folgt $\mu(f_k) \to \mu(f)$. ■

Die Sätze von B. Levi und Lebesgue sind ein primäres Ziel der Integrationstheorie; sie gelten nicht für Regel- (oder Riemann-) Integrale (Aufg.9).

Wir zeigen noch, daß der Fortsetzungsprozeß aus Abs.2.2 für das D-I $\overline{\mu} : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ keine echte Fortsetzung ergibt:

2.11 Satz *Seien $\mu : \mathcal{V} \to \mathsf{R}$ und $\mu_0 : \mathcal{V}_0 \to \mathsf{R}$ D-I mit Abschließungen $\overline{\mu}$ und $\overline{\mu_0}$, so gilt:*

a) *Ist μ_0 Fortsetzung von μ, so ist $\mu_0^* \leq \mu^*$ und $\overline{\mu_0}$ ist Fortsetzung von $\overline{\mu}$.*
b) *Ist $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\overline{\mu}|_{\mathcal{V}_0} = \mu_0$, so ist $\mu_0^* = \mu^*$ und $\mathcal{L}^1(\mu_0) = \mathcal{L}^1(\mu)$, $\overline{\mu_0} = \overline{\mu}$.*
c) *Die Abschließung $\overline{\mu} : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ von μ ist abgeschlossen unter dem Fortsetzungsprozess aus Abs. 2.2: $\overline{\mu}^* = \mu^*$ und $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu}$.*

Beweis: a) Aus der Def. von μ^* folgt $\mu_0^* \leq \mu^*$. Ist

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu), \ \ (\varphi_k) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0$$

mit $\mu^*(f - \varphi_k) \to 0$, so gilt $\mu_0^*(f - \varphi_k) \to 0$, also folgt aus Satz 2.6:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu_0) \text{ und } \overline{\mu_0}(f) = \lim \mu_0(\varphi_k) = \lim \mu(\varphi_k) = \overline{\mu}(f).$$

b) Sei $f \in \mathsf{R}^X$ mit $\mu_0^*(f) < \infty$, so existiert eine Folge $(g_k) \subset \mathcal{V}_{0+}$ mit

$$|f| \leq \sum g_k \text{ und } \sum \mu_0(g_k) \leq \mu_0^*(f) + \epsilon \ .$$

Damit folgt aus Satz 2.4 b) und 2.6 c)

$$\mu^*(f) \leq \sum \mu^*(g_k) = \sum \mu_0(g_k) \leq \mu_0^*(f) + \epsilon$$

und demnach ist mit a) $\mu_0^* = \mu^*$.
Ist

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu_0), \ \ (g_k) \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{L}^1(\mu)$$

mit $\mu^*(f - g_k) = \mu_0^*(f - g_k) \to 0$, so gilt nach Satz 2.6 $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\overline{\mu_0}(f) = \lim \mu_0(g_k) = \lim \mu(g_k) = \overline{\mu}(f).$$

c) Aus b) für $\mu_0 = \overline{\mu}$. ■

Bemerkung Im allgemeinen läßt sich ein D-I μ und auch die Abschließung $\overline{\mu}$ in nicht eindeutiger Weise weiter fortsetzen: z.B. kann $\mathcal{V} = \mathcal{L}^1(\mu) = \{0\}$ gelten.

Bezeichnung Ein D-I $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$, das abgeschlossen unter dem Fortsetzungsprozess aus Abs.2.2 ist, für das also $\mu = \overline{\mu}$ gilt, heißt ein *vollständiges Daniell-Integral.*

Konkrete vollständige D-I entstehen i.a. durch Abschließung von

a) Radon-Integralen ("vollst. Radon-Integrale")
   oder von
b) Elementar-Integralen.
   Wir zeigen später, daß unter einer schwachen Zusatzbedingung jedes vollst. D-I Abschließung eines Elementar-Integrals ist.

2.4 Stieltjes-Integrale auf R

Wir erinnern zunächst an Aussagen aus der elementaren Integrationstheorie:
Ist μ ein Inhalt auf $\mathcal{S}_\mathsf{R}$, $\psi = \sum' \alpha_j 1_{I_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_\mathsf{R})$ so sei wie beim Elementar-Integral $\mu(\psi) := \int \psi \, d\mu := \sum' \alpha_j \mu(I_j)$, und wie dort erhält man durch eine gemeinsame Verfeinerung (vgl. die Bem. zu Lemma 1.14), daß das Integal (wohl-)definiert und linear und positiv ist.
Ist $I \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$, $f : I \to \mathsf{R}$ und gilt

$$\exists (\psi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{S}_\mathsf{R}) \text{ mit } \psi_k \to f \text{ gleichmäßig auf } I \text{ und } \psi_k|_{I^c} = 0 \ \ \forall k \in \mathsf{N}, \qquad (*)$$

so ist nach Lemma 1.5

$$|\mu(\psi_j) - \mu(\psi_k)| \leq \mu(|\psi_j - \psi_k|) \leq \|\psi_j - \psi_k\|_\infty \cdot \mu(1_I). \qquad (\#)$$

$(\mu(\psi_k))$ ist also Cauchy-Folge in R, demnach existiert

$$\lim \mu(\psi_k) =: \int_I f\,d\mu.$$

Dieser Grenzwert ist von der Folge (ψ_k) unabhängig: Gilt für (φ_k) ebenfalls (*), so folgt

$$|\mu(\psi_k - \varphi_k)| \underset{(\#)}{\leq} \|\psi_k - \varphi_k\|_\infty \cdot \mu(1_I) \to 0 \quad .$$

2.12 Definition $f : I \to \mathsf{R}$ heißt *regel-integrierbar*, $f \in$Reg(I), wenn (*) gilt, und dann heißt

$$\lim \mu(\psi_k) =: \int_I f\,d\mu$$

das Regel-Integral von f über I bzgl. μ.

Aus dem Regel-Integral erhält man in natürlicher Weise ein Radon-Integral. Dazu die

Bemerkung Ist $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R})$, so gilt, da φ gleichmäßig stetig, daß $\varphi \in$Reg(I) $\forall I \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$ und aus (*) folgt: Sind $I,\ I' \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset I \cap I'$, so ist

$$\int_I \varphi\,d\mu = \int_{I'} \varphi\,d\mu =: \mu(\varphi).$$

$\mathcal{C}_c(\mathsf{R}) \ni \varphi \mapsto \mu(\varphi)$ ist wieder linear und positiv, also ein Radon-Integral, *das von μ erzeugte Radon-Integral.*

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, den Zusammenhang zwischen der Abschließung dieser Radon-Integrale und der Regel-Integrale herzuleiten. Dazu benötigt man spezielle Inhalte

2.13 Definition Ein Inhalt $\mu : \mathcal{S}_\mathsf{R} \to \mathsf{R}_+$ heißt *regulär*, wenn $\forall\ I \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$ gilt: Sind $I_k, I^k \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$ mit I_k abgeschlossen, I^k offen und gilt $I_k \nearrow I,\ I^k \searrow I$, so folgt

$$\lim \mu(I_k) = \lim \mu(I^k) = \mu(I).$$

2.14 Beispiel Ist $F : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ monoton wachsend, so existiert $\forall a \in \mathsf{R}$ $\lim_{x \nearrow a} F(x) =: F(a-)$ und $\lim_{x \searrow a} F(x) =: F(a+)$.

$$\mu_F : \mathcal{S}_\mathsf{R} \to \mathsf{R}_+, \left\{ \begin{array}{lcl} [a,b] & & F(b+) - F(a-) \\ [a,b[& \mapsto & F(b-) - F(a-) \\ ]a,b] & & F(b+) - F(a+) \\ ]a,b[& & F(b-) - F(a+) \end{array} \right.$$

heißt der *von F erzeugte Stieltjes-Inhalt.*
Ist $F = id$, so heißt $\lambda := \mu_{id}$ das *1-dim. Volumen.*

Für μ_F gilt:

a) μ_F ist ein Inhalt: z.B. ist
$\mu_F([a,c[) + \mu_F([c,b] = F(c-) - F(a-) + F(b+) - F(c-) = \mu_F([a,b])$.
b) μ_F ist regulär: z.B. gilt für $I = [a,b[$ und $I_k = [a,b_k]$ mit $I_k \nearrow I$, also $b_k \nearrow b$

$$\begin{aligned} \mu_F(I) &\geq \mu_F(I_k) = F(b_k+) - F(a-) \\ &\geq F(b_k) - F(a-) \to F(b-) - F(a-) = \mu_F(I). \end{aligned}$$

Bezeichnung $\int_I f\, d\mu_F =: \int_I f\, dF$ heißt das *Stieltjes-Integral von* f $(\in \mathrm{Reg}(I))$ *über* I *bzgl.* F.

2.15 Beispiel a) Ist $F = 1_{]a,\infty[}$, so folgt aus der Def. des Stieltjes-Inhalts

$$\mu_F(I) = 1_I(a) \;\; \forall I \in \mathcal{S}_{\mathsf{R}},$$

also gilt

$$\mu_F(\psi) = \psi(a) \;\; \forall \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_{\mathsf{R}}).$$

Damit folgt

$$\int_I f\, d\mu_F = f \cdot 1_I(a) \;\; \forall f \in Reg(I)$$

und $\mu_F = \delta_a|_{\mathcal{S}_{\mathsf{R}}}$ (vgl. Bsp.1.16).
b) Das von $F = id$ erzeugte Radon-Integral λ stimmt mit dem aus Bsp.1.11 überein.

Zur Formulierung des Hauptresultats benötigen wir noch die

Bezeichnung Ist $A \subset X$, $f : A \to \mathsf{R}$, so sei $f^0 : X \to \mathsf{R}$ mit $f^0|_A = f$, $f^0|_{A^c} = 0$ die *Nullfortsetzung von* f.

2.16 Satz *Sei* $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ *die Abschließung eines von einem regulären Inhalt auf* $\mathcal{S}_{\mathsf{R}}$ *erzeugten Radon-Integrals, so gilt*

$$f \in Reg(I) \Rightarrow f^0 \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ und } \int_I f\, d\mu = \mu(f^0).$$

Beweis: a) Wir zeigen zunächst: Ist $I \in \mathcal{S}_{\mathsf{R}}$ beliebig, so ist $1_I \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und der Inhalt $\mu(I)$ stimmt mit dem D-I $\mu(1_I)$ überein.
Sind $I_k, I^k \in \mathcal{S}_{\mathsf{R}}$ wie in Def.2.13, so existiert dazu $(\chi_k) \subset \mathcal{C}_c(\mathsf{R})$ mit

$$1_{I_k} \leq \chi_k \leq 1_{I^k} \;\; \forall k; \qquad (*)$$

man kann z.B. χ_k stückweise affin wählen.
Da $I_k \nearrow I$ und $I^k \searrow I$ gilt $\chi_k \to 1_I$. Ferner existiert $\chi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R})$ mit $1_{I^0} \leq \chi$, da $|\chi_k| \leq \chi \; \forall k$ folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$1_I \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ und } \mu(1_I) = \lim \mu(\chi_k).$$

Andererseits folgt aus der Monotonie des Regel-Integrals (Lemma 1.5)

$$\mu(I_k) = \int_{I^0} 1_{I_k}\, d\mu \le \int_{I^0} \chi_k\, d\mu \le \int_{I^0} 1_{I^k}\, d\mu = \mu(I^k),$$

da $\int_{I^0} \chi_k\, d\mu = \mu(\chi_k)$ und $\lim \mu(I_k) = \lim \mu(I^k) = \mu(I)$ folgt die Beh. in a).
b) Aus a) und der Linearität beider Integrale folgt, daß auf $\mathcal{E}(\mathcal{S}_\mathsf{R})$ das Regel-Integral mit dem D-I μ übereinstimmt, und ist $(\psi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{S}_\mathsf{R})$ mit $\psi_k \to f$ glm. auf I und $\psi_k|_{I^c} = 0$, so folgt aus dem Satz von Lebesgue die Behauptung. ■

Bemerkung Eine analoge Aussage wie in obigem Satz gilt mit ähnlichem Beweis für das Riemann-Integral.

2.17 Definition Ist μ regulärer Inhalt auf $\mathcal{S}_\mathsf{R}$, $I \subset \mathsf{R}$ ein beliebiges Intervall, so sei

$$\mathcal{L}^1(I, \mu) := \{f : I \to \mathsf{R} \mid f^0 \in \mathcal{L}^1(\mu)\}$$

und für $f \in \mathcal{L}^1(I, \mu)$ sei

$$\mu(f^0) =: \int_I f\, d\mu.$$

Für $\mu = \mu_F$ heißt $\int_I f\, d\mu_F =: \int_I f\, dF$ das *Lebesgue-Stieltjes-Integral* von $f \in \mathcal{L}^1(I, \mu_F)$ bzgl. F,
für $\mu = \lambda$ heißt $\int_I f\, d\lambda =: \int_I f(x)\, dx$ das *Lebesgue-Integral* von $f \in \mathcal{L}^1(I, \lambda)$.
Ist $I = \mathsf{R}$, so wird R in diesen Bezeichnungen i.a. weggelassen.

Bemerkung Für reguläres μ gilt

a) Ist $I \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$, so ist $\mathcal{L}^1(I, \mu) \ni f \mapsto \int_I f\, d\mu$ eine Fortsetzung des Regel-Integrals auf I bzgl. μ (Satz 2.16) und diese Fortsetzung ist echt: z.B. ist für jedes nichteinpunktige Intervall $I \in \mathcal{S}(\mathsf{R})$
$1_\mathsf{Q}|_I \in \mathcal{L}^1(I, \mu) \setminus \mathrm{Reg}(I)$ (Aufg.7 und 11).

b) Ist $I \subset \mathsf{R}$ ein bel. Intervall, so ist $\mathcal{L}^1(I, \mu) \ni f \mapsto \int_I f\, d\mu$ ein vollst. D-I (Bew. in Kap.3), insbesondere gelten also die Grenzwertsätze.

c) Ist $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I)$, so ist $f \in \mathrm{Reg}(I)$, also auch in $\mathcal{L}^1(I, \mu)$.
Für $\mu = \lambda$ gilt also wieder der Hauptsatz

$$\int_a^b f\, d\lambda := \int_{[a,b]} f\, d\lambda = F(b) - F(a) \text{ falls } \ f \in \mathcal{C}([a, b]),\ \ F' = f.$$

Wir geben eine erste Anwendung:

2.18 Beispiel Es gilt

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^k\, dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\, dx = \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}\, dx,$$

wobei im 2. und 3. Integral der Integrand bei $x = 1$ bel. gesetzt sei:
Die erste Gleichung folgt mit dem Hauptsatz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^k \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1,$$

also ist der Satz von B. Levi für Reihen (Folg.2.9) anwendbar und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \ln \frac{1}{1-x} \text{ für } |x| < 1.$$

Bemerkung Die wichtigsten konkreten Anwendungen der Lebesgueschen Integrationstheorie treten erst bei der Integration über unbeschränkte Intervalle und der mehrdimensionalen Integration auf.

3 Meßbarkeit

Durch die Meßbarkeit einer Funktion erhält man zunächst einfache Kriterien für die Integrierbarkeit. Die Darstellungssätze am Ende des Kapitels bilden einen ersten Abschluss des theoretischen Aufbaus.
Es sei $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ ein vollst. D-I mit Halbnorm μ^* und Grundraum X.

3.1 Meßbare Funktionen

Wir definieren Meßbarkeit mit Hilfe der Integrierbarkeit:

3.1 Definition $f : X \to \mathsf{R}$ heißt $\mu-$*meßbar*, Bez. $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$, wenn

$$\mathrm{m}(f,h) := \max(\min(f,h), -h) \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \forall h \in \mathcal{L}^1_+(\mu).$$

Der folgende Satz zeigt, daß $\mathcal{L}^0(\mu)$ ein i.a. "großer" VV ist

3.2 Satz a) $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^0(\mu)$

b) $\mathcal{L}^0(\mu)$ *ist ein VV*

c) *Ist* $(f_k) \subset \mathcal{L}^0(\mu)$, *so gilt:*

i. *existiert* $\lim f_k =: f \in \mathsf{R}^X$, *so ist* $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$,

ii. *existiert* $\sup f_k =: f \in \mathsf{R}^X$, *so ist* $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$,

iii. *existiert* $\inf f_k =: f \in \mathsf{R}^X$, *so ist* $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$.

Beweis: Sei $h \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$
a) Da $\mathcal{L}^1(\mu)$ VV ist mit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ auch $\mathrm{m}(f,h) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
b) Sei $f, g \in \mathcal{L}^0(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathsf{R}$, und $f_k :=\mathrm{m}(f, k \cdot h)$, $g_k :=\mathrm{m}(g, k \cdot h)$. Da

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad h(x) > 0,\ k \geq k_x \\ 0 & \text{falls} \quad h(x) = 0,\ k \geq 0 \end{cases},$$

folgt

$$\mathcal{L}^1(\mu) \ni m(\alpha f_k + b g_k, h) \to m(\alpha f + \beta g, h),$$

und da $|\mathrm{m}(\alpha f_k + b g_k, h)| \leq h$ ist nach dem Satz von Lebesgue $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^0(\mu)$.
Da $\mathrm{m}(|f|, h) = |\mathrm{m}(f,h)|$ ist $|f| \in \mathcal{L}^0(\mu)$.
c) i) Es gilt $\mathrm{m}(f_k, h) \to \mathrm{m}(f,h)$ und $\mathrm{m}(f_k, h) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $|\mathrm{m}(f_k, h)| \leq h$, also folgt die Beh. aus dem Satz von Lebesgue.
ii) Aus i) und b), da $\sup f_k = \lim \max(f_0, f_1, ..., f_k)$,
iii) folgt analog. ■

3.3 Beispiel Ist μ ein vollst. Radon-Integral auf R, so ist jede stetige Funktion $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ $\mu-$meßbar:
$\exists\, (\chi_k) \subset \mathcal{C}_c(\mathsf{R})$ mit $\chi_k \to 1$, also gilt $\mathcal{C}_c(\mathsf{R}) \ni \chi_k \cdot f \to f$.

Im folgende Satz ist c), insbesondere nachdem der allgemeine Zusammenhang von Meßbarkeit und Stetigkeit hergestellt ist, ein wichtiges Kriterium für Integrierbarkeit

3.4 Satz *Sei $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$. Äquivalent:*

a) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

b) $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

c) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ *mit* $|f| \leq g$,

d) $\mu^*(f) < \infty$.

Beweis: a)⇒b) Da $\mathcal{L}^1(\mu)$ VV.
b)⇒c) Sei $g := |f|$.
c)⇒d) $\mu^*(f) \leq \mu^*(g) < \infty$.
d)⇒a) Da $\mu^*(f) < \infty$ existiert $(h_k) \subset \mathcal{L}^1_+(\mu)$ mit $|f| \leq \sum_0^\infty h_k$ und $\sum_0^\infty (h_k) < \infty$. Sei

$$h(x) := \begin{cases} \sum_0^\infty h_k(x) & \text{falls } \sum_0^\infty h_k(x) \text{ konvergent} \\ |f(x)| & \text{sonst} \end{cases},$$

so ist nach B. Levi für Summen (Fol.2.9) $h \in \mathcal{L}_+(\mu)$ und $|f| \leq h$, also ist $f = \mathrm{m}(f, h) \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

3.2 Die Stone-Bedingung

Zum weitern Ausbau benötigen wir ein Zusatzbedingung an $\mathcal{L}^1(\mu)$:

3.5 Definition (Stone, 1948) Ein VV $\mathcal{V}$ heißt *stonesch* (oder erfüllt die *Stone-Bedingung*), wenn $\min(1, h) \in \mathcal{V} \;\; \forall h \in \mathcal{V}_+$.

Zur Überprüfung der St-B ist das folgende Lemma nützlich:

3.6 Lemma *Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ ein bzgl. μ^* dichter VV. Dann gilt $\forall A \subset X$*

$$\min(1_A, h) \in \mathcal{L}^1(\mu)\; \forall h \in \mathcal{L}^1_+(\mu) \Leftrightarrow \min(1_A, \varphi) \in \mathcal{L}^1(\mu)\; \forall \varphi \in \mathcal{V}_+ .$$

Beweis: " ⇒ " klar.
" ⇐ " : Zu $h \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ existiert $(\varphi_k) \subset \mathcal{V}$ mit
$\mu^*(h - \varphi_k) \to 0$, da $|h - \varphi_k^+| \leq |h - \varphi_k|$ ist Œ $(\varphi_k) \subset \mathcal{V}_+$.
Durch Fallunterscheidung erhält man
$g_k := |\min(1_A, h) - \min(1_A, \varphi_k)| \leq |h - \varphi_k|$,
also folgt $\mu^*(g_k) \to 0$, nach Satz 2.6 d) ist dann $\min(1_A, h) \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

3.7 Folgerung *Die St-B gilt für die Abschließung von*

a) *Radon-Integalen auf $\mathcal{C}_c(X)$,*

b) *Elementar-Integralen auf $\mathcal{E}(\mathcal{R})$.*

Beweis: a) $\min(1, \varphi) \in \mathcal{C}_c(X) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_{c,+}(X)$.

b) Ist $\varphi = \sum' \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{R})$ in Normaldarstellung, so ist
$\min(1, \varphi) = \sum' \min(1, \alpha_j) 1_{A_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$. ■

Wir setzen im Folgenden stets voraus, daß $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein stonescher VV ist.

3.3 Meßbare Mengen

3.8 Satz (und Definition) *Sei* $\mathcal{R}_\mu := \{A \subset X \mid 1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)\}$
das System der $\mu-$integrierbaren Mengen *und*
$\mathcal{A}_\mu := \{A \subset X \mid 1_A \in \mathcal{L}^0(\mu)\}$
das System der $\mu -$ meßbaren Mengen, *so gilt:*

a) $\mathcal{R}_\mu$ *ist ein Ring mit* $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{A}_\mu$,

b) $\mathcal{A}_\mu$ *ist eine* $\sigma-$*Algebra.*

Beweis: a) Da

$$1_{A \cup B} = \max(1_A, 1_B), \;\; 1_{A \setminus B} = 1_A - \min(1_A, 1_B) \qquad (*)$$

und $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein VV, ist $\mathcal{R}_\mu$ ein Ring und nach S 3.2 a) gilt $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{A}_\mu$.
b) Da $1_A \geq 0$ ist

$$\min(1_A, h) = \mathrm{m}(1_A, h) \;\forall h \in \mathcal{L}^1_+(\mu),$$

also ist die Stone-Bed. äquivalent zu $1 \in \mathcal{L}^0(\mu)$ und demnach ist $X \in \mathcal{A}_\mu$. Da $\mathcal{L}^0(\mu)$ VV, folgt aus (*), daß $\mathcal{A}_\mu$ Algebra ist.
Ist $(A_k) \subset \mathcal{A}_\mu$, $A := \bigcup A_k$, so folgt

$$\mathcal{A}_\mu \ni B_j := \bigcup_{k \leq j} A_k \nearrow A.$$

Ist $h \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, so folgt, da $|\min(1_{B_j}, h)| \leq h$, aus dem Satz von B.Levi:

$$\min(1_{B_j}, h) \nearrow \min(1_A, h) \in \mathcal{L}^1(\mu)\,. \quad ■$$

3.9 Beispiel Für das vom Zähl-Prämaß μ_z auf $\mathcal{R}_{\mathsf{N}}$ erzeugte D-I gilt nach Bsp.2.7

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu_z) \Leftrightarrow \sum |f(j)| \text{ konvergiert.}$$

Demnach ist

$$\mathcal{R}_\mu = \{A \subset \mathsf{N} \mid \#(A) < \infty\} = \mathcal{R}_{\mathsf{N}}\ ,$$

und da

$$|\mathrm{med}(f, h)| \leq h \;\; \forall h \in \mathcal{L}^1_+(\mu_z)$$

ist $\mathcal{L}^0(\mu_z) = \mathsf{R}^{\mathsf{N}}$ und $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{P}(\mathsf{N})$.

Im folgenden Satz ist a) der Ausgangspunkt für den Darstellungssatz 3.22:

3.10 Satz (und Definition) a) $\mu^0 : \mathcal{R}_\mu \to \mathsf{R}_+,\ A \mapsto \mu(1_A)\ (=: \mu(A))$ *ist ein Prämaß,* das von μ erzeugte Prämaß.

b) $m_\mu : \mathcal{A}_\mu \to \overline{\mathsf{R}}_+,\ A \mapsto \begin{cases} \mu(A), & A \in \mathcal{R}_\mu \\ \infty & \textit{sonst} \end{cases}$

ist ein Maß, das von μ erzeugte Maß.

c) m_μ *und* μ^0 *sind* vollständig*, d.h.*

$$N' \subset N \in \mathcal{R}_\mu \text{ und } \mu(N) = 0 \Rightarrow N' \in \mathcal{R}_\mu \text{ (und } \mu(N') = 0).$$

Beweis: b) Sei $A = \sum_{k \geq 0} A_k$ mit $A_k \in \mathcal{A}_\mu$, so gilt
$m_\mu(A) = \sum_{k \geq 0} m_\mu(A_k)$:
Ist eine der beiden Seiten endlich, so folgt dies aus Folg.2.9:

$$m_\mu(A) = \mu(1_A) = \sum \mu(1_{A_k}) = \sum m_\mu(A_k).$$

a) Aus b)
c) Aus $\mu^*(1_{N'}) \leq \mu^*(1_N) = 0$ folgt nach S. 2.6 e) $1_{N'} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

Bemerkung a) $\mathcal{P}(X) \to \overline{\mathsf{R}}_+,\ E \mapsto \mu^*(1_E) =: \mu^*(E)$ ist ein *äußeres Maß,* d.h.:
$\mu^*(\emptyset) = 0$, $E \subset F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$, $\mu^*(\cup_0^\infty E_j) \leq \sum_0^\infty \mu^*(E_j)$ für alle Folgen $(E_j) \subset \mathcal{P}(X)$.
Dies folgt sofort aus Satz 2.4 b),c).

b) $\mu^*|_{\mathcal{A}_\mu} = m_\mu$:
Da μ^* eine Fortsetzung von μ^0 (Satz 2.4 a)) ist noch zu zeigen:
$A \in \mathcal{A}_\mu$, $\mu^*(A) < \infty \Rightarrow A \in \mathcal{R}_\mu$.
Dies gilt aber nach Satz 3.4.

c) Ist μ Abschließung eines Elementarintegrals auf $\mathcal{E}(\mathcal{R})$, so ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_\mu$: $A \in \mathcal{R} \Rightarrow 1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Im allg. gilt $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{R}_\mu$, vgl. Abs. 3.5. Nach Def. sind μ^0 und m_μ Fortsetzungen des Prämaßes auf $\mathcal{R}$.

d) Ist μ Abschließung eines Radon-Integrals auf $\mathcal{C}_c(\mathsf{R})$, das von einem regulären Inhalt auf $\mathcal{S}_\mathsf{R}$ erzeugt wird, so ist nach Satz 2.16 μ^0 eine Fortsetzung des regulären Inhalts, und demnach ist dieser $\sigma-$additiv. Insbesondere ist das 1-dim. Volumen λ auf $\mathcal{S}_\mathsf{R}$ $\sigma-$additiv.

3.4 Approximation durch Elementarfunktionen

Wir zeigen zunächst, daß meßbare Funktionen durch die $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}_\mu$ und die Elementarfunktionen aus $\mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu)$ charakterisiert werden können:

3.11 Satz *Sei* $f : X \to \mathsf{R}$. *Äquivalent:*

a) $f \in \mathcal{L}^0(\mu)$,

b) $\{f \geq a\} \in \mathcal{A}_\mu \ \ \forall a \in \mathsf{R}$,

c) $\exists\, (\varphi_k), (\psi_k)$ *aus* $\mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu)$ *mit* $\varphi_k \nearrow f^+, \psi_k \nearrow f^-$.

Beweis: a)$\Rightarrow$b) Sei $A := \{f \geq a\}$. Nach der Stone-Bed. ist die konstante Funktion $a : X \to \mathsf{R},\ x \mapsto a\ \ \mu-$meßbar, da $\mathcal{L}^0(\mu)$ ein VV gilt $\forall k \in \mathsf{N}^*$:

$$f_k := k\,(\min(a, f) - \min(a - 1/k, f)) \in \mathcal{L}^0(\mu)\,,$$

und

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad f(x) \geq a \\ 0 & \text{falls} \quad f(x) \leq a - 1/k \end{cases} .$$

Damit folgt $f_k \to 1_A$, also nach Satz 3.2 $\ \ 1_A \in \mathcal{L}^0(\mu)$.
b)$\Rightarrow$c) Sei Œ $f \geq 0$. Für $k \geq 0$ und $j > 0$ ist nach b)

$$A_{k,j} := \{\frac{j}{2^k} > f \geq \frac{j-1}{2^k}\} = \{f \geq \frac{j-1}{2^k}\}\backslash\{f \geq \frac{j}{2^k}\} \in \mathcal{A}_\mu,$$

also ist

$$\varphi_k := \sum_{j=1}^{2^{2k}} \frac{j-1}{2^k} 1_{A_{k,j}} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_\mu)\,.$$

Zu $x \in X$ existiert ein k mit $f(x) < \frac{2^{2k}}{2^k} = 2^k$, und dazu genau ein $j \in \{1, 2, ...2^{2k}\}$ mit $x \in A_{k,j}$, also ist

$$\varphi_k(x) = \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}$$

und

$$\varphi_{k+1}(x) = \frac{2j-2}{2^{k+1}} \text{ falls } f(x) < \frac{2j-1}{2^{k+1}},$$

$$\varphi_{k+1}(x) = \frac{2j-1}{2^{k+1}} \text{ falls } f(x) \geq \frac{2j-1}{2^{k+1}}.$$

Damit folgt $\varphi_k(x) \nearrow f(x)$.
c)$\Rightarrow$a) Da $\mathcal{L}^0(\mu)$ VR ist $\mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu) \subset \mathcal{L}^0(\mu)$, a) folgt also aus Satz 3.2. ■

Bemerkung Die Aussage in c) gibt den Grundgedanken von Lebesgue bei der Def. des nach ihm benannten Integrals wieder: Im Gegensatz zum Riemann-Integral wird nicht das Definitionsintervall sondern der Wertebereich in Teilintervalle zerlegt.

3.12 Folgerung *Sind* f *und* g *in* $\mathcal{L}^0(\mu)$, $p \geq 0$, *so sind* $|f|^p$ *und* $f \cdot g$ *in* $\mathcal{L}^0(\mu)$.

Beweis: Ist $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu)$, Œ in Normaldarstellung, so ist $|\varphi|^p \in \mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu)$ und durch eine gemeinsame Normaldarstellung erhält man, daß $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu)$ (vgl. Aufg 4).

Ist $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu)$ mit $\varphi_k \to f$, so folgt $|\varphi_k|^p \to |f|^p \in \mathcal{L}^0(\mu)$, und ensprechend die zweite Beh. ■

3.5 Integration über Teilmengen

Die Integration über Teilmengen ist eine wichtige Anwendung der Meßbarkeit. Sei $A \in \mathcal{A}_\mu$ und für $f : A \to \mathsf{R}$ sei f^0 die Nullfortsetzung von f auf X.

3.13 Definition $f : A \to \mathsf{R}$ heißt *μ-integrierbar über A*, Bez.: $f \in \mathcal{L}^1(A, \mu)$, wenn $f^0 \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und dann sei

$$\mu_A(f) := \int_A f\, d\mu := \mu(f^0)$$

das *μ-Integal von f über A.*

3.14 Satz a) $g \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow g|_A \in \mathcal{L}^1(A, \mu)$,

b) $\mu_A : \mathcal{L}^1(A, \mu) \to \mathsf{R}$, $f \mapsto \int_A f\, d\mu$ *ist ein vollst. D-I.*

Beweis: a) Aus Folg 3.12 und Satz 3.4:
$(g|_A)^0 = g \cdot 1_A \in \mathcal{L}^0(\mu)$ und $|g \cdot 1_A| \leq |g| \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
b) μ_A ist D-I. Da für $h \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ nach a) $h \cdot 1_A \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$,
erhält man aus der Def. von μ^*, daß

$$\mu^*_A(f) = \mu^*(f^0) \quad \forall f : A \to \mathsf{R}.$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu_A)$, so existiert $(f_k) \in \mathcal{L}^1(A, \mu)$ mit $\mu^*_A(f - f_k) = \mu^*(f^0 - f^0_k) \to 0$, nach Satz 2.6 d) ist demnach $f^0 \in \mathcal{L}^1(\mu)$, also $f \in \mathcal{L}^1(A, \mu)$. ■

Bemerkung a) Ein Spezialfall dieser Def. und des obigen Satzes ist die Def. 2.17 und die Bem. dazu.

b) Die Aussage in Satz 3.14 a) ist der Grund dafür, daß i.a. nur Integrale über meßbare Teilmengen betrachtet werden.

Bezeichnung Ist $f : X \to \mathsf{R}$, mit $f|_A \in \mathcal{L}^1(A, \mu)$, so sei

$$\int_A f\, d\mu := \int_A f|_A\, d\mu = \int_X f \cdot 1_A\, d\mu.$$

Das folgende Lemma gibt Kriterien für die μ-Integrierbarkeit und Berechnungsformeln

3.15 Lemma *Sei* $f : A \to \mathsf{R}$.

a) *Ist* $(A_j) \subset \mathcal{A}_\mu$ *mit* $A_j \nearrow A$ *und ist* $f \in \mathcal{L}^1(A_j, \mu)\ \ \forall j$ *, so gilt:*

$$f \in \mathcal{L}^1(A,\mu) \Leftrightarrow (\int_{A_j} |f|\, d\mu) \text{ ist beschränkt}$$

und dann ist $\int_A f\, d\mu = \lim \int_{A_j} f\, d\mu$.

b) *Ist* $(B_j) \subset \mathcal{A}_\mu$ *mit* $\sum B_j = A$ *und ist* $f \in \mathcal{L}^1(B_j, \mu)\ \ \forall j$ *, so gilt:*

$$f \in \mathcal{L}^1(A,\mu) \Leftrightarrow \sum \int_{B_j} |f|\, d\mu \text{ ist konvergent}$$

und dann ist $\int_A f\, d\mu = \sum \int_{B_j} f\, d\mu$.

Beweis: a) " $\Rightarrow$ " Da

$$\int_{A_j} |f|\, d\mu = \int_A |f| \cdot 1_{A_j}\, d\mu \le \int_A |f|\, d\mu\ \forall j.$$

" $\Leftarrow$ " Da

$$f \cdot 1_{A_j} \to f$$

ist $f^0 \in \mathcal{L}^0(\mu)$, und da

$$|f| \cdot 1_{A_j} \nearrow |f|$$

folgt aus dem Satz von B.Levi, daß $|f| \in \mathcal{L}^1(A,\mu)$, also ist nach Satz 3.4
$f \in \mathcal{L}^1(A,\mu)$.
Da $\left|f \cdot 1_{A_j}\right| \le |f|$ folgt mit dem Satz von Lebesgue die Beh.
b) Aus a) mit $A_j := \sum_{k \le j} B_k$. ■

Bemerkung Nach S. 2.16 gilt: Ist f regel-integrierbar über $I \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$, so ist f Lebesgue-integrierbar über I und das Regel-Integral bzgl. λ stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein.
Diese Aussage gilt nicht für uneigentlich regel-integrierbare Funktionen, wie man am Bsp. der Funktion $f : [1,\infty[\to \mathsf{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \sin x$ nachweisen kann (Aufg.13).
Aus dem Lemma folgt jedoch:
Ist f **und** $|f|$ uneigentlich regel-integrierbar, so ist f Lebesgue-integrierbar und die Integrale sind wieder gleich; man beachte den Fall $f \ge 0$.
Mit $\int_I f\, d\lambda =: \int_I f(x)\, dx$ sei im Folgende stets das Lebesgue-Integral von f über I bezeichnet.

3.16 Beispiel $x \mapsto x^{-s} \in \mathcal{L}^1([1,\infty[,\lambda) \Leftrightarrow s > 1$,
denn

$$\int_1^k \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{1-s} x^{1-s}|_1^k & \text{für} \quad s \neq 1 \\ \ln x|_1^k & \text{für} \quad s = 1 \end{cases},$$

der Limes für $k \to \infty$ existiert also genau für $s > 1$.

Bemerkung Wegen der Aussage b) in Satz 3.14 wird im Folgenden i.a. wieder $\mu(f)$ statt $\int_A f\,d\mu$ betrachtet.

3.6 Meßbarkeit bei Radon-Integralen

In diesem Abschnitt geht die Vor. der Lokalkompaktheit des Grundraums bei Radon-Integralen wesentlich ein:

3.17 Lemma (Urysohn) *Ist X lokalkompakt, $K \subset X$ kompakt, $G \subset X$ offen mit $K \subset G$, so existiert $\chi \in \mathcal{C}_c(X)$ mit*

$$\textit{supp}\,\chi \subset G,\ 0 \leq \chi \leq 1 \textit{ und } \chi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in K.$$

Beweis: Zu jedem $x \in K$ existiert ein relativ kompakte Umgebung U_x mit $\overline{U_x} \subset G$: Da Teilmengen relativ kompakte Mengen selbst relativ kompakt sind, kann $U_x \subset U_{\varepsilon/2}(x)$ $(= \{y \,|\, d(x,y) < \varepsilon/2\})$ gewählt werden, wobei $U_\varepsilon(x) \subset G$ sei.
Da K kpt existieren endlich viele x_j mit $K \subset \bigcup' U_{x_j} =: G_1$.
Dann ist $G_1 \subset \bigcup' \overline{U_{x_j}} =: A$ mit A kompakt und $A \subset G$. Sei nun

$$\chi(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, A^c)}{\mathrm{dist}(x, K) + \mathrm{dist}(x, A^c)}\ ,$$

so ist $\chi : X \to \mathsf{R}$ def., da der Nenner stets $\neq 0$ ist: Ist $x \in K$, so existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset G_1 \subset A$. Da die Distanzfunktion stetig ist, ist χ stetig, und es gilt $0 \leq \chi \leq 1$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x, K) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in K \\ &\Leftrightarrow \quad \chi(x) = 1, \end{aligned}$$

und $\chi(x) = 0$ falls $x \notin A$. ∎

Für die weitere Untersuchung benötigen wir zunächst folgende

Bemerkung Ist $\mathcal{F}$ eine beliebige Familie von σ-Algebren auf X, so ist auch

$$\bigcap \{\mathcal{A} \,|\, \mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$$

eine σ-Algebra auf X:
Ist $A_j \in \mathcal{A}\ \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}$ und $j \in \mathsf{N}$, so ist, da $\mathcal{A}$ σ-Algebra, auch $\bigcup A_j \in \mathcal{A}\ \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}$, also ist $\bigcup A_j \in \bigcap \{\mathcal{A} \,|\, \mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$.
Analog folgen die übrigen Eigenschaften.
Zu jedem nichleeren Mengensystem $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ existiert demnach eine kleinste σ-Algebra in$\mathcal{P}(X)$, die $\mathcal{C}$ enthält, nämlich

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) := \bigcap \{\mathcal{A}\ \sigma - \mathrm{Algebra} \,|\, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\}.$$

$\mathcal{C}$ heißt *Erzeuger* von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ die *von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra.*

Da auch der Durchschnitt von Ringen bzw. Algebren wieder Ring bzw. Algebra ist (nicht jedoch der Durchschnitt von Semiringen), definiert man analog $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ und $\mathcal{R}_a(\mathcal{C})$

Wir wollen die von einem Radon-Integral erzeugte $\sigma-$Algebra untersuchen. Dazu

3.18 Definition (Borel, 1898) Sei X ein topologischer Raum, so heißt die von den offenen Mengen in X *erzeugte $\sigma-$Algebra* $\mathcal{B}(X)$ die *Borel$-\sigma-$Algebra* auf X.

Bemerkung Da $\mathcal{B}(X)$ Algebra, enthält $\mathcal{B}(X)$ alle abgeschlossenen, insbesondere alle kompakten Teilmengen von X.

Der folgende Satz verallgemeinert Bsp.3.3.

3.19 Satz *Sei μ ein Radon-Integral auf X mit erzeugter $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}_\mu$ und Ring $\mathcal{R}_\mu$, so gilt*

a) $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$,

b) $K \subset X$ *kompakt* $\Rightarrow K \in \mathcal{R}_\mu$,

c) $A \in \mathcal{A}_\mu,\ f : A \to \mathsf{R}$ *stetig* $\Rightarrow f^0 \in \mathcal{L}^0(\mu)$.

Beweis: b) Sei $K \subset X$ kpt, $\chi \in \mathcal{C}_c(X)$ aus dem Urysohn-Lemma, also

$$0 \leq \chi \leq 1 \text{ und } \chi(x) = 1 \Leftrightarrow x \in K.$$

Dann ist $\chi_k := \chi^k \in \mathcal{C}_c(X)$ und $\chi_k \searrow 1_K$, also folgt aus B.Levi $1_K \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
a) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, $\varphi \in \mathcal{C}_{c,+}(X)$, $K :=\operatorname{supp}\varphi$, so ist $A \cap K$ als abgeschlossene Teilmenge von K kompakt, also ist

$$\min(1_A, \varphi) = \min(1_{A\cap K}, \varphi) \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

nach Lemma 3.6 also $A \in \mathcal{A}_\mu$.
c) Ist $a \in \mathsf{R}$, $f(x) < a$,so existiert eine offene Umgebung U_x von x mit

$$f(y) < a \quad \forall y \in U_x \cap A.$$

Da $G := \bigcup\{U_x \,|\, x \in B\}$ offen, ist

$$\{x \in A \,|\, f(x) < a\} = G \cap A \in \mathcal{A}_\mu,$$

also ist

$$\{f^0 < a\} = \left\{ \begin{array}{cc} G \cap A \cup A^c, & a \geq 0 \\ G \cap A, & a < 0 \end{array} \right\} \in \mathcal{A}_\mu,$$

und demnach $\{f^0 \geq a\} = X\backslash\{f^0 < a\} \in \mathcal{A}_\mu$. Nach Satz 3.11 gilt also c). ■

3.20 Definition Das vom Lebesgue-Integral λ auf R erzeugte Maß

$$m_\lambda : \mathcal{A}_\lambda \ (=: \overline{\mathcal{B}(\mathsf{R})}\,) \to \overline{\mathsf{R}}_+$$

heißt *das Lebesgue-Maß auf* R, die Einschränkung von m_λ auf $\mathcal{B}(\mathsf{R})$ wird als *Borel-Maß auf* R bezeichnet.

3.7 Darstellungssätze

Der folgende Satz von Stone zeigt, daß alle D-I (die die Stone-Bedingung erfüllen) Abschließung von Elementar-Integralen sind. Dazu zunächst

3.21 Lemma *Zu jedem* $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ *existiert* $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_\mu)$ *mit* $\varphi_k \nearrow f$.

Beweis: Nach Satz 3.11 $\exists\,(\varphi_k) \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_\mu)$ mit $\varphi_k \nearrow f$. Ist

$$\varphi \leq f,\ \ \varphi = \sum{}' \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_\mu),$$

φ Œ in Normaldarstellung und $\alpha_j > 0\ \forall j$, so folgt wegen $\alpha_j 1_{A_j} \leq f$ aus Satz 3.4 $1_{A_j} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

3.22 Satz (Stone, 1948) *Jedes vollst. D-I* $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ *(mit* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *stonesch) wird durch das von ihm erzeugten Prämaß* $\mu^0 : \mathcal{R}_\mu \to \mathsf{R}_+$ *dargestellt:*
Sei $\overline{\mu^0} : \mathcal{L}^1(\mu^0) \to \mathsf{R}$ *die Abschließung des Elementar-Integrals auf* $\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$ *bzgl.* μ^0, *so ist* $\mu = \overline{\mu^0}$.

Beweis: Ist $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, so existiert nach dem Lemma $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{A}_\mu)$ mit $\varphi_k \nearrow f$ *und* $(\mu^0(\varphi_k)) = (\mu(\varphi_k))$ ist beschränkt, also gilt nach B.Levi

$$f \in \mathcal{L}^1_+(\ \mu^0) \text{ und } \overline{\mu^0}(f) = \lim \mu(\varphi_k) = \mu(f).$$

$\overline{\mu^0}$ ist demnach eine Fortsetzung von μ, da
$\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu^0)$ gilt nach Satz 2.11 $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu^0)$. ■

Bemerkung a) Die Satzaussage läßt sich durch folgendes Diagramm veranschaulichen

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{L}^1(\mu), \mu) & = & (\mathcal{L}^1(\mu^0),\ \overline{\mu^0}) \\ \downarrow & & \uparrow \\ (\mathcal{R}_\mu, \mu^0) & \to & (\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu), \mu^0) \end{array}$$

b) Wegen des Darstellungssatzes benutzen wir im Folgenden auch die maßtheoretische Schreibweise für das Integral auf $\mathcal{L}^1(\mu)$:

$$\mathcal{L}^1(\mu) \ni f \longmapsto \int f\, d\mu.$$

c) Zum maßtheoretischen Zugang zur Integrationstheorie: Man geht dort von einem beliebigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, m)$ aus, def. dazu den Ring

$$\mathcal{R} := \{A \in \mathcal{A} \mid m(A) < \infty\}$$

und das Prämaß

$$\mu : \mathcal{R} \to \mathsf{R}_+, A \mapsto m(A).$$

Der Raum $\mathcal{L}_1(\mu)$ der bzgl. μ integrierbaren Funktionen wird definiert durch

$$f \in \mathcal{L}_{1,+}(\mu) :\Leftrightarrow \exists\,(\varphi_k) \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{R}) \text{ mit } \varphi_k \nearrow f \text{ und } \int \varphi_k \, d\mu \text{ beschränkt,}$$

und das Integral von f durch $\lim \int \varphi_k \, d\mu$.
Aus dem Satz von B. Levi erhält man : Das Integral auf
$\mathcal{L}^1(\mu)$ setzt das auf $\mathcal{L}_1(\mu)$ fort. Ferner gelten die Sätze von B. Levi, Lebesgue und alle zentralen Aussagen des Teils I auch für $\mathcal{L}_1(\mu)$.

Wir wollen noch den Satz von Stone in der konkreten Situation eines Radon-Integrals auf R untersuchen:

3.23 Satz (Riesz, 1909) *Jedes vollständige Radon-Integral $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ auf R ist ein Lebesgue-Stieltjes-Integral:*
$\exists_1\, F : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ *mit F monoton wachsend, linksstetig und $F(0) = 0$, so daß $\mu = \mu_F$.*

Beweis: Nach Satz 3.19 ist $\mathcal{S}_\mathsf{R} \subset \mathcal{R}_\mu$: z.B. ist $]a, b] = \bigcup_1^\infty [a - 1/j, b] \in \mathcal{B}(\mathsf{R})$ und $]a, b] \subset [a, b] \in \mathcal{R}_\mu$.
Eindeutigkeit: Da $\mu = \mu_F$ auf $\mathcal{S}_\mathsf{R}$ folgt mit der Def. von μ_F in Bsp.2.14

$$F(x) = F(x) - F(0) = F(x-) - F(0-) = \ \mu([0, x[) \text{ falls } x \geq 0, \qquad (*)$$

$$F(x) = -(F(0) - F(x)) = -(F(0-) - F(x-)) = - \ \mu([x, 0[) \text{ falls } x \leq 0\ . \quad (**)$$

Existenz: Definiere F durch (*) und (**), so erhält man durch eine einfache Fallunterscheidung

$$\mu([a, b[) = F(b) - F(a) = \mu_F([a, b[) \ \ \forall a \leq b.$$

Mit dem Satz von B.Levi folgt daraus $\mu(I) = \mu_F(I)\ \forall I \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$: z.B. gilt für $b_k \searrow b$

$$F(b+) - F(a) = \lim F(b_k) - F(a) = \lim \mu([a, b_k[) = \mu([a, b]).$$

Ebenso folgt, daß F linksstetig ist, und F ist monoton wachsend und $F(0) = 0$.
Da jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R})$ gleichmäßiger Limes einer Folge $(\psi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{S}_R)$ ist, folgt aus dem Satz von Lebesgue, daß $\mu = \mu_F$ auf $\mathcal{C}_c(\mathsf{R})$ ist, also sind auch die Abschlüsse gleich. ■

Bemerkung Ist speziell $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$ ein vollständige Radon-Integral auf R mit $\mu(\mathsf{R}) = 1$ (also ein Wahrscheinlichkeits-Integral), so folgt aus (*) und (**) mit B. Levi

$$\lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to\infty} F(-x) = \mu([0, \infty[) + \mu(] - \infty, 0[) = \mu(\mathsf{R}) = 1.$$

F heißt *Verteilungsfunktion von μ.*

4 Ausbau der Integrationstheorie

Sei $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{R}$, $f \mapsto \int f\, d\mu$ ein vollst. D-I auf dem Grundraum X mit erzeugter $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}_\mu$ und Ring $\mathcal{R}_\mu$.

4.1 Nullmengen

Bezeichnung a) $N \in \mathcal{R}_\mu$ heißt $\mu-$*Nullmenge*, wenn $\mu(N) = 0$.

b) Wir sagen $f = g$, $f > g$, $\lim f_k = g$, ... gilt μ-*fast überall,* wenn $\{f = g\}^c$, $\{f > g\}^c$, $\{\lim f_k = g\}^c$ ... eine μ-Nullmenge ist.

In diesem Abschitt wird benutzt, daß μ vollständig ist, d.h. Teilmengen von $\mu-$Nullmengen sind wieder $\mu-$Nullmengen (Satz 3.10 c)).

Im folgenden Satz verdeutlicht a) die Aussage des Satzes von B. Levi.

4.1 Satz a) *Ist $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, $f_k \nearrow$ und $(\int f_k\, d\mu)$ beschränkt, so konvergiert (f_k) μ-f.ü.*

b) *Ist $f : X \to \mathsf{R}$, so ist äquivalent*

i. $f = 0$ $\mu-$*f.ü.*
ii. $\mu^*(f) = 0$
iii. $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und* $\int |f|\, d\mu = 0$.

c) *Ist $f = g$ $\mu-$f.ü., so gilt*

i. $\mu^*(f) = \mu^*(g)$
ii. $f \in \mathcal{L}^0(\mu) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^0(\mu)$
iii. $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mu)$
und dann ist $\int f\, d\mu = \int g d\mu$.

d) *Ist $A = \bigcup_0^\infty N_j$ mit N_j μ-Nullmenge $\forall j$, so ist A μ-Nullmenge.*

Beweis: a) Sei $N := \{ f_k \nearrow \infty\}$, und sei
$f := \lim f_k$ auf N^c, $f := 1$ auf N,
$g := \lim f_k$ auf N^c, $g := 0$ auf N,
so ist nach B. Levi $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$ $(= \lim \int f_k\, d\mu)$, also ist $1_N = f - g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\int 1_N\, d\mu = 0$.

b) i)$\Rightarrow$ii) Mit $\{f \neq 0\} =: N$ ist
$|f| \leq \sum_0^\infty 1_N$, da $1_N \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, folgt $\mu^*(f) \leq \sum_0^\infty \int 1_N\, d\mu = 0$.

ii)$\Rightarrow$iii) Satz 2.6 e) für $|f|$.

iii)$\Rightarrow$i) Sei $f_k := k|f|$, so ist $\int f_k\, d\mu = 0$ $\forall k$, nach a) ist $\{f \neq 0\} = \{f_k \nearrow \infty\}$ eine $\mu-$NM.

c) i) Mit b) folgt $\mu^*(f) \le \mu^*(g) + \mu^*(f-g) = \mu^*(g)$, also gilt i).

ii), iii) Nach b) ist $f - g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (und $\int (f-g)\,d\mu = 0$).

d) Wie in b) folgt $\mu^*(1_A) \le \sum_0^\infty \mu(N_j) = 0$. ■

4.2 Beispiel a) Für das Lebesgue-Integral λ auf R ist $\{a\} = [a,a]$ Lebesgue-NM, also ist jede abzählbare Teilmenge von R Lebesgue-NM. Nach dem Satz 4.1 c) kann man also eine Funktion in abzählbar vielen Punkten abändern, ohne die Integrierbarkeit oder den Wert des Integrals zu verändern, insbesonders ist z.B.

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{]a,b[} f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Für das Zähl- Integral μ_z (Bsp.2.7) ist
N eine μ_z–NM$\Leftrightarrow$ $N = \emptyset$.

c) Für das Dirac-Integral $\delta_a : \mathsf{R}^X \to \mathsf{R}$, $f \mapsto f(a)$ (vgl. Aufg.8) ist
N eine δ_a–NM$\Leftrightarrow$ $a \notin N$.

4.3 Beispiel a) $x \mapsto x^{-s} \in \mathcal{L}^1(]0,1],\lambda) \Leftrightarrow s < 1$, und dann ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}$$

(wie Bsp.3.16).

b) Für $t > 0$ ist

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\,dx = \lim_{k\to\infty} \frac{k!\,k^t}{t\,(t+1)...(t+k)} \quad (\textit{Gauß-Darstellung}).$$

Beweis von b): Für festes $t > 0$ und $k \in \mathsf{N}^*$ sei

$$f :]0,\infty[\to \mathsf{R},\ \ x \mapsto x^{t-1}e^{-x}\ ,$$

$$f_k :]0,\infty[\to \mathsf{R},\ \ \ x \mapsto x^{t-1}(1 - \frac{x}{k})^k \cdot 1_{]0,k]}(x).$$

Da $f, f_k \ge 0$ und uneigentlich regel-integrierbar (vgl. Bsp.3.16, 4.3 a) und Aufg.15) sind sie Lebesgue-integrierbar.
$f_k \to f$: Für $x \in]0,k]$ ist

$$(1 - \frac{x}{k})^k = \exp(k\ \ln(1 - \frac{x}{k})) = \exp(-x \frac{\ln(1-\frac{x}{k}) - \ln 1}{-\frac{x}{k}})\,,$$

also ist wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{k\to\infty} (1 - \frac{x}{k})^k = \exp(-x\ \ln'(1)) = e^{-x}.$$

$f_k \leq f$: Aus der Monotonie der Logarithmusfunktion folgt

$$f_k(x) \leq f(x) \quad \forall x > 0 \Leftrightarrow g(x) := k\, \ln(1 - \frac{x}{k}) + x \leq 0 \quad \forall x \in [0, k[,$$

da $g(0) = 0$ und $g'(x) \leq 0$ gilt die letzte Aussage.
Aus dem S.von Lebesgue folgt demnach

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim \int_0^k x^{t-1}(1 - \frac{x}{k})^k\, dx$$

und durch partielle Integration der rechten Seite erhält man die Behauptung.

4.2 Integration komplexwertiger Funktionen

Die Fortsetzung von μ ins Komplexe erfolgt durch Komplexifizierung von $\mathcal{L}^1(\mu)$ und μ :

4.4 Definition $f : X \to \mathsf{C}$ heißt
μ-meßbar, $f \in \mathcal{L}^0(\mu; \mathsf{C})$, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in $\mathcal{L}^0(\mu)$ sind,
μ-integrierbar, $f \in \mathcal{L}^1(\mu; \mathsf{C})$, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ sind, und dann sei

$$\int f\, d\mu := \int \operatorname{Re} f\, d\mu \; + \; i \int \operatorname{Im} f\, d\mu.$$

4.5 Satz a) *$\mathcal{L}^0(\mu; \mathsf{C})$ und $\mathcal{L}^1(\mu; \mathsf{C})$ sind C-VR,*
$\mathcal{L}^1(\mu; \mathsf{C}) \ni f \to \int f\, d\mu$ ist linear.

b) *Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu; \mathsf{C})$, so ist*

i. $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und* $\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$,

ii. $\overline{f} \in \mathcal{L}^1(\mu; \mathsf{C})$ *und* $\int \overline{f}\, d\mu = \overline{\int f\, d\mu}$.

Es gelten alle bisherigen Aussagen, die nicht speziell die Ordnungssruktur von R benutzen, auch in C, insbesondere der Satz von Lebesgue und das Kriterium c) in Satz 3.4:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu; \mathsf{C}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^0(\mu; \mathsf{C}) \text{ und } \exists\, g \in \mathcal{L}^1_+(\mu) \text{ mit } |f| \leq g. \qquad (*)$$

Beweis: a) Aus der Def.
b i) $|f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 \in \mathcal{L}^0(\mu)$, also ist nach Folg. 3.12 $|f| = (|f|^2)^{1/2} \in \mathcal{L}^0(\mu)$.
Da $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ ist $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
Sei $\int f\, d\mu = r\, e^{i\alpha}$ mit $r \geq 0$ und $\alpha \in \mathsf{R}$, so ist

$$r = \left|\int f\, d\mu\right| = e^{-i\,\alpha} \int f\, d\mu = \int e^{-i\,\alpha} f\, d\mu = \int \operatorname{Re}(e^{-i\,\alpha} f)\, d\mu + 0 \leq \int |f|\, d\mu$$

b ii), c) aus der Def.,
c) (*) folgt aus b i) und da

$$|\mathrm{Re}\, f| \leq |f|\,, |\mathrm{Im}\, f| \leq |f|\ . \qquad \blacksquare$$

Bemerkung Ist $f : [a, b] \to \mathsf{C}$ stetig, F eine Stammfunktion von f, also

$$f = F' := \lim_{h \to 0} \frac{F(\cdot + h) - F}{h},$$

so ist $(\mathrm{Re}\, F)' = \mathrm{Re}\, f$ und $(\mathrm{Im}\, F)' = \mathrm{Im}\, f$, und damit

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\, dx + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\, dx = \mathrm{Re}\, F|_a^b + i\ \mathrm{Im}\, F|_a^b = \ F|_a^b\,.$$

Es gilt also wieder der Hauptsatz.

Bemerkung Im Weiteren wird, wenn nichts anderes gesagt wird, der komplexe Fall mit eingeschlossen: $\mathcal{L}^0(\mu)$ und $\mathcal{L}^1(\mu)$ seien dann VR von $\mathsf{K}-$wertigen Funktionen, wobei K einer der Körper R oder C sei. Ein $\mathsf{K}-$VV sei im Falle $\mathsf{K} = \mathsf{C}$ die Komplexifizierung (wie in Def.4.4) eines $\mathsf{R}-$VV.

4.3 Parameterabhängige Integrale

$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$ für $t > 0$. Ist Γ stetig? Dazu

4.6 Satz *Sei Y ein metrischer Raum, $a \in Y$ und für $f : Y \times X \to \mathsf{K}$ gelte*

a) *$f(\cdot, x)$ ist stetig in a für jedes (feste) $x \in X$,*
b) *$f(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für jedes (feste) $y \in Y$,*
c) *$\exists\ g \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ mit $|f(y, \cdot)| \leq g\ \forall y \in Y$.*

Dann ist

$$F : Y \to \mathsf{K},\ y \mapsto \int f(y, \cdot)\, d\mu\ (:= \int f(y, x)\, d\mu(x)\,)$$

stetig in a.

Beweis: Nach b) ist F definiert. Sei $(y_k) \subset Y$ mit $y_k \to a$, und $f_k := f(y_k, \cdot)$. Nach a) gilt $f_k \to f(a, \cdot)$ und nach c) gelten die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue, also folgt

$$F(y_k) = \int f_k\, d\mu \to \int f(a, \cdot)\, d\mu = F(a). \qquad \blacksquare$$

Für die (partielle) Diff'barkeit gilt ähnlich

4.7 Satz *Sei $U \subset \mathsf{R}^n$ offen (U ein Intervall, falls $n = 1$), sei $j \in \{1, ...n\}$ fest und $f : U \times X \to \mathsf{K}$ mit*

a) *$f(\cdot, x)$ ist auf U partiell nach y_j diff'bar $\forall x \in X$,*

b) *$f(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\forall\, y \in U$,*

c) *$\exists\, g \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ mit $\left|\partial_{y_j} f(y, \cdot)\right| \le g\ \forall y \in U$.*

Dann ist

$$F : U \to \mathsf{K},\ y \mapsto \int f(y, \cdot)\, d\mu$$

partiell nach y_j diff'bar mit

$$\partial_j F(y) = \int \partial_{y_j} f(y, \cdot)\, d\mu \ \ \forall y \in U.$$

Beweis: Sei $e^j \in \mathsf{R}^n$ der $j-$te Einheitsvektor, $a \in U$ und $(t_k) \subset I \backslash \{0\}$ mit $t_k \to 0$, wobei $I \subset \mathsf{R}$ ein Intervall sei mit $a + t\, e^j \in U\ \forall t \in I$. Sei

$$f_k := \frac{1}{t_k}(f(a + t_k e^j, \cdot) - f(a, \cdot)),$$

so ist $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, $f_k \to \partial_{y_j} f(a, \cdot)$ und nach dem MWS (für C ($\simeq \mathsf{R}^2$) -wertige Funktionen falls $\mathsf{K} = \mathsf{C}$) gilt

$$|f_k| \le \sup_{t \in I} \left|\partial_{y_j} f(a + t\, e^j, \cdot)\right| \le g.$$

Nach dem S.von Lebesgue ist also $\partial_{y_j} f(a, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\begin{aligned} \int \partial_{y_j} f(a, \cdot)\, d\mu &= \lim \int f_k\, d\mu \\ &= \lim \frac{1}{t_k}\Big(\int f(a + t_k e^j, \cdot)\, d\mu - \int f(a, \cdot)\, d\mu\Big) \\ &= \partial_j F(a). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

4.8 Beispiel Berechnung von

$$F : \mathsf{R} \to \mathsf{C},\ y \mapsto \int_{\mathsf{R}} e^{-2\pi i x y}\, e^{-\pi x^2}\, dx :$$

Sei $f : \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{C}$, $(y, x) \mapsto e^{-2\pi i x y}\, e^{-\pi x^2}$, so gilt a) aus Satz 4.7.
Da $f(y.\cdot)$ $\lambda-$meßbar und $|f(y, x)| = e^{-\pi x^2}$ $\forall y, x$ gilt b), und c) ergibt sich aus

$$|\partial_y f(y, x)| = |-2\pi i x\, f(y, x)| = |2\pi x|\ \ e^{-\pi x^2} =: g(x)$$

wobei $g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ (vgl. Bsp.3.16).
Mit Lemma 3.15 folgt $\forall y \in \mathsf{R}$

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_{\mathsf{R}} e^{-2\pi ixy}\, e^{-\pi x^2}\, (-2\pi ix)\, dx = i \cdot \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-2\pi ixy}\, e^{-\pi x^2}\, (-2\pi x)\, dx \\ &= i \cdot \lim_{R\to\infty} \left(e^{-2\pi ixy}\, e^{-\pi x^2} \Big|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} e^{-2\pi ixy}\, e^{-\pi x^2}\, (-2\pi iy)\, dx \right) = -2\pi y\, F(y). \end{aligned}$$

F ist also Lösung einer linearen Differentialgleichung:

$$F(y) = F(0)\, e^{-\pi y^2}.$$

Da $\int_{\mathsf{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ (Analysis II, Bsp.6.8?) folgt mit der Substitution $\sqrt{\pi}x = t$

$$F(0) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathsf{R}} e^{-t^2}\, dt = 1.$$

4.4 $\mathcal{L}^{\mathsf{p}}$-Räume

Hier werden allgemeinere VR integrierbarer Funtionen behandelt. Neben $p = 1$ ist $p = 2$ der wichtigste Spezialfall.
Sei $\mathcal{L}^1(\mu) \ni f \mapsto \int f\, d\mu \in \mathsf{K}$ ein vollständiges D-I.

4.9 Definition Für $p \in [1, \infty[$ sei
$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f \in \mathcal{L}^0(\mu) \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)\}$
und
$\mathcal{L}^p(\mu) \ni f \mapsto (\int |f|^p\, d\mu)^{1/p} =: ||f||_p \in \mathsf{R}_+$ sei die *p-Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Bemerkung a) Nach S. 3.4 bzw. S. 4.5 c) ist obige Def. verträglich mit der von $\mathcal{L}^1(\mu)$ in Def. 2.5 bzw. 4.4.

b) Nach Satz 4.1 b) ist
$||f||_p = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0$ $\mu-$f.ü., also gilt

$$||f||_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \;\; \mu\text{-f.ü.} \;.$$

4.10 Satz a) *Seien $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, so ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$||f \cdot g||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Hölder-Ungleichung, *für $p = q = 2$:* Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

b) *Für $p \in [1, \infty[$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein K-Vektorraum, $f \mapsto ||f||_p$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$, d.h. für $\alpha \in \mathsf{K}$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt*

i. $||\alpha f||_p = |\alpha|\, ||f||_p$
ii. $||f + g||_p \le ||f||_p + ||g||_p$ Minkowski-Ungleichung.

Beweis: a) Ist $||f||_p = 0$, so ist nach obiger Bem. $f = 0$ $\mu-$f.ü., und demnach $||f \cdot g||_1 = 0$.
Analog folgt $||g||_q = 0 \Rightarrow ||f \cdot g||_1 = 0$.
Sei nun $||f||_p > 0$ und $||g||_q > 0$, und

$$f_1 := \frac{|f|^p}{||f||_p^p}, \quad g_1 := \frac{|g|^q}{||g||_q^q},$$

so ist nach Def.

$$f_1, \, g_1 \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ und } ||f_1||_1 = ||g_1||_1 = 1. \tag{+}$$

Da für $a \geq 0$ und $b \geq 0$

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

(Analysis I), folgt mit $a = f_1(x)$, $b = g_1(x)$

$$\frac{|f \cdot g|}{||f||_p \cdot ||g||_q} \leq \frac{1}{p} f_1 + \frac{1}{q} g_1. \tag{*}$$

Da $f \cdot g \in \mathcal{L}^0(\mu)$ und $f_1, \, g_1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und mit (+) und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt aus (*) durch Integration a).
b) Da $|f + g|^p \leq (2\max(|f|, |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein VR.
i) klar.
ii) $p = 1$: Aus der Dreiecksungleichung für μ^* oder direkt:

$$\int |f + g| \; d\mu \leq \int (|f| + |g|) \, d\mu = \int |f| \; d\mu + \int |g| \; d\mu.$$

Ist $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $q = \frac{p}{p-1}$, so ist $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, aus der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\int |f + g|^p \; d\mu \;\; &\leq \;\; \int |f| \; |f + g|^{p-1} \; d\mu + \int |g| \; |f + g|^{p-1} \; d\mu \\
&\leq \;\; (\int |f|^p \; d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int |f + g|^p \; d\mu)^{\frac{1}{q}} + (\int |g|^p \; d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int |f + g|^p \; d\mu)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Da Œ $||f + g||_p \neq 0$ folgt durch Multiplikation mit $(\int |f + g|^p \; d\mu)^{-\frac{1}{q}}$ b). ∎

4.11 Folgerung *Ist $X \in \mathcal{R}_\mu$ und $p_1 > p_2$, so ist $\mathcal{L}^{p_1}(\mu) \subset \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$.*

Beweis: Sei $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mu)$. Mit $p := p_1/p_2$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist
$|f|^{p_2} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $1 \in \mathcal{L}^q(\mu)$, also $|f|^{p_2} \cdot 1 \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ∎

4.5 Konvergenz in $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$

Sei $p \in [1, \infty[$. Man definiert in $\mathcal{L}^p(\mu)$ (mit der Halbnorm $|| \cdot ||_p$) topologische Begriffe wie Konvergenz, Cauchy-Folge, Vollständigkeit, Stetigkeit wie in einem normierten Raum, also z.B. für $f_k, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

$$f_k \to f \text{ in } \mathcal{L}^p(\mu) :\Leftrightarrow ||f_k - f||_p \to 0.$$

Die Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\mu)$ wird auch als *Konvergenz im $p-$ten Mittel* bezeichnet.

Bemerkung Gilt $f_k \to f$ und $f_k \to g$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$, so ist wegen

$$||f - g||_p \leq ||f_k - f||_p + ||f_k - g||_p \ \forall k$$

$||f-g||_p = 0$, also ist nach der Bem. zu Def. 4.9 $f = g$ $\mu-$f.ü.
Im allgemeinen gilt jedoch nicht $f = g$, d.h. $(\mathcal{L}^p(\mu), ||\cdot||_p)$ ist kein Hausdorff-Raum.

Viele Eigenschaften von $\mathcal{L}^1(\mu)$ gelten auch auf $\mathcal{L}^p(\mu)$. Wir zeigen exemplarisch

4.12 Satz (Satz von Lebesgue für $\mathcal{L}^p(\mu)$) *Sei $p \in [1, \infty[$, $(f_k) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_k \to f$ (punktweise) und es existiere $g \in \mathcal{L}^p_+(\mu)$ mit $|f_k| \leq g \ \forall k$.
Dann ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_k \to f$* in *$\mathcal{L}^p(\mu)$.*

Beweis: Da $|f_k - f|^p \to 0$ und

$$|f_k - f|^p \leq 2^p \max(|f_k|, |f|)^p \leq 2^p \cdot g^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

folgt aus dem Satz von Lebesgue $\int |f_k - f|^p \, d\mu \to 0$. ■

Bemerkung a) Für $p = 1$ ist dieser Satz eine Verallgemeinerung des Satzes von Lebesgue, da
$\int |f_k - f| \, d\mu \to 0 \Rightarrow \int f_k \, d\mu \to \int f \, d\mu$.
b) Der Satz von Lebesgue in $\mathcal{L}^p(\mu)$ gibt Bedingungen für

$$f_k \to f \text{ punktweise} \Rightarrow f_k \to f \text{ in } \mathcal{L}^p(\mu).$$

Für die umgekehrte Fragestellung zeigen wir zunächst

4.13 Lemma *Ist $(g_k) \subset \mathsf{K}^X$ mit $\mu^*(g_k) \to 0$, so existiert eine Teilfolge von (g_k), die μ-f.ü. gegen Null konvergiert.*

Beweis: Wähle eine Teilfolge (wieder mit (g_k) bezeichnet), so daß $\sum \mu^*(g_k)$ konvergiert, und wie im Satz 2.4 b) $(h_{kj}) \subset \mathcal{L}^1_+(\mu)$ mit

$$\sum_k |g_k| \leq \sum_{k,j} h_{kj} \text{ und } \sum_{k,j} \mu(h_{kj}) < \infty.$$

Nach Satz 4.1 a) konvergiert $\sum_{k,j} h_{kj}$ μ-f.ü., also auch $\sum_k |g_k|$. ■

Bemerkung Aus dem Lemma folgt nun:
Gilt $f_k \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$, so existiert eine Teilfolge (f_{k_j}) von (f_k) mit $f_{k_j} \to f$ μ-f.ü. ,

denn

$$||f_k - f||_p \to 0 \Rightarrow \mu^*(|f_k - f|^p) = \mu(|f_k - f|^p) \to 0.$$

Aus $f_k \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ folgt nicht $f_k \to f$ punktweise (Aufg.24).

Das zentrale Resultat dieses Abschnitts ist die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p(\mu)$.

4.14 Satz (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p(\mu)$) *Für $p \in [1, \infty[$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge $(f_k) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ konvergiert in $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

Beweis: a) (f_k) hat eine Teilfolge (f_{k_j}), die punktweise μ-f.ü. konvergiert:
Da (f_k) Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ existiert $k_1 > 0$ mit

$$||f_m - f_{k_1}||_p < \frac{1}{2} \; \forall m > k_1,$$

induktiv erhält man $k_j > k_{j-1}$ mit

$$||f_m - f_{k_j}||_p < \frac{1}{2^j} \quad \forall m > k_j. \tag{*}$$

Sei $g_j := f_{k_j} - f_{k_{j-1}}$ für $j > 0$, $f_{k_0} := 0$, so folgt aus (*) mit der Dreiecksungleichung

$$\left(\int \left(\sum_{j=1}^{n} |g_j| \right)^p d\mu \right)^{1/p} = || \sum_{j=1}^{n} |g_j| \, ||_p \leq \sum_{j=1}^{n} ||g_j||_p \leq 2 \quad \forall n.$$

Nach Satz 4.1 a) und dem Satz von B. Levi existiert eine μ-Nullmenge N mit:

$$g := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j| \cdot 1_{N^c} \right)^p \text{ konvergiert und } g \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Demnach konvergiert auch $\sum_{j=1}^{\infty} g_j \cdot 1_{N^c}$. Sei

$$f := \sum_{j=1}^{\infty} g_j \cdot 1_{N^c} = \lim f_{k_j} \cdot 1_{N^c} : X \to \mathsf{K}.$$

b) $f_k \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$: Da $\forall n$ $\mu-$f.ü. gilt

$$|f_{k_n}|^p = \left| \sum_{j=1}^{n} g_j \right|^p \leq g \in \mathcal{L}^1_+(\mu),$$

ist nach Satz 4.12 $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_{k_j} \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $k_n \in \mathsf{N}$ mit

$$||f - f_{k_n}||_p < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } ||f_{k_n} - f_k||_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq k_n.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt also $||f - f_k||_p < \varepsilon \quad \forall k \geq k_n$. ■

Wir zeigen noch, wie man von den halbnormierten Räumen $\mathcal{L}^p(\mu)$ zu normierten Räumen $L^p(\mu)$ übergeht.
Ist V ein VR mit einer Halbnorm $|\cdot|$, so wird daraus durch folgende Standardmethode ein normierter Raum:
Da $|\cdot|$ eine Halbnorm, ist $\mathcal{N} := \{v \in V \mid |v| = 0\}$ ein UVR von V, und auf $V/\mathcal{N} = \{v + \mathcal{N} \mid v \in V\}$ ist $v + \mathcal{N} \mapsto || \ v + \mathcal{N}|| := |v|$ eine Norm:
Ist $v + \mathcal{N} = w + \mathcal{N}$ so ist $v - w \in \mathcal{N}$, da $| \ |v| - |w| \ | \leq |v - w|$ folgt $|v| = |w|$.
Ist $|| \ v + \mathcal{N}|| = |v| = 0$, so ist $v \in \mathcal{N}$, also $v + \mathcal{N} = 0 \in V/\mathcal{N}$.
Ist $(V, |\cdot|)$ vollständig, so auch $(V/\mathcal{N}, || \cdot ||)$: Ist $(v_k + \mathcal{N})$ Cauchy-Folge in $V/\mathcal{N}$, so ist (v_k) Cauchy-Folge in V, also konvergiert (v_k) gegen ein v in V, und daraus folgt $v_k + \mathcal{N} \to v + \mathcal{N}$ in $V/\mathcal{N}$.

Bezeichnung Ein vollständiger normierter Raum heißt ein *Banach-Raum.*

Bemerkung Nach der Bem. zu Def. 4.9 ist

$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid ||f||_p = 0\} = \{f : X \to \mathsf{K} \mid f = 0 \ \ \mu - \text{f.ü.}\},$$

$\mathcal{N}$ ist also von p unabhängig.

Da $\mathcal{L}^p(\mu)$ vollständig, gilt nach dem eben gezeigten

4.15 Satz $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}$ *mit* $||f + \mathcal{N}||_p := ||f||_p$ *ist ein Banachraum.*

Bemerkung Für $p = 2$ ist $L^2(\mu)$ sogar ein Hilbertraum:
$(f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N}) \mapsto \int f \cdot \overline{g} \, d\mu$ ist ein Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$ mit

$$||f + \mathcal{N}||_2 = \int f \cdot \overline{f} \, d\mu \ \ \forall f + \mathcal{N} \in L^2(\mu).$$

5 Produktintegrale

In diesem Kap. wird zunächst die Konstruktion des (abstrakten) Produktintegrals durchgeführt, die zentralen Resultate sind die Sätze von Fubini und Tonelli. Wir werden im zweiten Teil der Vorlesung diese allgemeine Theorie mit der Behandlung des Lebesgue-Integral im R^n konkretisieren.

5.1 Konstruktion des Produktintegrals

Es seien auf zwei Grundräumen X und Y vollst. D-I $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{K}$ und $\nu : \mathcal{L}^1(\nu) \to \mathsf{K}$ mit erzeugten Ringen $\mathcal{R}_\mu$ und $\mathcal{R}_\nu$ gegeben. Wir wollen daraus ein vollst. D-I, das *Produktintegral* $\mu \otimes \nu$ auf dem Grundraum $X \times Y$ erzeugen. Eine der Grundforderungen dabei ist, daß

$$\int g \otimes h \, d\mu \otimes \nu = \int g \, d\mu \cdot \int h \, d\nu \quad \forall g \in \mathcal{L}^1(\mu), \;\; h \in \mathcal{L}^1(\nu), \tag{*}$$

wobei für $g : X \to \mathsf{K}$ und $h : Y \to \mathsf{K}$

$$g \otimes h : X \times Y \to \mathsf{K}, \;\; (x, y) \mapsto g(x)\, h(y)$$

das *Tensorprodukt von g und h* ist. Manchmal wird in (*) auch ausführlicher

$$\int_{X \times Y} (g \otimes h)(x, y) \, d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X g(x) \, d\mu(x) \cdot \int_Y h(y) \, d\nu(y)$$

geschrieben.
Wir benötigen zunächst die folgende

5.1 Definition a) Sind $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ UVR von K^X bzw. K^Y, so sei

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} := Span\{g \otimes h \,|\, g \in \mathcal{V}, \;\; h \in \mathcal{W}\}$$

das *Tensorprodukt von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$.*

b) Sind $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(Y)$, so sei

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} := \{A \times B \,|\, A \in \mathcal{C}, \, B \in \mathcal{D}\}.$$

c) Ist $f : X \times Y \to \mathsf{K}$ mit $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\nu) \;\; \forall\, x \in X$, so sei

$$\nu(f) : X \to \mathsf{K}, x \mapsto \nu(f(x, \cdot)).$$

Analog sei $\mu(f) : Y \to \mathsf{K}$ und $\nu^*(f)$, $\mu^*(f)$ definiert.

Bemerkung a) Da $1_{A \times B} = 1_A \otimes 1_B$ ist $\mathcal{E}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{D})$, da

$$\sum{}' \alpha_j 1_{A_j} \otimes \sum{}' \beta_k 1_{B_k} = \sum{}' \alpha_j \beta_k 1_{A_j} \otimes 1_{B_k} = \sum{}' \alpha_j \beta_k 1_{A_j \times B_k},$$

folgt

$$\mathcal{E}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathcal{E}(\mathcal{C}) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{D}).$$

b) Da $\nu(g \otimes h) = \nu(h) \cdot g$ erhält man

$$\mu(\nu(g \otimes h)) = \mu(g)\nu(h) = \nu(\mu(g \otimes h)) \;\; \forall g \in \mathcal{L}^1(\mu),\, h \in \mathcal{L}^1(\nu).$$

Zur Konstruktion des Produktintegrals sucht man UVR $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ von $\mathcal{L}^1(\mu)$ und $\mathcal{L}^1(\nu)$ und eine lineare Abb. $\mu \otimes \nu : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathsf{K}$ mit

a) $\mu \otimes \nu(g \otimes h) = \mu(g) \cdot \nu(h) \; \forall g \in \mathcal{V},\, h \in \mathcal{W}$,

b) $\mu \otimes \nu$ ist D-I,

c) $\mathcal{L}^1(\mu) \otimes \mathcal{L}^1(\nu) \subset \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$,

und definiert das Produktintegral dann als Abschließung dieses D-I.

Der folgende Satz klärt a) und gibt einige Eigenschaften zu b):

5.2 Satz *Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ UVR von $\mathcal{L}^1(\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^1(\nu)$.*

a) $\exists_1$ *eine linare Abb.* $\mu \otimes \nu : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathsf{K}$ *mit* $\mu \otimes \nu(g \otimes h) = \mu(g) \cdot \nu(h)$ $\forall\, g \in \mathcal{V},\, h \in \mathcal{W}$.

b) $\mu \otimes \nu$ *ist positiv und nullstetig.*

Beweis: a) Sei $f = \sum' g_j \otimes h_j \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ (die Darstellung ist i.a. nicht eindeutig).
Eindeutigkeit: Hat $\mu \otimes \nu : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathsf{K}$ die geforderten Eigenschaften, so ist

$$\mu \otimes \nu(f) = \sum{}' \mu(g_j)\nu(h_j) = \mu(\nu(f)).$$

Existenz: Sei $\mu \otimes \nu(f) := \mu(\nu(f))$, so erfüllt $\mu \otimes \nu$ die Bedingungen in a).

b) Ist $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \ni \varphi \geq 0$, so ist $\varphi(x, \cdot) \geq 0 \; \forall x$, da ν positiv folgt $\nu(\varphi) \geq 0$, und daraus $\mu(\nu(\varphi)) \geq 0$. Ebenso folgt für
$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \ni \varphi_k \searrow 0$ zunächst $\nu(\varphi_k) \searrow 0$, und daraus $\mu(\nu(\varphi_k)) \searrow 0$. ■

Kritisch ist außer c) einzig die Verbandseigenschaft: i.a. ist $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ kein VV, auch wenn $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ VV sind; Beispiele dafür sind $\mathcal{C}_c(X) \otimes \mathcal{C}_c(Y)$ (Aufg. 27) und auch $\mathcal{L}^1(\mu) \otimes \mathcal{L}^1(\nu)$. Für Elementarfunktionen gilt jedoch

5.3 Lemma *$\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu)$ $(= \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{R}_\nu)$) ist stonescher VV.*

Beweis: Da

$$A_1 \times B_1 \setminus A_2 \times B_2 = A_1 \backslash A_2 \times B_1 + A_1 \cap A_2 \times B_1 \backslash B_2$$

ist $\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu$ ein Semiring, $\bigcup' A_j \times B_j$ hat also nach der Bem. zu Lemma 1.14 eine disjunkte Verfeinerung. Mit φ ist demnach auch $|\varphi|$ in $\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu)$ und es folgt wie in Folg. 3.7 die Stone-Bedingung. ■

5.4 Definition Die Abschließung des Elementar-Integrals $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu)$

$$\mu \otimes \nu : \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu) \to \mathsf{K},\;\; f \mapsto \mu \otimes \nu(f) =: \int_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

heißt das *Produktintegral* $\mu \otimes \nu$ *aus* μ *und* ν.

Damit ist das anfangs formulierte Ziel erreicht:

5.5 Satz a) *Ist* $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$, $h \in \mathcal{L}^0(\nu)$, *so ist* $g \otimes h \in \mathcal{L}^0(\mu \otimes \nu)$.
b) *Ist* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $h \in \mathcal{L}^1(\nu)$, *so ist* $g \otimes h \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ *und*

$$\int_{X \times Y} g \otimes h \, d\mu \otimes \nu = \int_X g \, d\mu \int_Y h \, d\nu \, .$$

Beweis: a) Ist $A \in \mathcal{A}_\mu$, $B \in \mathcal{A}_\nu$ und $\varphi = \sum' \alpha_j 1_{A_j \times B_j} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu)$ in Normaldarstellung, so ist

$$\min(1_{A \times B}, \varphi) = \sum{}' \alpha_j 1_{(A \cap A_j) \times (B \cap B_j)} \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu),$$

also ist $1_{A \times B}$ und demzufolge auch $\mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu \times \mathcal{A}_\nu)$ in $\mathcal{L}^0(\mu \otimes \nu)$.
Nach Satz 3.11 existieren Folgen $(\psi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu)$ mit $\psi_k \to g$ und $(\chi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{A}_\nu)$ mit $\chi_k \to h$. Daraus folgt

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_\mu \times \mathcal{A}_\nu) \ni \psi_k \otimes \chi_k \to g \otimes h,$$

und damit gilt a).
b) Da $g = (\operatorname{Re} g)^+ - (\operatorname{Re} g)^+ + i(\operatorname{Im} g)^+ - i(\operatorname{Im} g)^-$ existiert nach Lemma 3.21 $(\psi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$ mit

$$\psi_k \to g \text{ und } |\psi_k| \nearrow |g|,$$

und analog $(\chi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{R}_\nu)$ mit $\chi_k \to h$, $|\chi_k| \nearrow |h|$.
Da $|\psi_k \otimes \chi_k| \nearrow |g \otimes h|$ und nach Satz 5.2

$$\mu \otimes \nu(|\psi_k \otimes \chi_k|) = \mu(|\psi_k|)\, \nu(|\chi_k|) \leq \mu(|g|)\, \nu(|h|) \quad \forall k$$

folgt aus dem Satz von B.Levi, daß $|g \otimes h| \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ und aus dem Satz von Lebesgue folgt damit b). ∎

Die Def. des Produktintegrals läßt sich auf mehrere Faktoren erweitern. Dazu

Bemerkung Ist $\omega : \mathcal{L}^1(\omega) \to \mathsf{K}$ ein weiteres vollst. D-I, so sieht man sofort, daß

$$(\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{R}_\nu)) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{R}_\omega) = \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu) \otimes (\mathcal{E}(\mathcal{R}_\nu) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{R}_\omega)),$$

und demzufolge gilt auch für die Produktintegrale

$$(\mu \otimes \nu) \otimes \omega = \mu \otimes (\nu \otimes \omega) =: \mu \otimes \nu \otimes \omega.$$

Allgemein sei

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes ... \otimes \mu_n$$

das (assoziative) Produktintegral aus den vollst. D-I μ_j (auf Grundräumen X_j).

5.2 Der Satz von Fubini

Es seien weiterhin μ und ν vollst. D-I auf Grundräumen X und Y mit dem Produktintegral $\mu \otimes \nu$ auf $X \times Y$.
Wir wollen die Formel (*) in Abs.5.1 verallgemeinern: Gesucht ist eine möglichst umfassende Klasse von Funktionen $f : X \times Y \to \mathsf{K}$ mit

$$\mu \otimes \nu(f) = \mu(\nu(f)) = \nu(\mu(f)). \tag{*}$$

Ist speziell $\nu = \mu_z$ das Zähl-Integral auf $Y = \mathsf{N}$, so lautet die rechte Gleichung in (*)

$$\int_X \sum_k f(x,k)\, d\mu(x) = \sum_k \int_X f(x,k)\, d\mu(x),$$

d.h. es geht in diesem Fall um die Vertauschung von Limes und Integral.
Wir benötigen zur Vorbereitung

5.6 Lemma *Ist $f : X \times Y \to \mathsf{K}$, $g : X \to \mathsf{R}_+$ mit $g \leq \nu^*(f)$, so gilt*

$$\mu^*(g) \leq (\mu \otimes \nu)^*(f).$$

Beweis: Sei $(\mu \otimes \nu)^*(f) < \infty$, $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu)$ mit $|f| \leq \sum \varphi_k$ und

$$\sum \mu \otimes \nu(\varphi_k) \leq (\mu \otimes \nu)^*(f) + \epsilon.$$

Da

$$|f(x,\cdot)| \leq \sum \varphi_k(x,\cdot) \text{ und } \varphi_k(x,\cdot) \in \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_\nu)\ \forall x$$

folgt $g \leq \nu^*(f) \leq \sum \nu(\varphi_k)$ und wegen $\nu(\varphi_k) \in \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_\mu)$ erhält man

$$\mu^*(g) \leq \sum \mu(\nu(\varphi_k)) = \sum \mu \otimes \nu(\varphi_k) \leq (\mu \otimes \nu)^*(f) + \epsilon\,. \quad \blacksquare$$

Das zentrale Resultat über die Produktintegration ist nun

5.7 Satz (Fubini, 1907) *Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$, so existiert μ-NM N, so daß $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\nu)\ \forall x \in N^c$. Sei*

$$G(x) := \begin{cases} \nu(f(x,\cdot)) & \text{für } x \in N^c \\ \text{beliebig} & \phantom{\text{für }} x \in N \end{cases},$$

so ist $G \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\mu \otimes \nu(f) = \mu(G)$.

Beweis: Sei $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu)$ mit $(\mu \otimes \nu)^*(f - \varphi_k) \to 0$ und

$$g_k(x) := \begin{cases} \nu^*(f - \varphi_k)(x) & \text{falls } \nu^*(f - \varphi_k)(x) < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

so gilt nach Lemma 5.6

$$\mu^*(g_k) \leq \mu^*(\nu^*(f - \varphi_k)) \leq (\mu \otimes \nu)^*(f - \varphi_k) \to 0.$$

Nach Lemma 4.13 existiert also eine Teilfolge von (g_k) (die wieder mit (g_k) bezeichnet wird) und eine μ-NM N mit
$g_k(x) \to 0\ \ \forall x \in N^c$. Daraus folgt
$\nu^*(f - \varphi_k)(x) \to 0\ \forall x \in N^c$, da $\varphi_k(x, \cdot) \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\nu)$ folgt

$$f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\nu) \quad \forall x \in N^c.$$

Da

$$|G - \nu(\varphi_k)| = |\nu(f - \varphi_k)| \leq \nu(|f - \varphi_k|) = \nu^*(|f - \varphi_k|) \quad \mu\text{-f.ü.}$$

und $\mu^*(g) = \mu^*(g_1)$ falls $g = g_1$ $\mu-$f.ü. (Satz 4.1 c)) gilt wieder nach Lemma 5.6

$$\mu^*(G - \nu(\varphi_k)) \leq (\mu \otimes \nu)^*(f - \varphi_k) \to 0$$

und da $\nu(\varphi_k) \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$ ist $G \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und mit Satz 5.2 folgt

$$\mu(G) = \lim \mu(\nu(\varphi_k)) = \lim \mu \otimes \nu(\varphi_k) = \mu \otimes \nu(f)\ . \ \blacksquare$$

Bemerkung a) Nach der Bem.b) zu Def.5.1 sind die Rollen von μ und ν vertauschbar.

b) Die übliche Schreibweise für die Aussage im Satz von Fubini ist

$$\mu \otimes \nu(f) = \mu(\nu(f)) \ \ (= \nu(\mu(f))\,)$$

oder

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).$$

Man beachte aber, daß das innere Integral i.a. nur μ-f.ü. definiert ist: man betrachte z.B. $\mu = \nu = \lambda$ und $f = 1_{\{0\} \times \mathsf{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^2, \lambda \otimes \lambda)$ (z.B. aus Lemma 3.15 oder Satz 5.13).

c) Aus der Existenz der iterierten Integrale folgt nicht deren Gleichheit, aus deren Existenz und Gleichheit folgt nicht $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ (Aufg. 28).

d) Bei mehrfachen Produkten darf wegen der Assozitivität bel. geklammert werden, z.B. ist

$$\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_n(f) = (\mu_1 \otimes ... \otimes \mu_k)((\mu_{k+1} \otimes ... \otimes \mu_n)(f))\ .$$

5.8 Beispiel (Großer Umordnungssatz) Sei $(a_{jk})_{(j,k) \in \mathsf{N} \times \mathsf{N}} \subset \mathsf{K}$ mit $\sum_{j,k} |a_{jk}|$ konvergent (vgl. Lemma 2.2). Dann gilt:
$\sum_j a_{jk}$ konvergiert absolut $\forall k$, $\sum_k(\sum_j a_{jk})$ konvergiert absolut,
und für jede Bijektion $\phi : \mathsf{N} \to \mathsf{N} \times \mathsf{N}$ gilt

$$\sum_k (\sum_j a_{jk}) = \sum_n a_{\phi(n)} =: \sum_{j,k} a_{jk}.$$

Beweis: Seien $\mu = \nu = \mu_z$ die Zähl-Integrale auf N. Nach Bsp. 2.7 ist

$$g \in \mathcal{L}^1(\mu_z) \Leftrightarrow \sum_k g(k) \text{ konvergiert absolut,}$$

und dann ist

$$\mu_z(g) = \sum_k g(k).$$

Da

$$\mu_z \otimes \mu_z(1_{A\times B}) = \mu_z(A) \cdot \mu_z(B) = \#(A \times B) \quad \forall A,\, B \in \mathcal{R}_{\mu_z}$$

ist $\mu_z \otimes \mu_z$ das Zähl-Integral auf $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$, also ist

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu_z \otimes \mu_z) \Leftrightarrow \sum_{j,k} f(j,k) \text{ konvergiert absolut,}$$

und für diese f gilt

$$\mu_z \otimes \mu_z(f) = \sum_{j,k} f(j,k).$$

Da

$$N \quad \mu_z\text{-NM} \;\Leftrightarrow\; N = \emptyset,$$

folgt aus dem Satz von Fubini, zunächst angewandt auf $|f|$, die Beh.

Als Spezialfall des Satzes von Fubini erhält man

5.9 Folgerung (Cavalieri-Prinzip, 1635) *Ist $E \in \mathcal{R}_{\mu\otimes\nu}$, so existiert μ-NM N, so daß*

$$E_x := \{y \in Y \mid (x,y) \in E\} \in \mathcal{R}_\nu \quad \forall x \in N^c$$

und mit bel. Def. von $\nu(E_x)$ für $x \in N$ gilt

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x).$$

Beweis: Man setze in Fubini $f := 1_E$ und beachte $f(x,\cdot) = 1_{E_x}$. ■

5.3 Der Satz von Tonelli

Wir benutzen weiter die Bezeichnungen aus Abs. 5.1, benötigen jedoch eine Zusatzvoraussetzung. Dazu

5.10 Definition μ heißt $\sigma-$*endlich*, wenn es eine Folge (A_k) in $\mathcal{R}_\mu$ gibt mit $A_k \nearrow X$.

5.11 Beispiel a) Das Zähl-Integral μ_z auf X ist $\sigma-$endlich $\Leftrightarrow$ X ist abzählbar.

b) Jedes vollst. Radon-Integral auf R^n, insbesondes jedes Lebesgue-Stieltjes-Integral auf R ist $\sigma-$endlich (Satz 3.19).

c) $\mu \otimes \nu$ ist $\sigma-$endlich, falls μ und ν $\sigma-$endlich.

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß μ und ν σ-endlich sind.

Der Satz von Tonelli liefert ein wichtiges Kriterium für die Integrierbarkeit im Produktraum. Der Beweis stützt sich auf den Satz von Fubini. Dazu zunächst

5.12 Lemma *Ist $f \in \mathcal{L}^0_+(\mu)$, so existiert $(f_k) \subset \mathcal{L}^1_+(\mu)$ mit $f_k \nearrow f$.*

Beweis: Sei $(A_k) \subset \mathcal{R}_\mu$ mit $A_k \nearrow X$ und
$f_k := \min(f, k \cdot 1_{A_k})$ $(\in \mathcal{L}^1_+(\mu))$. ■

5.13 Satz (Tonelli, 1909) *Sei $f \in \mathcal{L}^0(\mu \otimes \nu)$, es existiere eine μ-NM N mit $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ $\forall x \in N^c$, sei*

$$G : X \to \mathsf{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \nu(|f(x,\cdot)|) & \text{falls } x \in N^c \\ \text{beliebig} & \text{falls } x \in N \end{cases} .$$

Ist $G \in \mathcal{L}^1(\mu)$ so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$.

Beweis: Sei $(f_k) \subset \mathcal{L}^1_+(\mu \otimes \nu)$ mit $f_k \nearrow |f|$. Da
$\nu(f_k) \leq G$ μ-f.ü. ist nach Fubini

$$\mu \otimes \nu(f_k) = \mu(\nu(f_k)) \leq \mu(G) \quad \forall k,$$

also ist nach B. Levi $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$, nach Satz 3.4 also $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$. ■

Bemerkung a) Die Rollen von μ und ν sind vertauschbar.

b) Die Sätze von Fubini und Tonelli lassen sich folgendermaßen (in Kurzform) zusammenfassen:
Sei $f \in \mathcal{L}^0(\mu \otimes \nu)$, so gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu) \Leftrightarrow \int_X \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \, d\mu(x) < \infty, \tag{*}$$

und dann ist

$$\int_{X \times Y} f \, d\mu \otimes \nu = \int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x).$$

Dabei ist in (*), " $\Rightarrow$ " der Satz von Fubini für $|f|$ angewandt worden.

Als Folgerung aus dem Satz von Tonelli erhalten wir, daß das Integral einer Funktion $g \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ als "Fläche unter dem Integral" interpretiert werden kann:

5.14 Folgerung *Sei λ das Lebesgue-Integral auf R.*

a) *Ist $g \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, $E := \{(x,y) \in X \times \mathsf{R} \,|\, 0 \leq y \leq g(x)\}$, so ist $E \in \mathcal{R}_{\mu \otimes \lambda}$ und*

$$\mu \otimes \lambda(E) = \int_X g \, d\mu.$$

b) *Ist $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$, $G_g := \{(x,y) \in X \times \mathsf{R} \,|\, y = g(x)\}$ der* Graph von g, *so ist G_g eine $\mu \otimes \lambda -$NM.*

Beweis: a) Sei $f := g \otimes 1_{\mathsf{R}} - 1_X \otimes id_{\mathsf{R}}$, so ist nach Satz 5.5 $f \in \mathcal{L}^0(\mu \otimes \nu)$ und $f(x,y) = g(x) - y$. Daraus folgt

$$E = \{f \geq 0\} \cap X \times \mathsf{R}_+ \in \mathcal{A}_{\mu\otimes\lambda},$$

und da

$$1_E \geq 0 \text{ und } 1_E(x,\cdot) = 1_{[0,g(x)]}$$

folgt mit Tonelli und Fubini

$$\mu \otimes \lambda(E) = \int_X \int_{\mathsf{R}} 1_E(x,y)\, dy\, d\mu(x) = \int_X g(x)\, d\mu(x).$$

b) Mit den Bez. aus a) ist $G_g = \{f = 0\} \in \mathcal{A}_{\mu\otimes\lambda}$, und da $1_{G_g}(x,\cdot) = 1_{\{g(x)\}}$ folgt wie in a) die Beh. ■

Bemerkung Die Aussage in b) ergibt zusammen mit Satz 3.19 ein gutes Meßbarkeitskriterium in konkreten Situationen. Ein Bsp. dazu ist am Anfang des folgenden Kapitels angegeben.

5.4 Produkte von Radon-Integralen

Wir betrachten nur den für das Folgende wichtigsten Spezialfall

5.15 Satz *Sind μ und ν vollständige Radon-Integrale auf den Grundräumen $X = \mathsf{R}^n$ und $Y = \mathsf{R}^m$, so ist das Produktintegral $\mu \otimes \nu$ ebenfalls vollständiges Radon-Integral auf R^{n+m}, insbesondere liegt $\mathcal{C}_c(\mathsf{R}^{n+m})$ dicht in $\mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$.*

Beweis: a) $\mathcal{C}_c(\mathsf{R}^{n+m}) \subset \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$:
Sei $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^{n+m})$ und $\mathcal{W}_k$ eine disjunkte Zerlegung des R^{n+m} in halboffene Würfel mit Kantenlänge 2^{-k}. Sei $g_k : \mathsf{R}^{n+m} \to \mathsf{K}$ definiert durch

$$g_k|_W := \varphi(x,y) \quad \forall W \in \mathcal{W}_k \text{ mit } (x,y) \in W \text{ beliebig.}$$

Ist $W' \in \mathsf{R}^n$ ein halboffener Würfel, so ist W' als Differenz kompakter Würfel in $\mathcal{R}_\mu$, also ist $g_k \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu)$, und da φ gleichmäßig stetig, gilt $g_k \to \varphi$. Demnach ist $\varphi \in \mathcal{L}^0(\mu \otimes \nu)$ und da
$\operatorname{supp}\varphi \subset K \times H$ mit $K \subset \mathsf{R}^n,\ H \subset \mathsf{R}^m$ kompakt, ist
$|\varphi| \leq ||\varphi||_\infty \cdot 1_{K\times H} \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$, also ist $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$.
b) Sei $\omega := \mu \otimes \nu|_{\mathcal{C}_c(X\times Y)}$, so ist ω Radon-Integral. Nach Satz 2.11 ist noch zu zeigen:

$$\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu \times \mathcal{R}_\nu) \subset \mathcal{L}^1(\omega). \tag{+}$$

Ist $g : X \to \mathsf{K}$, $h : Y \to \mathsf{K}$ mit $\mu^*(g) < \infty,\ \nu^*(h) < \infty$, so existiert $(\psi_k) \subset \mathcal{C}_{c,+}(X)$ mit $|g| \leq \sum \psi_k$ und $\sum \mu(\psi_k) \leq \mu^*(g) + \epsilon$ und Œ $\sum \psi_k(x)$ konvergent $\forall x$: Sei auf der $\mu-$NM $\{\sum \psi_k = \infty\}$ (Satz 4.1 a)) $\psi_0 = |g|$, $\psi_k = 0\ \forall k > 0$. Sei analog

$(\chi_k) \subset \mathcal{C}_{c,+}(Y)$ mit $|h| \leq \sum \chi_k$ und $\sum \nu(\chi_k) \leq \nu^*(h) + \epsilon, \sum \chi_k$ konvergent.
Da nach Lemma 2.2

$$|g \otimes h| \leq \sum_k \psi_k \otimes \sum_j \chi_j = \sum_k (\psi_k \otimes \sum_j \chi_j) = \sum_k \sum_j \psi_k \otimes \chi_j = \sum_{k,j} \psi_k \otimes \chi_j \quad (**)$$

und $\psi_k \otimes \chi_j \in \mathcal{C}_{c,+}(X \times Y)$ folgt mit Satz 5.5

$$\omega^*(g \otimes h) \leq \sum_{k,j} \omega(\psi_k \otimes \chi_j) = \sum_{k,j} (\mu \otimes \nu)(\psi_k \otimes \chi_j) = \sum_{k,j} \mu(\psi_k) \cdot \nu(\chi_j).$$

Mit derselben Rechnung wie in (**) folgt

$$\omega^*(g \otimes h) \leq \sum_k \mu(\psi_k) \sum_j \nu(\chi_j) \leq (\mu^*(g) + \epsilon) \cdot (\nu^*(h) + \epsilon),$$

und somit

$$\omega^*(g \otimes h) \leq \mu^*(g) \cdot \nu^*(h). \quad (*)$$

Ist nun
$g \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$ und $(\psi_k) \subset \mathcal{C}_c(X)$ mit $\mu^*(g - \psi_k) \to 0$,
$h \in \mathcal{E}(\mathcal{R}_\nu)$ und $(\chi_k) \subset \mathcal{C}_c(Y)$ mit $\nu^*(h - \chi_k) \to 0$,
so folgt aus (*)

$$\omega^*(g \otimes h - \psi_k \otimes \chi_k) \leq \omega^*(g \otimes (h - \chi_k)) + \omega^*((g - \psi_k) \otimes \chi_k) \to 0,$$

und damit gilt (+). ■

Bemerkung Der Satz gilt auch für beliebige Radon-Integrale vgl. [Floret, Satz 13.3].

5.16 Definition Das n-fache Produkt-Integral aus dem Lebesgue-Integral λ auf R

$$\lambda^n := \underbrace{\lambda \otimes ... \otimes \lambda}_{n}$$

heißt das *Lebesgue-Integral auf* R^n.

II
Das Lebesgue-Integral im R^n

In diesem Teil wird als Grundraum der R^n und darauf das Lebesgue-Intgral $\lambda^n = \lambda \otimes \lambda \otimes ... \otimes \lambda$ betrachtet. Nach Satz 5.15 ist λ^n ein Radon-Integral, damit gelten insbesonders die Krititerin für Meßbarkeit und Integrierbarkeit aus Satz 3.19. Begiffe wie "meßbar" oder "Nullmenge", beziehen sich stets auf λ^n. Statt $\int f \, d\lambda^n$ schreiben wir auch $\int f(x) \, dx$ oder $\int_{\mathsf{R}^n} f(x) \, dx$.
Wir werden einige Resultate herleiten, die speziell für das Lebesgue-Integral im R^n gelten; diese beruhen i.W. auf der Translationsinvarianz des Lebesgue-Integrals (vgl. Satz 6.4).

6 Der Transformationssatz

6.1 Beispiele zum Satz von Fubini

Wir geben in diesem Abschnitt zunächst noch zwei direkte Anwendungsbeispiele des Satzes von Fubini.

6.1 Beispiel Sei

$$A := \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

und $f : A \to \mathsf{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot e^y$.
Nach Satz 3.19 c) ist
$h : [0, 1] \to \mathsf{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ $\lambda-$meßbar, also ist nach Folg. 5.14 b)

$$G_h = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$$

λ^2-NM und demzufolge ist $A = \overline{A} \backslash G_h$ meßbar. Wieder nach Satz 3.19 c) ist f meßbar, da f offensichlich eine integrierbare Majorante hat, folgt $f \in \mathcal{L}^1(A, \lambda^2)$. (Letzteres zeigt auch die nachfolgende Rechnung mit dem Satz von Tonelli.)
Aus dem Satz von Fubini folgt also

$$\int_A f \, d\lambda^2 = \int_{\mathsf{R}^2} f^0 \, d\lambda^2 = \int_{\mathsf{R}} (\int_{\mathsf{R}} f^0(x, y) dx) dy.$$

Da

$$A = \{(x, y) \in \mathsf{R}^2 \,|\, 0 \leq y < 1, 0 \leq x < \sqrt{1 - y^2}\}$$

ist

$$f^0(x, y) = \begin{cases} x \cdot e^y & \text{falls } 0 \leq y < 1, \ 0 \leq x < \sqrt{1 - y^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und demnach

$$\int_{\mathsf{R}} f^0(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \cdot e^y \, dx & \text{falls } 0 \leq y < 1 \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Damit folgt mit partieller Integation

$$\int_A f \, d\lambda^2 = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \cdot e^y \, dx) \, dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - y^2) e^y \, dy = \frac{1}{2} .$$

Bemerkung Die Integration in umgekehrter Reihenfolge ist komplizierter.

Das folgende Bsp. ist mit dem Cavalieri-Prinzip zu behandeln

6.2 Beispiel (Kugelvolumen) Sei für $r > 0$ $B_r^n := \{x \in \mathsf{R}^n \mid ||x|| \leq r\}$, wobei $||x|| = (\sum_1^n x_j^2)^{1/2}$ die euklidische Norm ist, und sei
$\tau_n := \lambda^n(B_1^n)$ für $n > 0$, $\tau_0 := 1$. Dann gilt

$$\lambda^n(B_r^n) = \tau_n \cdot r^n \text{ für } n \in \mathsf{N}^* \tag{1}$$

und

$$\tau_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2k+1} \text{ für } k \in \mathsf{N}. \tag{2}$$

Beweis: Da B_r^n kompakt, ist B_r^n integrierbar. Wir zeigen (1) durch Induktion nach n.
Für $n = 1$ ist $\lambda(B_r^1) = 2 \cdot r = \tau_1 \cdot r$.
$n \to n+1$: Da für $(x,t) \in \mathsf{R}^n \times \mathsf{R}$

$$1_{B_r^n}(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq r,\ ||x|| \leq \sqrt{r^2 - t^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt mit Fubini und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(B_r^{n+1}) &= \int_{\mathsf{R}} \int_{\mathsf{R}^n} 1_{B_r^{n+1}}(x,t)\, dx\, dt \\ &= \int_{-r}^{r} \int_{B^n_{\sqrt{r^2-t^2}}} 1 \ dx\, dt \\ &= \int_{-r}^{r} (r^2 - t^2)^{n/2}\, \tau_n\, dt. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = r \cos s$ folgt

$$\lambda^{n+1}(B_r^{n+1}) = \tau_n \cdot r^{n+1} \int_0^{\pi} (\sin\ s)^{n+1}\, ds =: \tau_n \cdot r^{n+1} \cdot b_{n+1}.$$

Für $r = 1$ folgt daraus

$$\tau_{n+1} = b_{n+1} \cdot \tau_n \ \forall n \in \mathsf{N}^*, \tag{*}$$

also gilt (1).
Es ist $b_0 = \pi$, $b_1 = 2$, und mit zweifacher partieller Integration erhält man $b_{n+1} = \frac{n}{n+1} b_{n-1}$. Damit folgt induktiv

$$b_{n+1}\, b_n = \frac{2\pi}{n+1}.$$

Aus (*) folgt damit

$$\tau_{n+1} = b_{n+1} \cdot b_n \cdot \tau_{n-1} = \frac{2\pi}{n+1} \cdot \tau_{n-1},$$

und daraus folgt induktiv (2).

Bemerkung Als geschlossene Formel für τ_n erhält man

$$\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ und τ_n ist maximal für $n = 5$.

6.2 Formulierung des Transformationssatzes

Der Transformationssatz verallgemeinert die Substitutionsregel. Er ist, zusammen mit dem Satz von Fubini, das wichtigste Hilfsmittel zum Umformen und Berechnen mehrdimensionaler Integrale.

6.3 Satz (Transformationssatz oder Trafo-Formel) *Seien $U,\ V \subset \mathsf{R}^n$ offen, $\phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1-$Diffeomorphismus, d.h. ϕ ist bijektiv und ϕ und ϕ^{-1} sind stetig diff'bar, und sei $f : V \to \mathsf{K}$. Dann gilt:*

$$f \in \mathcal{L}^1(V, \lambda^n) \Leftrightarrow f \circ \phi \cdot |\det D\phi| \in \mathcal{L}^1(U, \lambda^n)$$

und dann ist

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f(\phi(x)) \cdot |\det D\phi(x)|\,dx.$$

Bemerkung a) Man kann folgende Merkregel benutzen:
Mit $y = \phi(x)$ "folgt"
$dy = |\det D\phi(x)|\,dx$ und $y \in V \Leftrightarrow x = \phi^{-1}(y) \in U$.

b) Ist $n = 1$, $\varphi : [a, b] \to \mathsf{R}$ stetig diff'bar und monoton und $f : \varphi([a, b]) =: [c, d] \to \mathsf{K}$ stetig, so folgt durch die Fallunterscheidung $\varphi' \geq 0$, $\varphi' \leq 0$ aus der Substitutionregel

$$\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\,|\varphi'(x)|\,dx.$$

Die Trafo-Formel verallgemeinert also die Substitutionregel unter etwas spezielleren Voraussetzungen an ϕ.

c) Stellt man $D\phi$ durch die Funktionalmatrix $\partial\phi$ dar, so erhält man

$$\det D\phi = \det \partial\phi = \det \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1 & . & . & . & \partial_n\phi_1 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \partial_1\phi_n & . & . & . & \partial_n\phi_n \end{pmatrix}.$$

d) Die Trafo-Formel ist symmetrisch: Sei

$$f^\phi := f \circ \phi \cdot |\det D\phi|\,,\ \ \psi := \phi^{-1},$$

so folgt mit $\phi(x) = y$ aus der Kettenregel
$D\psi(y) \cdot D\phi(x) = id_{\mathsf{R}^n}$, also ist $|\det\, D\psi(y)| \cdot |\det D\phi(x)| = 1$, und demnach
$f^\phi(\psi(y))\,|\det\, D\psi(y)| = f(y)$.

Wir betrachten in den folgenden zwei Abschnitten spezielle Diffeomorphismen ("Koordinatentransformationen"):

6.3 Affine Koordinaten

Der folgende Satz macht auch Aussagen zu Abb. ϕ, die nicht injektiv sind:

6.4 Satz (Affine Transformationen) *Sei* $\phi = a + T : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ *affin, also* $a \in \mathsf{R}^n$ *und* $T \in$*Hom*(R^n), *so gilt:*
Ist $A \in \mathcal{R}_{\lambda^n}$ *so ist* $\phi(A) \in \mathcal{R}_{\lambda^n}$ *und es gilt* $\lambda^n(\phi(A)) = |\det\, T|\,\lambda^n(A)$.

Beweis: a) Ist T ein Isomorphismus, so sei in der Trafo-Formel $U = V = \mathsf{R}^n$ und $f := 1_{\phi(A)}$. Da $D\phi = T$ folgt

$$f \circ \phi \cdot |\det D\phi| = 1_A \cdot |\det T|.$$

b) Ist $\det T = 0$, so existiert ein affiner Isomorphismus $\psi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ mit
$\psi\phi(\mathsf{R}^n) \subset \mathsf{R}^{n-1} \times \{0\}$. Da $\mathsf{R}^{n-1} \times \{0\}$ Graph der Nullfunktion auf dem R^{n-1}, ist nach Folg.5.14 $\mathsf{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine λ^n-NM, also folgt aus a) und der Vollständigkeit von λ^n
$\phi(A) = \psi^{-1}(\psi\phi(A))$ ist λ^n-NM. ■

Bemerkung a) Der Satz zeigt, daß $|\det T|$ als Maß für die Volumenänderung unter T interpretiert werden kann; die Interpretation des Vorzeichens von $\det T$ als Orientierung wird in der Linearen Algebra gegeben.

b) Das Lebesgue-(Prä-)Maß ist insbesonders invariant unter *Bewegungen* $\phi = a + T$ mit T orthogonal, denn dann ist $|\det T| = 1$.

6.5 Beispiel Volumen des von $a^1, a^2, ..., a^n \in \mathsf{R}^n$ aufgespannten Parallelotops

$$P := \{x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a^j \mid \alpha_j \in [0,1],\ j = 1, 2, ..., n\}.$$

Sei T $\in$Hom(R^n) mit $Te^j = a^j,\ \ j = 1, 2, ..., n$, wobei e^j der $j-$te kanonische Einheitsvektor sei, so ist
$T([0,1]^n) = P$ und die Matrixdarstellung $M(T; (e^1, ..., e^n))$ von T bzgl. der Basis $(e^1, ..., e^n)$ ist $(a^1, ..., a^n)$. Also folgt

$$\lambda^n(P) = |\det\, T|\,\lambda^n([0,1]^n) = |\det(a^1, ..., a^n)|.$$

6.6 Beispiel Volumen des Ellipsoids

$$E := \{x \in \mathsf{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} (\frac{x_j}{r_j})^2 \leq 1\},\ \text{wobei } r_j > 0 \text{ für } j = 1, ..., n.$$

Sei $T \in$Hom(R^n), $y \mapsto (r_1 y_1, ... r_n y_n)$, so ist
$T(B_1^n) = A$ und $\det T = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n$, also folgt (vgl. Bsp.6.2)

$$\lambda^n(E) = r_1 \cdot r_2 \cdot ... \cdot r_n \cdot \tau_n \text{ mit } \tau_n = \lambda^n(B_1^n).$$

6.4 Polarkoordinaten

Wir betrachten zunächst die Situation im R^2

6.7 Satz (Ebene Polarkoordinaten) *Sei*

$$\phi : \mathsf{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathsf{R}^2, \ \ (r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta),$$

so gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^2, \lambda^2) \Leftrightarrow \ (r, \vartheta) \mapsto f(\phi(r, \vartheta) \cdot r \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}_+ \times [0, 2\pi], \lambda^2),$$

und dann gilt

$$\int_{\mathsf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y) = \int_0^{2\pi} (\int_0^{\infty} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cdot r\, dr)\, d\vartheta.$$

Im letzten Integral ist die Integrationsfolge vertauschbar.

Beweis: Sei $U := \mathsf{R}_+^* \times]0, 2\pi[$, $V := \mathsf{R}^2 \backslash (\mathsf{R}_+ \times \{0\})$, so wird in Analysis II gezeigt:
$\phi|_U : U \to V$ ist ein $\mathcal{C}^1-$Diffeomorphismus mit $\det D\phi(r, \vartheta) = r$.
Da (z.B. nach Satz 6.4)
$(\mathsf{R}_+ \times [0, 2\pi]) \backslash U$ und $\mathsf{R}^2 \backslash V$ λ^2-NM sind, folgt die Beh. aus der Trafo-Formel und dem Satz von Fubini. ∎

Bemerkung Die Integrierbarkeit kann nach Tonelli durch die sukzessive Integrierbarkeit von $(r, \vartheta) \mapsto |f(\phi(r, \vartheta)| \cdot r$ nachgewiesen werden.

6.8 Beispiel Berechnung von $\int_{\mathsf{R}} e^{-x^2}\, dx$:
Wie in Bsp. 3.16 erhält man, daß $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}, \lambda)$ ist, nach Satz 5.5 gilt also

$$\int_{\mathsf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x, y) = (\int_{\mathsf{R}} e^{-x^2}\, dx) \cdot (\int_{\mathsf{R}} e^{-y^2}\, dy) = (\int_{\mathsf{R}} e^{-x^2}\, dx)^2.$$

Andererseits folgt aus obigem Satz mit der Substitution $r^2 = t$

$$\int_{\mathsf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\vartheta = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t}\, dt = \pi,$$

und damit

$$\int_{\mathsf{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\ .$$

Wir betrachten noch eine Verallgemeinerung von Satz 6.7 auf den R^n im Falle einer *rotationssymmetrischen* Funktion $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{K}$, d.h.
$\exists\, g : \mathsf{R}_+ \to \mathsf{K}$ mit $f(x) = g(||x||) \quad \forall x \in \mathsf{R}^n$.
Für $n = 2$ erhält man in Satz 6.7
$f(\phi(r, \vartheta) = g(||\phi(r, \vartheta||) = g(r)$, und demnach

$$\int_{\mathsf{R}^2} f(x, y)\, d(x, y) = 2\pi \int_0^\infty g(r) \cdot r\, dr.$$

Zur Vorbereitung des allgemeinen Falls zeigen wir zunächst

6.9 Lemma *Sei $n \geq 2$, $U' := \{x' \in \mathsf{R}^{n-1} \,|\, ||x'|| < 1\}$ und*

$$\phi : U' \times \mathsf{R}_+^* \, (=: U) \to \mathsf{R}^{n-1} \times \mathsf{R}_+^* \, (=: V), \;\; (x', r) \mapsto (r\, x', r\, \sqrt{1 - ||x'||^2}).$$

Dann ist ϕ ein $\mathcal{C}^1-$Diffeomorphismus mit

$$\det D\phi(x', r) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - ||x'||^2}}.$$

Beweis: Sei

$$\psi : V \to U, \;\; (y', t) \mapsto (\frac{y'}{\sqrt{t^2 + ||y'||^2}}, \sqrt{t^2 + ||y'||^2}),$$

so ist $\psi \circ \phi = id_U$, $\phi \circ \psi = id_V$ und $\psi \in \mathcal{C}^1$, also ist ϕ ein $\mathcal{C}^1-$Diffeomorphismus.
Durch Entwicklung nach der letzten Zeile erhält man mit der Abkürzung
$w := \sqrt{1 - ||x'||^2}$

$$\begin{aligned}
\det D\phi(x', r) \;&=\; \det \begin{pmatrix} r & 0 & \cdot & \cdot & 0 & x_1 \\ 0 & r & 0 & \cdot & 0 & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & r & x_n \\ -\frac{rx_1}{w} & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{rx_{n-1}}{w} & w \end{pmatrix} \\
&=\; \sum_{j=1}^{n-1} -\frac{rx_j}{w}(-1)^{n+j} \det \begin{pmatrix} r & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & r & \cdot & \cdot & 0 & x_{j-1} \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & x_j \\ 0 & \cdot & \cdot & r & \cdot & \cdot & x_{j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r & x_n \end{pmatrix} + w\, r^{n-1},
\end{aligned}$$

und durch Entwicklung nach der j-ten Zeile folgt

$$\det D\phi(x', r) \;=\; \sum_{j=1}^{n-1} -\frac{rx_j}{w}(-1)^{n+j}(-1)^{n-1+j} x_j\, r^{n-2} + w\, r^{n-1}$$

$$= \frac{r^{n-1}||x'||^2}{w} + w\, r^{n-1}$$
$$= \frac{r^{n-1}}{w} \quad (> 0). \qquad \blacksquare$$

Damit erhalten wir nun den wichtigen

6.10 Satz (Trafo-Formel für rotationssymmetrische Funktionen) *Ist $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{K}$ rotationssymmetrisch, $f(x) = g(||x||)\ \ \forall x \in \mathsf{R}^n$, so gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^n, \lambda^n) \Leftrightarrow r \mapsto g(r) \cdot r^{n-1} \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}_+, \lambda)$$

und dann ist

$$\int_{\mathsf{R}^n} f(x)\, dx = n \cdot \tau_n \int_0^\infty g(r) \cdot r^{n-1}\, dr,$$

wobei $\tau_n = \lambda^n(B_1^n)$ (vgl. Bsp. 6.2).

Beweis: Ist $n = 1$, so ist $\tau_1 = 2$ und $f(x) = f(-x)$, also gilt die Beh.
Sei $n > 1$. Wir benutzen die Bez. aus dem Lemma. Da
$f(y', t) = f(y', -t)$ $(= g(||(y', t)||)$), folgt aus der Trafo-Formel mit
$(y', t) \mapsto (y', -t)$

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^{n-1} \times]0, \infty[, \lambda^n) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^{n-1} \times]-\infty, 0[, \lambda^n)$$

und die Integrale sind gleich.
Da $\mathsf{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine λ^n-NM, folgt (mit Satz 3.14 a) und Lemma 3.15 b))

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^n, \lambda^n) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(V, \lambda^n)$$

und dann gilt

$$\int_{\mathsf{R}^n} f(x)\, dx = 2 \int_V f(x)\, dx.$$

Nun ist

$$f \in \mathcal{L}^1(V, \lambda^n) \Leftrightarrow f \circ \phi\, |\det D\phi| \in \mathcal{L}^1(U, \lambda^n),$$

und wegen $||\phi(x', r)|| = r$ ist

$$f \circ \phi\, |\det D\phi(x', r)| = g(r) \cdot r^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - ||x'||^2}} =: \chi(x') \cdot h(r).$$

Damit folgt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^n, \lambda^n) \Leftrightarrow \chi \otimes h \in \mathcal{L}^1(U, \lambda^n)$$

und dann ist

$$\int_{\mathsf{R}^n} f(x)\, dx = 2 \int_V f(x)\, dx = 2 \int_U (\chi \otimes h)(x', r)\, d((x', r)) \ . \qquad (*)$$

Ist nun $f \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^n, \lambda^n)$, so ist nach dem Satz von Fubini

$$\chi(x') \cdot h \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}_+, \lambda) \quad \lambda^{n-1} - \text{f.ü.}\,,$$

da $\chi(x') > 0 \ \forall x' \in U'$ ist $h \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}_+, \lambda)$.
Für die Umkehrung sei zunächst speziell $f := 1_{B_1^n} \ (\in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^n, \lambda^n))$.
Dann ist $g = 1_{[0,1]}$, also $h \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}_+, \lambda)$.
Da nach Fubini $\chi(\cdot) \cdot h(r) \in \mathcal{L}^1(U', \lambda^{n-1})$ für fast alle r, insbesondere für ein $r \in]0, 1]$, ist also $\chi \in \mathcal{L}^1(U', \lambda^{n-1})$ und aus (*) und Satz 5.5 folgt

$$\tau_n = 2 \int_U \chi(x')\, dx' \cdot \int_0^1 r^{n-1}\, dr = 2 \int_U \chi(x')\, dx' \cdot \frac{1}{n}.$$

Mit Satz 5.5 folgt also die Beh. ■

Bemerkung Eine Verallgemeinerung des Satzes auf nicht notwendig rotationssymmetrische Funktionen wird im Teil IV behandelt.

Das folgende Bsp. gibt die wichtigsten Vergleichsfunktionen im R^n :

6.11 Beispiel a) Nach Bsp. 3.16 ist

$$r \mapsto r^{-s} \cdot r^{n-1} \in \mathcal{L}^1(]1, \infty[, \lambda) \Leftrightarrow n - 1 - s < -1,$$

also folgt

$$x \mapsto ||x||^{-s} \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}^n \setminus B_1^n, \lambda^n) \Leftrightarrow s > n\ ,$$

und dann ist

$$\int_{\mathsf{R}^n \setminus B_1^n} ||x||^{-s}\, dx = n \cdot \tau_n \int_1^\infty r^{-s+n-1}\, dr = \frac{n \cdot \tau_n}{s - n}.$$

b) Analog folgt aus Bsp. 4.2

$$x \mapsto ||x||^{-s} \in \mathcal{L}^1(B_1^n, \lambda^n) \Leftrightarrow s < n\ ,$$

mit

$$\int_{B_1^n} ||x||^{-s}\, dx = \frac{n \cdot \tau_n}{n - s}.$$

6.5 Der Beweis der Trafo-Formel

Der Beweis besteht aus drei Reduktionsschritten, in denen jeweils die Voraussetzungen der Trafo-Formel (T-F) abgeschwächt werden, im vierten Schritt wird die T-F dann durch vollständige Induktion nach n gezeigt.

6.5.1 Reduktion auf $\mathcal{C}_c(V)$

Sei $\mathcal{C}_c(V) := \{\varphi \in \mathcal{C}(V) \,|\, \operatorname{supp}\varphi \subset V, \text{kompakt}\}$, ferner sei $f^\phi := f \circ \phi \cdot |\det D\phi|$ für $f : V \to \mathsf{K}$ und λ_V^n sei das Lebesgue-Integral auf $\mathcal{L}^1(V)$ $(:= \mathcal{L}^1(V, \lambda^n)\,)$. Wir zeigen zunächst

6.12 Lemma *Ist $g \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)$, so existiert $(\varphi_j) \subset \mathcal{C}_c(V)$ mit*

$$\varphi_j \to g|_V \text{ und } |\varphi_j| \nearrow |g|_V|.$$

Beweis: Sei für $j \in \mathsf{N}^*$

$$K_j := B_j^n \cap \{x \in V \,|\, \operatorname{dist}(x, V^c) \geq \frac{1}{j}\},$$

so ist K_j kompakt und $K_j \nearrow V$. Sei $\chi_j \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)$ aus dem Urysohn-Lemma, also $0 \leq \chi_j \leq 1$ und $\chi_j \to 1_V$. Ersetzt man χ_j durch $\max(\chi_0, ..., \chi_j)$, so gilt $\chi_j \nearrow 1_V$. Für $\varphi_j := (g \cdot \chi_j)|_V \in \mathcal{C}_c(V)$ gilt dann die Beh. ■

Wir können jetzt den ersten Schritt zeigen:

$$\text{T-F } \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(V) \Rightarrow \text{T-F } \forall f \in \mathcal{L}^1(V). \qquad (\#_1)$$

Aus dem Lemma folgt zunächst: Ist $g \in \mathcal{C}_{c,+}(\mathsf{R}^n)$, so existiert $(\varphi_j) \subset \mathcal{C}_c(V)$ mit $g = \sum \varphi_j$. Da nach dem Beweis von Satz 3.14 $\mathcal{L}^1(V)$ die Abschließung von $\mathcal{C}_c|_V := \{g|_V \,|\, g \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)\}$ folgt aus der T-F auf $\mathcal{C}_c(V)$ $\forall f : V \to \mathsf{K}$:

$$\begin{aligned}
(\lambda_V^n)^*(f) &= \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_V^n(g_k) \,|\, g_k \in (\mathcal{C}_c|_V)_+,\ \ |f| \leq \sum_{k=0}^{\infty} g_k\} \\
&= \inf\{\sum_{k,j=0}^{\infty} \lambda_V^n(\varphi_{kj}) \,|\, \varphi_{kj} \in \mathcal{C}_{c,+}(V),\ \ |f| \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} \varphi_{kj}\} \\
&= \inf\{\sum_{k,j=0}^{\infty} \lambda_U^n(\varphi_{k,j}^\phi) \,|\, \varphi_{k,j} \in \mathcal{C}_{c,+}(V),\ \ |f^\phi| \leq \sum_{k,j=0}^{\infty} \varphi_{kj}^\phi\} \\
&\geq (\lambda_U^n)^*(f^\phi).
\end{aligned}$$

Ist nun $f \in \mathcal{L}^1(V)$, so $\exists\, g \in \mathcal{C}_c|_V$ mit $\lambda_V^n(|f - g|) < \varepsilon/2$, und nach Lemma 6.12 und dem Satz von Lebesgue $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}_c(V)$ mit $\lambda_V^n(|g - \varphi|) < \varepsilon/2$, also existiert $(\varphi_j) \subset \mathcal{C}_c(V)$ mit $\lambda_V^n(|f - \varphi_j|) \to 0$. Da

$$(\lambda_U^n)^*(f^\phi - \varphi_j^\phi) \leq (\lambda_V^n)^*(f - \varphi_j) \to 0,$$

ist $f^\phi \in \mathcal{L}^1(U)$ und

$$\lambda_U^n(f^\phi) = \lim \lambda_U^n(\varphi_j^\phi) = \lim \lambda_V^n(\varphi_j) = \lambda_V^n(f).$$

Aus der Symmetrie der T-F (Bem.d) zu Satz 6.3) folgt $(\#_1)$.

6.5.2 Reduktion auf $\mathcal{C}_{\mathsf{c}}(V_{\mathsf{y}})$

Wir zeigen hier, daß es genügt, die T-F lokal zu beweisen. Ein Standardhilfsmittel dafür ist

6.13 Satz (Stetige Teilung der Eins) *Sei X lokalkompakt, $K \subset X$ kompakt und $\mathcal{G}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existieren $\varphi_1, ..., \varphi_m \in \mathcal{C}_c(X)$ mit*

a) $0 \leq \varphi_j \leq 1 \ \forall j$,

b) *zu jedem φ_j existiert ein $V_j \in \mathcal{G}$ mit* $\operatorname{supp} \varphi_j \subset V_j$,

c) $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(y) = 1 \ \forall y \in K$.

Beweis: Zu jedem $y \in K$ existiert $V_y \in \mathcal{G}$ mit $y \in V_y$ und nach dem Beweis des Urysohn-Lemmas (3.17) eine relativ kompakte Umgebung $W_y \, (= U_{\varepsilon/2}(y)\ )$ von y mit $\overline{W_y} \subset V_y$. Da K kompakt, wird K von endlich viele Mengen
$W_1, ..., W_m \in \{W_y \,|\, y \in K\}$ überdeckt.
Sei nach dem Urysohn-Lemma $\chi_j \in \mathcal{C}_c(X)$ mit
$0 \leq \chi_j \leq 1$, $\operatorname{supp} \chi_j \subset V_j$ und $\chi_j|_{W_j} = 1 \ \ \forall j$ und definiere

$$\varphi_1 := \chi_1, \ \ \varphi_j := (1 - \chi_1) \cdot ... \cdot (1 - \chi_{j-1}) \cdot \chi_j \text{ für } 0 < j \leq m \tag{*}$$

Dann gelten offensichtlich a) und b). Ferner folgt aus (*) durch Induktion nach m

$$\varphi_1 + ... + \varphi_m = 1 - (1 - \chi_1) \cdot ... \cdot (1 - \chi_m), \tag{**}$$

denn die Aussage gilt für $m = 1$ und der Induktionsschritt ergibt sich aus
$\varphi_1 + ... + \varphi_m = 1 - (1 - \chi_1) \cdot ... \cdot (1 - \chi_{m-1}) + (1 - \chi_1) \cdot ... \cdot (1 - \chi_{m-1}) \cdot \chi_m$.
Ist nun $y \in K$, so $\exists\, W_j$ mit $y \in W_j$, also ist $\chi_j(y) = 1$, und demnach folgt c) aus (**). ∎

Sei nun $\varphi \in \mathcal{C}_c(V)$, $K := \operatorname{supp} \varphi$ und $\mathcal{G} = \{V_y \mid y \in K\}$ eine offene Überdeckung von K mit $y \in V_y \subset V \ \ \forall y \in K$ und $U_y := \phi^{-1}(V_y)$. Wir zeigen im 2. Schritt:

$$\int_{V_y} \psi = \int_{U_y} \psi^\phi \ \ \forall y,\, \psi \in \mathcal{C}_c(V) \text{ mit } \operatorname{supp} \psi \subset V_y \Rightarrow \int_V \varphi = \int_U \varphi^\phi. \tag{$\#_2$}$$

Dazu sei $\varphi_1, ..., \varphi_m$ ein Teilung der Eins von $K \subset V \, (=: X)$ bzgl. der V_y. Betrachtet man $y \in K$, $y \notin K$, so erhält man

$$\sum_{j=1}^{m} (\varphi \cdot \varphi_j)(y) = \varphi(y) \ \ \forall y \in V,$$

und ist $\operatorname{supp} \varphi_j \subset V_{y_j} =: V_j$, so folgt

$$\int_V \varphi = \sum_{j=1}^{m} \int_{V_j} (\varphi \cdot \varphi_j) = \sum_{j=1}^{m} \int_{U_j} (\varphi \cdot \varphi_j)^\phi = \int_U \varphi^\phi.$$

6.5.3 Reduktion auf einfache Isomorphismen

Bezeichnung Ein $\mathcal{C}^1$−Diffeomorphismus $\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_n \end{pmatrix} : U \to V$ heißt *einfach,* wenn ein $j \in \{1, ..., n\}$ existiert mit $\rho_j(x) = x_j \ \forall x \in U$.

Wir zeigen zunächst

6.14 Lemma *Für $n \geq 2$ gilt: $\forall x \in U \ \exists$ eine Umgebung $U_x \subset U$ und einfache $\mathcal{C}^1$−Diffeomorphismen $\rho : U_x \to W$, $\sigma : W \to \phi(U_x) =: V_y$ mit $\phi|_{U_x} = \sigma \circ \rho$.*

Beweis: Sei (durch Umnummerierung) Œ $\partial_n \phi_n(x) \neq 0$ und
$\tau : U \to \mathsf{R}^n$, $(x', t) \mapsto (x', \phi_n(x', t))$.
Da $\det D\tau(x) \neq 0$ existiert nach dem Satz über Umkehrfunktionen eine Umgebung $U_x \subset U$ von x, so daß

$$\rho := \tau|_{U_x} : U_x \to \tau(U_x) =: W$$

ein $\mathcal{C}^1$−Diffeomorphismus. Ferner ist ρ einfach.
$\sigma := \phi \circ \rho^{-1} : W \to V_y$ ist ebenfalls ein $\mathcal{C}^1$−Diffeomorphismus und einfach:
Für $(x', t) \in U_x$ ist

$$\rho(x', t) = (x', s) \Leftrightarrow s = \phi_n(x', t),$$

also ist $\sigma_n(x', s) = \phi_n(\rho^{-1}(x', s)) = s$. ■

Aus dem Lemma erhalten wir nun den 3. Reduktionsschritt:

$$\text{(Lokale) T-F für einfache } \mathcal{C}^1\text{-Diffeomorphismus} \Rightarrow \text{lokale T-F.} \qquad (\#_3)$$

Denn mit den Bez. des Lemmas gilt auf U_x nach der Kettenregel
$D\phi = ((D\sigma) \circ \rho)\, D\rho$, demnach folgt für $\varphi \in \mathcal{C}_c(V)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset V_y$:
$\varphi^\phi = \varphi \circ \sigma \circ \rho \cdot |\det D\sigma \circ \rho| \cdot |\det D\rho| = (\varphi^\sigma)^\rho$, also folgt aus der T-F für einfache $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus

$$\int_{V_y} \varphi = \int_W \varphi^\sigma = \int_{U_x} (\varphi^\sigma)^\rho = \int_{U_x} \varphi^\phi \ .$$

6.5.4 Beweis der T-F auf $\mathcal{C}_c(V)$

Wir beweisen die T-F auf $\mathcal{C}_c(V)$ durch Induktion nach n (vgl. den 1. Reduktionsschritt).
Nach der Bem.b) zu Satz 6.3 gilt die T-F für $n = 1$ auf $\mathcal{C}_c(I)$ falls $I \in \mathsf{R}$ ein offenes Intervall ist, also lokal, nach dem 2. Reduktionsschritt demnach auf $\mathcal{C}_c(V)$.
Schritt von $n - 1$ auf n : Wir zeigen, daß aus der T-F auf $\mathcal{C}_c(V)$ für $V \subset \mathsf{R}^{n-1}$ die T-F im R^n für einfache $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen folgt. Wegen des 2. und 3. Reduktionsschritts folgt daraus die T-F auf $\mathcal{C}_c(V)$ für $V \subset \mathsf{R}^n$.

Seien $G, H \subset \mathsf{R}^n$ offen, $\rho : G \to H$ ein einfacher $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, wobei Œ $\rho_n(x', t) = t \ \forall (x', t) \in G$. Wir definieren
$G_t := \{x' \in \mathsf{R}^{n-1} \,|\, (x', t) \in G\}$, $T := \{t \in \mathsf{R} \,|\, G_t \neq \emptyset\}$ und für $t \in T$

$$\rho_t : G_t \to \rho_t(G_t) =: H_t, \ \ x' \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(x', t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_{n-1}(x', t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} H_t &= \{y' \in \mathsf{R}^{n-1} \,|\, y' = \rho_t(x') \text{ und } (x', t) \in G\} \\ &= \{y' \in \mathsf{R}^{n-1} \,|\, (y', t) = \rho(x', t) \text{ und } (x', t) \in G\} \\ &= \{y' \in \mathsf{R}^{n-1} \,|\, (y', t) \in H\}. \end{aligned}$$

Ferner sind G_t, H_t und T offen, denn ist $U_\varepsilon(x', t) \subset G$, so ist $U_\varepsilon(x') \subset G_t$ und $U_\varepsilon(t) \subset T$, und ρ_t ist injektiv. Da

$$D\rho(x', t) = \begin{pmatrix} & & * \\ D\rho_t(x') & & \cdot \\ & & * \\ 0 \ \cdot \ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\det D\rho(x', t) = \det D\rho_t(x') \ (\neq 0). \tag{*}$$

Nach dem Satz über Umkehrfunktionen ist also $\rho_t : G_t \to H_t$ ein $\mathcal{C}^1-$Diffeomorphismus. Ist $\varphi \in \mathcal{C}_c(H)$ so ist $\forall t \in T \ \varphi(\cdot, t) \in \mathcal{C}_c(H_t)$, aus dem Satz von Fubini, der Induktionsvor. und (*) folgt dann

$$\begin{aligned} \int_H \varphi &= \int_T \int_{H_t} \varphi(y', t)\, dy'\, dt \\ &= \int_T \int_{G_t} \varphi(\rho_t(x'), t) \cdot |\det D\rho_t(x')|\, dx'\, dt \\ &= \int_G \varphi^\rho \ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

7 Faltung und Anwendungen

Die Faltung ist eine der Grundtechniken der Analysis des R^n. Wir werden mit ihr einige elementare Aussagen über Distributionen herleiten.
Sei $B_r := \{x \in \mathsf{R}^n \mid ||x|| \leq r\}$.

7.1 $\mathcal{L}^{\mathsf{p}}-$Theorie der Faltung

Sei stets $p \in [1, \infty[$.

7.1 Definition $f, g \in \mathcal{L}^0(\lambda^n)$ heißen *faltbar*, wenn eine Nullmenge $N \subset \mathsf{R}^n$ existiert, so daß

$$f(x - \cdot) \cdot g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \quad \forall x \in N^c,$$

und dann sei

$$f * g : \mathsf{R}^n \to \mathsf{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} \int_{\mathsf{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy, & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

die *Faltung von f und g*.

Bemerkung Die Faltung ist kommutativ: Für $x \in N^c$ ist $\phi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$, $y \mapsto x - y$ ein affiner Isomorphismus mit $|\det D\phi| = 1$, also ist nach der Trafo-Formel

$$f(x - \cdot) \cdot g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \Leftrightarrow f \cdot g(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$$

und

$$f * g\,(x) = \int_{\mathsf{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy = g * f\,(x).$$

Beispiele von Faltungen treten in den Vorlesungen Analysis I, II bei Konvergenzuntersuchungen von Fourierreihen mittels Dirichlet- und Fejér-Kern auf, vgl. z.B. [Barner-Flohr].
Im folgenden Satz wird die Faltung in $\mathcal{L}^p(\lambda^n)$ untersucht

7.2 Satz (Young-Ungleichung) *Ist $f \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$, $g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, so sind f und g faltbar und es gilt*

$$f * g \in \mathcal{L}^p(\lambda^n) \text{ und } ||f * g||_p \leq \; ||f||_p\, ||g||_1.$$

Beweis: a) Sei $p = 1$: Sei $\phi : \mathsf{R}^{2n} \to \mathsf{R}^{2n}$, $(x, y) \mapsto (x - y, y)$, so ist ϕ ein Isomorphismus mit $\det \phi = 1$, also ist nach der Trafo-Formel und Satz 5.5

$$(x, y) \mapsto (f \otimes g) \circ \phi\,(x, y) = f(x - y) \cdot g(y) \in \mathcal{L}^1(\lambda^{2n}).$$

Nach dem Satz von Fubini sind demnach f und g faltbar, $f * g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ und mit dem Isomorphismus $x \mapsto x + y$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|\, d\lambda^n &\le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)\, g(y)|\, dx\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\; dx)\, |g(y)|\, dy = \; ||f||_1\; ||g||_1.\end{aligned}$$

b) Sei $p > 1$: Nach Lemma 5.12 $\exists\, (f_k) \subset \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ mit $f_k \to f$ und $|f_k| \le |f|\ \forall k$, nach a) existiert eine λ^n-NM $N\, (= \bigcup N_k \cup N'\,)$ mit

$$f_k(x-\cdot)g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \text{ und } |f(x-\cdot)|^p|g| \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \quad \forall x \in N^c,\ k \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Für (festes) $x \in N^c$ folgt aus (*) zunächst
$f(x-\cdot)g \in \mathcal{L}^0(\lambda^n)$, da $f_k(x-\cdot)g \to f(x-\cdot)g$.
Ferner gilt für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|f(x-\cdot)|\, |g|^{1/p} \in \mathcal{L}^p(\lambda^n), \quad |g|^{1/q} \in \mathcal{L}^q(\lambda^n),$$

da

$$|f(x-\cdot)|\, |g| = |f(x-\cdot)|\, |g|^{1/p}\ |g|^{1/q}$$

folgt aus der Hölder-Ungleichung $f(x-\cdot)g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, also sind f und g faltbar.
Da $\forall x \in N^c$ gilt $|f_k(x-\cdot)g| \le |f(x-\cdot)g| \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, ist nach dem Satz von Lebesgue

$$\lim \int f_k(x-\cdot)g\, d\lambda^n = \int f(x-\cdot)g\, d\lambda^n,$$

mit a) ist also

$$x \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} \int f(x-\cdot)g\, d\lambda^n, & x \in N^c \\ 0 & x \in N \end{array} \right\} \in \mathcal{L}^0(\lambda^n)$$

und mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}|\int f(x-\cdot)g\, d\lambda^n|^p &\le |\int |f(x-\cdot)|\, |g|^{1/p}\ |g|^{1/q}\, d\lambda^n|^p \\ &\le \int |f(x-\cdot)|^p |g|\, d\lambda^n \cdot (\int |g|\, d\lambda^n)^{p/q} \\ &= |f|^p * |g|(x) \cdot ||g||_1^{p/q}.\end{aligned}$$

Nach a) ist $|f|^p * |g| \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ und

$$||\, |f|^p * |g|\, ||_1 \le ||\, |f|^p||_1 \cdot ||\, |g|\, ||_1 = ||f||_p^p \cdot ||g||_1.$$

Damit ist $f * g \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$ und es gilt die Abschätzung für die $p-$Halbnorm. ■

Bemerkung Die Young-Ungleichung besagt, daß für $g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ die Faltung

$$\mathcal{L}^p(\lambda^n) \ni f \mapsto f * g \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$$

stetig ist.

Die erste grundlegende Eigenschaft der Faltung ist eine Approximationsausage. Sie wird im nächsten Abschnitt in Satz 7.9 benutzt. Zur Vorbereitung zeigen wir zunächst die Stetigkeit der Translation in $\mathcal{L}^p(\lambda^n)$:

7.3 Lemma $\forall f \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$ *gilt*

$$\lim_{x\to 0} ||f(\cdot - x) - f||_p = 0.$$

Beweis: a) Ist $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)$, so gilt, da φ gleichmäßig stetig, daß $\varphi(\cdot - x)$ gleichmäßig gegen φ konvergiert für $x \to 0$, und ist $\operatorname{supp}\varphi \subset B_r$, so ist

$$|\varphi(\cdot - x)| \leq ||\varphi||_\infty \, 1_{B_{r+1}(0)} \quad \forall x \in B_1,$$

also folgt die Beh. aus dem Satz von Lebesgue.
b) Ist $f \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$, $\varepsilon > 0$, so existiert nach Aufg.25 $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)$ mit $||\varphi - f||_p < \varepsilon$ (für $p = 1$ folgt dies direkt daraus, daß λ^n ein vollst. Radon-Integral ist). Nach der Trafo-Formel ist dann auch $||\varphi(\cdot - x) - f(\cdot - x)||_p < \varepsilon \; \forall x$, also folgt aus der Dreiecksungleichung

$$||f(\cdot - x) - f||_p \leq 2\varepsilon + ||\varphi(\cdot - x) - \varphi||_p,$$

und aus a) demnach die Beh. ■

Für den folgenden Satz benötigen wir noch

Bezeichnung Ist $\chi \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ mit $\int_{\mathsf{R}^n} \chi \, d\lambda^n = 1$, so sei für $\varepsilon > 0$

$$\chi_\varepsilon := \varepsilon^{-n} \, \chi(\frac{\cdot}{\varepsilon}).$$

Für den Isomorphismus ϕ, $x \mapsto \varepsilon \cdot x$ ist $\det \phi = \varepsilon^n$, und demnach

$$\int_{\mathsf{R}^n} \chi_\varepsilon \, d\lambda^n = \int_{\mathsf{R}^n} \chi \, d\lambda^n = 1.$$

$\{\chi_\varepsilon\}$ heißt *eine Fast-Eins.* Diese Bez. erklärt sich aus

7.4 Satz *Sei* $\{\chi_\varepsilon\}$ *eine Fast-Eins.*

a) *Ist* $f \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$, *so konvergiert* $f * \chi_\varepsilon$ *in der p-Halbnorm gegen* f *für* $\varepsilon \to 0$.
b) *Ist* f *stetig und beschränkt, so konvergiert* $f * \chi_\varepsilon$ *gleichmäßig gegen* f *für* $\varepsilon \to 0$ *auf jeder Kugel* B_R.

Beweis: In beiden Fällen sind f und χ_ε faltbar (Satz 7.2, 3.4). Mit $y \mapsto \varepsilon \cdot y$ folgt

$$f * \chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathsf{R}^n} f(x - y) \, \varepsilon^{-n} \chi(\frac{y}{\varepsilon}) \, dy = \int_{\mathsf{R}^n} f(x - \varepsilon \cdot y) \, \chi(y) \, dy,$$

und da $\int_{\mathsf{R}^n} \chi \; d\lambda^n = 1$ folgt

$$|f * \chi_\varepsilon(x) - f(x)| = |\int_{\mathsf{R}^n} (f(x - \varepsilon \cdot y) \; - f(x)) \, \chi(y) \, dy|. \tag{*}$$

a) Ähnlich wie im Beweis von Satz 7.2 erhält man daraus mit der Hölder-Ungleichung und dem Satz von Fubini (für $p = 1$ folgt dies direkt aus Teil a) des Beweises von Satz 7.2)

$$\begin{aligned}\int |f * \chi_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx &\leq \int\int |f(x - \varepsilon \cdot y) - f(x)|^p |\chi(y)|\, dy\, dx \\ &= \int ||f(\cdot - \varepsilon \cdot y) - f||_p^p |\chi(y)|\, dy\,.\end{aligned}$$

Da nach der Trafo-Formel

$$||f(\cdot - \varepsilon \cdot y) - f||_p \leq 2||f||_p$$

folgt aus Lemma 7.3 und dem Satz von Lebesgue a).
b) Zu $\delta > 0$ existiert (nach dem Satz von B.Levi) ein $r > 0$ mit

$$\int_{\mathsf{R}^n \setminus B_r} |\chi(y)|\, dy < \delta,$$

da $f|_{B_{R+1}}$ gleichmäßig stetig, gibt es dazu ein $\varepsilon \in]0, 1/r]$ mit

$$|f(x - \varepsilon \cdot y) - f(x)| < \delta \quad \forall x \in B_R \text{ und } y \in B_r.$$

Aus (*) folgt dann

$$\begin{aligned}||(f * \chi_\varepsilon - f)|_{B_R}||_\infty &\leq \sup_{x \in B_R,\, y \in B_r} |f(x - \varepsilon \cdot y) - f(x)| \int_{B_r} |\chi(y)|\, dy \\ &\quad +2\,||f||_\infty \int_{\mathsf{R}^n \setminus B_r} |\chi(y)|\, dy \\ &\leq \delta\,(1 + 2\,||f||_\infty)\,.\end{aligned}$$

■

7.2 Der Grundraum $\mathcal{D}(\mathsf{R}^n)$

7.5 Definition Sei $\mathcal{C}^\infty(\mathsf{R}^n) := \bigcap_{k \in \mathsf{N}} \mathcal{C}^k(\mathsf{R}^n)$ und

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathsf{R}^n) := \mathcal{C}^\infty(\mathsf{R}^n) \cap \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)$$

der *Distributionen-Grundraum* oder der *Raum der Testfunktionen.*

Wir wollen in diesem Abschnitt u.a. zeigen, daß $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{L}^p(\lambda^n)$ ist. Dazu zunächst

7.6 Beispiel Sei

$$\psi : \mathsf{R}_+ \to \mathsf{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-t}), & t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases},$$

so ist $\psi \in \mathcal{D}(\mathsf{R})$ (vgl. z.B. [Forster 1, (22.2)]). Sei

$$\varphi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}, \quad x \mapsto \psi(||x||^2).$$

Da $x \mapsto ||x||^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{R}^n)$ und φ in einer Umgebung der 0 in $\mathcal{C}^\infty$ ist, ist $\varphi \in \mathcal{D}(\mathsf{R}^n)$ und $\operatorname{supp}\varphi = B_1$.
Sei $\chi := ||\varphi||_1^{-1} \cdot \varphi$, so ist $||\chi||_1 = 1$, $\{\chi_\varepsilon\}$ ist demnach eine Fast-Eins aus $\mathcal{D}$.

Die günstigen Eigenschaften von $\mathcal{D}$ bzgl. Integration und Differentiation werden in folgendem Lemma und Satz benutzt. Zuvor noch

7.7 Definition $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{K}$ heißt *lokal integrierbar,* Bez. $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)$, wenn für alle Kompakta $K \subset \mathsf{R}^n$ gilt: $f \in \mathcal{L}^1(K, \lambda^n)$.

Einig elementare Eigenschaften gibt

7.8 Lemma a) i. $\mathcal{C}(\mathsf{R}^n) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)$,
ii. $\mathcal{L}^p(\lambda^n) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n) \;\; \forall p \in [1, \infty[$,
iii. $\mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n) \subset \mathcal{L}^0(\lambda^n)$.
b) *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)$, *so sind* f *und* φ *faltbar und* $f \cdot \varphi \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$.

Beweis: a) i) Aus Satz 3.19, ii) folgt aus und der Hölder-Ungleichung, vgl. Folg. 4.11, iii) gilt, da $f \cdot 1_{B_k} \to f$.
b) Da

$$|f \cdot \varphi(x - \cdot)| \le ||\varphi||_\infty \cdot 1_{\operatorname{supp}\varphi(x-\cdot)} \cdot |f| \;\; \forall x, \tag{*}$$

sind f und φ faltbar, die zweite Aussage folgt ebenso. ■

Die zweite wichtige Eigenschaft der Faltung ist die Diff'barkeitsaussage in

7.9 Satz a) *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, *so gilt*
i. $f * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{R}^n)$ *und* $\forall$ *Multiindizes* $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathsf{N}^n$ *ist*

$$\partial^\beta(f * \varphi) := \partial_1^{\beta_1} ... \partial_n^{\beta_n}(f * \varphi) = f * \partial^\beta \varphi.$$

ii. *Existiert* $r > 0$ *mit* $f|_{B_r^c} = 0$, *so ist* $f * \varphi \in \mathcal{D}$.

b) $\mathcal{D}$ *liegt dicht in* $\mathcal{L}^p(\lambda^n)$ *(bzgl. der* $p-$*Halbnorm).*

Beweis: a i) Da nach der Kettenregel

$$\partial_j(f(y)\,\varphi(\cdot - y)) = f(y)(\partial_j\varphi)(\cdot - y)$$

und $\partial_j\varphi \in \mathcal{D}$, sind nach (*) die Voraussetzungen von Satz 4.7 erfüllt, also ist $f * \varphi$ partiell diff'bar. Aus Satz 4.6 erhält man die Stetigkeit der partiellen Ableitungen, und durch induktive Anwendung auf $f * \partial^\beta\varphi$ folgt i).
ii) Ist $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R$, so ist $f \cdot \varphi(x - \cdot) = 0 \;\; \forall x \notin B_{r+R}$.
b) Wähle zu $f \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$ und $\delta > 0$ ein $g \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}^n)$ mit $||f - g||_p < \delta/2$ (Aufg. 25). Sei $\chi \in \mathcal{D}$ mit $\int \chi \, d\lambda^n = 1$, so ist nach a) $g * \chi_\varepsilon \in \mathcal{D}$ und nach Satz 7.4 gilt $g * \chi_\varepsilon \to g$ in $\mathcal{L}^p(\lambda^n)$. Die Beh. folgt also aus der Dreiecksungleichung. ■

7.3 Distributionen

7.10 Definition Eine lineare Abbildung $\eta : \mathcal{D} \to \mathsf{K}$, Bez: $\eta \in \mathcal{D}^*$, heißt eine *Distribution.*

Bemerkung Üblicherweise werden nur *stetige* lineare Abb. $\eta : \mathcal{D} \to \mathsf{K}$, wobei $\mathcal{D}$ eine geignete Topologie trägt, als Distributionen bezeichnet.

7.11 Beispiel a) Jedes Radon-Integral μ auf dem R^n erzeugt durch $\mu|_{\mathcal{D}}$ eine Distribution, speziell heißt

$$\delta_a : \mathcal{D} \to \mathsf{K}, \;\; \varphi \mapsto \varphi(a)$$

die *Delta-Distribution in* $a \in \mathsf{R}^n$, $\delta := \delta_0$ heißt *Delta-Distribution (in* 0).

b) Ist $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)$, so ist (vgl. Lemma 7.8 b))

$$\eta_f : \mathcal{D} \to \mathsf{K}, \;\; \varphi \mapsto \int f \cdot \varphi \, d\lambda^n$$

eine Distribution, die *von f erzeugte Distribution.*

Distributionen werden auch als *verallgemeinerte Funktionen* bezeichnet. Dies erklärt sich aus folgendem

7.12 Satz a) *Ist $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)$ und $\eta_f = 0$, so ist $f = 0$ f.ü.*

b) $T : L^1_{loc}(\lambda^n) \to \mathcal{D}^*$, $f + \mathcal{N} \mapsto \eta_f$ *ist injektiv.*

Dabei sei $L^1_{loc}(\lambda^n) := \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)/\mathcal{N}$ wie $L^p(\lambda^n)$ (vgl. Satz 4.15) definiert.

Beweis: a) Sei $\{\chi_\varepsilon\}$ eine Fast-Eins aus $\mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\chi \subset B_1$, so gilt $\forall k \in \mathsf{N}^*$, $x \in B_k$ und $\varepsilon \in]0, 1]$: $\operatorname{supp}\chi_\varepsilon(x - \cdot) \subset B_{k+1}$, also ist

$$0 = \eta_f(\chi_\varepsilon(x - \cdot)) = \int_{B_{k+1}} f \cdot \chi_\varepsilon(x - \cdot) \, d\lambda^n = f \cdot 1_{B_{k+1}} * \chi_\varepsilon(x).$$

Mit Satz 7.4 folgt

$$\begin{aligned} ||f \cdot 1_{B_k}||_1 &= ||(f \cdot 1_{B_{k+1}} * \chi_\varepsilon - f \cdot 1_{B_{k+1}}) \cdot 1_{B_k}||_1 \\ &\leq ||f \cdot 1_{B_{k+1}} * \chi_\varepsilon - f \cdot 1_{B_{k+1}}||_1 \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Also ist $f \cdot 1_{B_k} = 0$ f.ü. (Satz 4.1 b)), und da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, folgt $f = 0$ f.ü.

b) T ist (wohl-)definiert und linear und nach a) ist $\operatorname{Kern}T = \{\mathcal{N}\}$ und $\mathcal{N} = 0 \in L^1_{loc}(\lambda^n)$. ■

Bemerkung a) $L^1_{loc}(\lambda^n)$ kann also in natürliche Weise als UVR von $\mathcal{D}^*$ aufgefasst werden. Die Abb. T ist nicht surjektiv: z.B. wird δ_a nicht von einem $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^n)$ erzeugt (Aufg.38).

b) Durch die Abb. T übertragen sich in natürlicher Weise Definitionen für Funktionen auf Distributionen. Wir betrachten exemplarisch die Ableitung. Dazu zunächst folgendes elementare

7.13 Lemma *Ist* $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathsf{R}^n)$, *so gilt* $\forall j \in \{1, ..., n\}$

$$\int \partial_j f \, d\lambda^n = 0.$$

Beweis: Sei $\operatorname{supp} f \subset [a, b]^n$ und Œ $j = 1$. Aus dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz folgt

$$\begin{aligned} \int \partial_1 f \, d\lambda^n &= \int_{[a,b]^{n-1}} \left[\int_a^b \partial_1 f(t, \cdot) \, dt \right] d\lambda^{n-1} \\ &= \int_{[a,b]^{n-1}} [f(b, \cdot) - f(a, \cdot)] \, d\lambda^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

■

Bemerkung Aus dem Lemma folgt: Ist $f \in \mathcal{C}^1(\mathsf{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, so ist

$$0 = \int \partial_j (f \cdot \varphi) \, d\lambda^n = \int \partial_j f \cdot \varphi \, d\lambda^n + \int f \cdot \partial_j \varphi \, d\lambda^n$$

und demnach

$$\eta_{\partial_j f}(\varphi) = \int \partial_j f \cdot \varphi \, d\lambda^n = - \int f \cdot \partial_j \varphi \, d\lambda^n = -\eta_f(\partial_j \varphi).$$

Man definiert deshalb allgemein

7.14 Definition Ist $\eta \in \mathcal{D}^*$, so sei

$$\partial_j \eta : \mathcal{D} \to \mathsf{K}, \quad \varphi \mapsto -\eta(\partial_j \varphi)$$

die *j-te partielle Ableitung von* η.

Offensichtlich ist $\partial_j \eta$ wieder eine Distribution.

7.15 Beispiel Sei $f := 1_{]0,\infty[}$ $(\in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda))$ die *Heavyside-Funktion,* so gilt $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ nach dem Hauptsatz

$$\partial \eta_f(\varphi) = -\eta_f(\partial \varphi) = - \int_0^\infty \partial \varphi \, d\lambda = \varphi(0),$$

also ist $\partial \eta_f = \delta$.

Bemerkung Da mit η auch $\partial_j \eta$ in $\mathcal{D}^*$, sind alle partiellen Ableitungen von η definiert: Sei für $\beta \in \mathsf{N}^n$ $|\beta| := \beta_1 + ... + \beta_n$, so folgt durch $|\beta|-$fache Anwendung der Formel für $\partial_j \eta$

$$\partial^\beta \eta(\varphi) = (-1)^{|\beta|} \eta(\partial^\beta \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Da die partiellen Ableitungen von φ vertauschbar sind, gilt dies auch für die partiellen Ableitungen von η.

Dies ist bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen von Bedeutung. Wir betrachten dazu noch ein einfaches

7.16 Beispiel Ist $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$, $f := 1_{\mathsf{R}} \otimes g \,(\in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda^2)\,)$, so ist $\eta_f \in \mathcal{D}(\mathsf{R}^2)$ Lösung von $\partial_1\partial_2\eta_f = 0$, denn mit Fubini folgt $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathsf{R}^2)$ aus Lemma 7.13

$$\partial_1\partial_2\eta_f(\varphi) = \int f \cdot \partial_1\partial_2\varphi \, d\lambda^2 = \int g(y) \left(\int \partial_1\partial_2\varphi(x,y)\, dx \right) dy = 0.$$

Die **Funktion** f ist stets Lösung von $\partial_2\partial_1 f = 0$, i.a. aber nicht von $\partial_1\partial_2 f = 0$.

8 Die Fouriertransformation

Dies ist (neben der Faltung) die wichtigste "Integral-Transformation". Es sei $\langle x|y\rangle := \sum x_j y_j$ das kanonische Skalarprodukt auf dem R^n und für $y \in \mathsf{R}^n$ sei

$$\omega_y : \mathsf{R}^n \to \mathsf{C}, \quad x \mapsto e^{-2\pi i\langle x|y\rangle}.$$

In diesem Kapitel sei stets $\mathsf{K} = \mathsf{C}$.

8.1 Die Fouriertransformation in $\mathcal{L}^1(\lambda^n)$

Da $\forall y \in \mathsf{R}^n$ ω_y stetig ist und $|\omega_y| \leq 1$ gilt, ist mit $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ auch $\omega_y \cdot f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$.

8.1 Definition Ist $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, so heißt

$$\hat{f} : \mathsf{R}^n \to \mathsf{C}, \quad y \mapsto \int \omega_y \cdot f \, d\lambda^n = \int_{\mathsf{R}^n} e^{-2\pi i\langle x|y\rangle} \cdot f(x) \, dx$$

die *Fouriertransformierte von* $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$.

8.2 Beispiel a) Sei $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$, $x \mapsto e^{-\pi||x||^2}$, so ist nach Satz 6.10 $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, und mit Satz 5.5 und Bsp. 4.8 folgt $\forall y \in \mathsf{R}^n$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \int_{\mathsf{R}^n} e^{-2\pi i\langle x|y\rangle} \cdot e^{-\pi||x||^2} \, dx \\
&= \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathsf{R}} e^{-2\pi i x_j y_j} \cdot e^{-\pi x_j^2} \, dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{n} e^{-\pi y_j^2} = f(y).
\end{aligned}$$

b) Sei $f = 1_{[-r,r]}$, so ist

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \int_{-r}^{r} e^{-2\pi i x y} \, dx \\
&= \frac{1}{-2\pi i y}(e^{-2\pi i r y} - e^{2\pi i r y}) \\
&= 2r \cdot \operatorname{sinc}(ry),
\end{aligned}$$

wobei

$$\operatorname{sinc} : \mathsf{R} \to \mathsf{R}, \quad y \to \begin{cases} \frac{\sin(2\pi y)}{2\pi y} & \text{falls } y \neq 0 \\ 1 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$$

der *Sinus cardinalis* sei.
Nach Aufgabe 13 ist $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\lambda)$.

Der folgende Satz gibt elementare Eigenschaften der Fourier-Transformation. Wir benötigen zuvor noch eine

Bezeichnung a) Für $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{C}$ sei $\overset{\vee}{f}: \mathsf{R}^n \to \mathsf{C}$, $x \mapsto f(-x)$.

b) Für $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ sei $\widetilde{f}: \mathsf{R}^n \to \mathsf{C}$, $x \mapsto \int \omega_{-x} \cdot f \, d\lambda^n$.

c) Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $p_j : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$, $x \mapsto x_j$.

8.3 Satz *Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$. Dann gilt*

a) $\hat{f}$ *ist stetig und beschränkt,* $|| \hat{f} ||_\infty \leq ||f||_1$.

b) $(f(\alpha\cdot))^\wedge = |\alpha|^{-n} \cdot \hat{f} (\frac{\cdot}{\alpha}) \; \forall \alpha \in \mathsf{R}\backslash\{0\}$.

c) $(f(\cdot - a))^\wedge = \omega_a \cdot \hat{f} \quad \forall a \in \mathsf{R}^n$.

d) i. $\widetilde{f} = \overset{\wedge}{\overset{\vee}{f}} \left(:= \left(\overset{\vee}{f}\right)^\wedge\right) = \overset{\vee}{\hat{f}}$,

ii. $\overline{\hat{f}} = \widetilde{\overline{f}}$.

e) $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

f) $\hat{f} \cdot g$ *und* $f \cdot \hat{g}$ *sind in* $\mathcal{L}^1(\lambda^n)$ *und* $\int \hat{f} \cdot g \, d\lambda^n = \int f \cdot \hat{g} \, d\lambda^n$.
Analog gilt $\int \widetilde{f} \cdot g \, d\lambda^n = \int f \cdot \widetilde{g} \, d\lambda^n$.

g) *Ist* $p_j \cdot f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, *so ist* $\hat{f}$ *stetig partiell nach* y_j *diff'bar und*

$$\partial_j \hat{f} = -2\pi i (p_j \cdot f)^\wedge .$$

h) *Ist* f *stetig partiell nach* x_j *diff'bar und* $\partial_j f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, *so ist*

$$(\partial_j f)^\wedge = 2\pi i p_j \cdot \hat{f} .$$

Beweis: a) Nach Satz 4.6 ist $\hat{f}$ stetig und $| \hat{f} (y)| \leq \int |f| \, d\lambda^n \; \forall y \in \mathsf{R}^n$.
b)-d i) folgen direkt aus der Trafo-Formel, z.B. folgt mit $x \mapsto x/\alpha$

$$\int_{\mathsf{R}^n} e^{-2\pi i \langle x|y \rangle} \cdot f(\alpha \cdot x) \, dx = |\alpha|^{-n} \int_{\mathsf{R}^n} e^{-2\pi i \langle x|\frac{y}{\alpha} \rangle} \cdot f(x) \, dx.$$

d ii) folgt aus Satz 4.5 :

$$\overline{\int e^{-2\pi i \langle x|y \rangle} \cdot f(x) \, dx} = \int e^{2\pi i \langle x|y \rangle} \cdot \overline{f(x)} \, dx \quad \forall y \in \mathsf{R}^n.$$

e) Nach Satz 7.2 und dessen Beweis ist $f * g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ und

$(x,z) \mapsto f(x-z) \cdot g(z) \in \mathcal{L}^1(\lambda^{2n})$, also folgt aus dem Satz von Fubini und mit c)

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(y) &= \int e^{-2\pi i\langle x|y\rangle} \int f(x-z) \cdot g(z)\, dz\, dx \\ &= \int g(z) \int e^{-2\pi i\langle x|y\rangle} f(x-z)\, dx\, dz \\ &= \int g(z) e^{-2\pi i\langle z|y\rangle} \hat{f}(y)\, dz \\ &= \hat{f}(y) \cdot \hat{g}(y) \quad \forall y \in \mathsf{R}^n.\end{aligned}$$

f) Nach a) ist $\hat{f} \cdot g$ und $f \cdot \hat{g}$ in $\mathcal{L}^1(\lambda^n)$, da ferner $f \otimes g \in \mathcal{L}^1(\lambda^{2n})$ folgt

$$\int \left(\int \omega_y(x) f(x)\, dx \right) g(y) dy = \int \left(\int \omega_x(y) g(y)\, dy \right) f(x)\, dx\,.$$

Die zweite Formel folgt ebenso.
g) Nach Satz 4.7 ist $\hat{f}$ partiell nach y_j diff'bar, durch Ableitung unter dem Integral erhält man

$$\partial_j \hat{f}(y) = -2\pi i \int_{\mathsf{R}^n} e^{-2\pi i\langle x|y\rangle} \cdot x_j \cdot f(x)\, dx$$

und nach a) ist $\partial_j \hat{f}$ stetig.
h) Ist $g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, so folgt aus

$$\int_k^\infty \inf_{t \in [k,\infty[} |g(t)|\, d\lambda \le \int_k^\infty |g|\, d\lambda < \infty \quad \forall k \in \mathsf{N}:$$

Es existiert eine Folge $(r_k) \subset \mathsf{R}$ mit $r_k \to \infty$ und $g(r_k) \to 0$.
Analog $\exists\, (s_k) \subset \mathsf{R}$ mit $s_k \to -\infty$ und $g(s_k) \to 0$.
Nun ist (bei festem $y \in \mathsf{R}^n$) nach Fubini

$$g := \int_{\mathsf{R}^{n-1}} \omega_y(x', \cdot)\, f(x', \cdot)\, dx' \in \mathcal{L}^1(\lambda),$$

wobei g auf einer NM beliebig def. sei.
Sei Œ $j = n$, so folgt mit obigen Bez. aus dem Satz von Lebesgue und dem Hauptsatz

$$\int \omega_y(x) \partial_n f(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathsf{R}^{n-1}} \int_{s_k}^{r_k} \omega_y(x', t) \partial_n f(x', t)\, dt\, dx'$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathsf{R}^{n-1}} \left(\omega_y(x', \cdot) f(x', \cdot)|_{s_k}^{r_k} + 2\pi i y_n \int_{s_k}^{r_k} \omega_y(x', t) f(x', t)\, dt \right) dx'$$

$$= 2\pi i y_n \int_{\mathsf{R}^n} \omega_y(x) f(x)\, dx\,. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung Durch die Fourier-Transformation werden also analytische Operationen wie Ableitung oder Faltung in einfache algebraische Operationen überführt. Dies sind, zusammen mit der Umkehrformel, wesentliche Eigenschaften für die Anwendungen der Fourier-Transformation.

8.4 Beispiel Sei $f := 1_{[-1,1]}$ und $g := f * f$, so ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathsf{R}} 1_{[-1,1]}(x-y) \cdot 1_{[-1,1]}(y)\,dy \\ &= \lambda([x-1, x+1] \cap [-1,1]) \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & |x| \geq 2 \\ x+2 & x \in]-2,0] \\ -x+2 & x \in]0,2[\end{array} \right\} = \max(0, 2-|x|)\,. \end{aligned}$$

Nach e) und Bsp. 8.2 ist dann

$$\hat{g} = (\hat{f})^2 = 4 \cdot (\mathrm{sinc})^2.$$

8.2 Die Umkehrformel

Der folgende Satz zeigt, daß die Umkehrung der Fourier-Transformation dieselbe Struktur hat wie die Fourier-Transformation selbst. Dies ist eine der zentralen Eigenschaften der Fourier-Transformation.

8.5 Satz (Umkehrformel) *Sind f und $\hat{f}$ in $\mathcal{L}^1(\lambda^n)$, so gilt: $\exists_1 f_c \in \mathcal{C}(\mathsf{R}^n)$ mit $f_c = f$ f.ü. Für f_c gilt*

$$f_c(x) = \int \omega_{-x}\,\hat{f}\,d\lambda^n = \tilde{\hat{f}}(x) \ \ \forall x \in \mathsf{R}^n. \qquad (*)$$

Beweis: Sei $\chi(x) = e^{-\pi||x||^2}$, $\varepsilon > 0$, so folgt für $x \in \mathsf{R}^n$ mit Satz 8.3 , der Substitution $y \mapsto \varepsilon \cdot y$ und da $\chi = \hat{\chi}$ (Bsp. 8.2)

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) :&= \int \chi(\varepsilon\,\cdot)\omega_{-x}\,\hat{f}\,d\lambda^n \\ &= \int \chi(\varepsilon\,\cdot)(f(\cdot + x))^\wedge\,d\lambda^n \\ &= \int (\chi(\varepsilon\,\cdot))^\wedge f(\cdot + x)\,d\lambda^n \\ &= \int \hat{\chi}_\varepsilon\, f(\cdot + x)\,d\lambda^n \\ &= \chi_\varepsilon * f(x), \end{aligned}$$

letzteres mit $y \mapsto -y$ und da $\chi(-\cdot) = \chi$.

Da $\int \chi \, d\lambda^n = \hat{\chi}(0) = 1$, konvergiert nach Satz 7.4 $\chi_\varepsilon * f$ gegen f in $\mathcal{L}^1(\lambda^n)$ für $\varepsilon \to 0$. Nach der Bem. zu Lemma 4.13 existiert dann eine Nullfolge (ε_k) mit $\chi_{\varepsilon_k} * f \to f$ f.ü. Da $\chi(0) = 1$, konvergiert $g_{\varepsilon_k}(x)$ nach dem Satz von Lebesgue gegen $\int \omega_{-x} \hat{f} \, d\lambda^n$. Also ist $f = \tilde{\hat{f}} =: f_c$ f.ü. und nach Satz 4.6 ist $\tilde{\hat{f}}$ stetig.
Eindeutigkeit: Sind g, h stetig (in x) und $g = h$ f.ü., so ist $g = h$
(bzw. $g(x) = h(x)$). ■

Bemerkung a) Die Umkehrformel kann als kontinuierliches Analogon zur Darstellung einer Funktion durch ihre Fourierreihe gesehen werden:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \omega_k \, f \, d\lambda \right) \cdot \omega_{-k}.$$

b) Ist $n = 1$ und faßt man f als Funktion der Zeit t auf, so läßt sich wegen der Umkehrformel

$$f(t) = \int e^{2\pi i y t} \hat{f}(y) \, dy$$

$\hat{f}$ als Frequenzzerlegung von f deuten: $\hat{f}(y)$ gibt den Anteil der harmonischen Schwingung $t \to e^{2\pi i y t}$ mit Frequenz y in f an.

c) Ist $f, \hat{f}$ in $\mathcal{L}^1(\lambda^n)$, so folgt mit demselben Beweis $f = \tilde{\hat{f}}$ f.ü.

8.6 Folgerung *Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$, so ist $f = g$ f.ü.*

Beweis: $h := f - g \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ und $\hat{h} = 0$, also ist nach (*) $h = 0$ f.ü. ■

8.7 Beispiel Aus Bsp. 8.4 folgt mit der Umkehrformel

$$\max(0, 2 - |x|) = 4 \int_R e^{2\pi i x y} \cdot (\operatorname{sinc} y)^2 \, dy \; (= 4 \int_R \cos 2\pi x y \cdot (\operatorname{sinc} y)^2 \, dy).$$

Für $x = 0$ folgt mit $y \mapsto y/2\pi$

$$\pi = \int_R \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy.$$

8.3 L^2–Theorie der Fouriertransformation

Die FT auf $\mathcal{L}^1$ ist (trotz der Umkehrformel) unsymmetrisch: Ist $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, so folgt nicht $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, vgl. Bsp. 8.2. Durch die "Fortsetzung" der FT auf $L^2(\lambda^n)$ erhält man eine Abbildung mit günstigeren Eigenschaften, gleichzeitig wird der Anwendungsbereich auf eine wichtige Funktionenklasse erweitert. Die FT auf

$L^2(\lambda^n)$ ist allerdings nicht mehr direkt als parameterabhängiges Integral und auch nicht mehr punktweise zu definieren.

Die Grundlage für den Fortsetzungsprozeß ist das folgende

8.8 Lemma *Ist* $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \cap \mathcal{L}^2(\lambda^n)$, *so ist* $\hat{f} \in \mathcal{L}^2(\lambda^n)$ *und* $||f||_2 = ||\hat{f}||_2$.

Beweis: a) Ist $\varphi \in \mathcal{D}$, so ist $\partial^\beta \varphi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{L}^1(\lambda^n)$ $\forall \beta \in \mathsf{N}^n$, also ist nach Satz 8.3 h)

$$([1 + \frac{1}{(2\pi)^2}(\partial_1^2 + ... + \partial_n^2)]^k \varphi)^\wedge = (1 + ||\cdot||^2)^k \hat{\varphi} \quad \forall k \in \mathsf{N},$$

und aus Satz 8.3 a) folgt

$$|\hat{\varphi}| \le \frac{\text{const}}{(1 + ||\cdot||^2)^k}, \tag{*}$$

also ist $\hat{\varphi} \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$ $\forall p \in [1, \infty[$. Aus der Umkehrformel und Satz 8.3 f) erhält man

$$||\varphi||_2^2 = \int \varphi \cdot \overline{\varphi} = \int \tilde{\hat{\varphi}} \cdot \overline{\varphi} = \int \hat{\varphi} \cdot \tilde{\overline{\varphi}} = \int \hat{\varphi} \cdot \overline{\hat{\varphi}} = ||\hat{\varphi}||_2^2 .$$

b) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \cap \mathcal{L}^2(\lambda^n)$, so existiert nach Satz 7.4 φ_k $(= f * \chi_{1/k}) \in \mathcal{D}$ mit

$$\varphi_k \to f \text{ in } \mathcal{L}^p(\lambda^n) \text{ für } p = 1, 2.$$

Dann ist (φ_k), nach a) auch $(\hat{\varphi}_k)$ Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$, da $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$ vollständig (Satz 4.14), existiert also $g \in \mathcal{L}^2(\lambda^n)$ mit $\hat{\varphi}_k \to g$ in $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$ und es gilt

$$||g||_2 = \lim ||\hat{\varphi}_k||_2 = \lim ||\varphi_k||_2 = ||f||_2.$$

Außerdem gilt nach Satz 8.3 a)

$$||\hat{\varphi}_k - \hat{f}||_\infty \le ||\varphi_k - f||_1 \to 0,$$

und demnach ist (vgl. die Bem. zu Lemma 4.13) $\hat{f} = g$ f.ü. ■

Damit erhalten wir das zentrale Resultat dieses Abschnitts

8.9 Satz (Plancherel, 1933) *Es gibt eine Abb.*

$$\mathcal{F}_{L^2} : L^2(\lambda^n) \to L^2(\lambda^n),$$

die Fouriertransformation auf L^2, *mit*

a) $\mathcal{F}_{L^2}(f + \mathcal{N}) = \hat{f} + \mathcal{N}$ $\forall f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \cap \mathcal{L}^2(\lambda^n)$,
b) $||\mathcal{F}_{L^2}(f + \mathcal{N})||_2 = ||f + \mathcal{N}||_2$ $\forall f \in \mathcal{L}^2(\lambda^n)$,
c) $\mathcal{F}_{L^2} : L^2(\lambda^n) \to L^2(\lambda^n)$ *ein VR-Isomorphismus,*

d) *Ist* $f \in \mathcal{L}^2(\lambda^n)$, *sind* $\hat{f}$ *und* $\tilde{f}$ *Repräsentanten von* $\mathcal{F}_{L^2}(f + \mathcal{N})$ *bzw.* $\mathcal{F}_{L^2}^{-1}(f + \mathcal{N})$ *und sei* $f_R := f \cdot 1_{B_R} (\in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \cap \mathcal{L}^2(\lambda^n))$, *so gilt*

i. $\hat{f} = \lim_{R\to\infty} \hat{f}_R$ *in* $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$

ii. $\tilde{f} = \lim_{R\to\infty} \tilde{f}_R$ *in* $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$

iii. $f = \lim_{R\to\infty}(\hat{f} \cdot 1_{B_R})^{\sim} = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R} e^{2\pi i <\cdot|y>} \hat{f}(y)\, dy$ *in* $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$
(Umkehrformel in $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$*).*

$\mathcal{F}_{L^2}$ *ist durch a) und b) eindeutig gegeben.*

Beweis: Existenz: Sei $f \in \mathcal{L}^2(\lambda^n)$, $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\lambda^n) \cap \mathcal{L}^2(\lambda^n)$ mit $f_k \to f$ in $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$; man kann z.B. $f_k = \varphi_k$ aus Lemma 8.8 oder $f_k = f \cdot 1_{B_k}$ wie in d) wählen: Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt $f_k \in \mathcal{L}^1(\lambda^n) \cap \mathcal{L}^2(\lambda^n)$ und nach Satz 4.12 gilt $f_k \to f$ in $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$.

Nach dem Lemma 8.8 ist dann auch $(\hat{f}_k + \mathcal{N})$ Cauchy-Folge in $L^2(\lambda^n)$, also nach Satz 4.14 konvergent, und der Grenzwert ist von der speziellen Folge (f_k) unabhängig: $f_k, g_k \to f \Rightarrow || \hat{f}_k - \hat{g}_k ||_2 \to 0$. Sei

$$\mathcal{F}_{L^2}(f + \mathcal{N}) := \lim(\hat{f} + \mathcal{N}) \quad (\text{in } L^2(\lambda^n))$$

so gilt a) (wähle $f_k = f$) und d i); b) folgt mit a) aus Lemma 8.8 wie dort. Ferner ist $\mathcal{F}_{L^2}$ linear.
Zum Nachweis von c) und den übrigen Aussagen in d) definieren wir analog zu $\mathcal{F}_{L^2}$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{L^2} : L^2(\lambda^n) \to L^2(\lambda^n), \quad f + \mathcal{N} \mapsto \lim(\tilde{f}_k + \mathcal{N}).$$

Dann gilt a) und b) entsprechend.
Ist nun $f \in \mathcal{L}^2(\lambda^n)$ und wie in Lemma 8.8 $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}$ mit $\varphi_k \to f$ in $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$, so folgt, da nach b) $\mathcal{F}_{L^2}$ stetig ist, aus der Umkehrformel und a)

$$\mathcal{F}_{L^2}(\widetilde{\mathcal{F}}_{L^2}(f + \mathcal{N}) = \lim \mathcal{F}_{L^2}(\overset{\sim}{\varphi}_k + \mathcal{N}) = \lim \varphi_k + \mathcal{N} = f + \mathcal{N}.$$

Ebenso erhält man $\widetilde{\mathcal{F}}_{L^2}(\mathcal{F}_{L^2}(f + \mathcal{N}) = f + \mathcal{N}$, also ist $\widetilde{\mathcal{F}}_{L^2} = \mathcal{F}^{-1}_{L^2}$, und damit gilt c) und $\tilde{f}_R \to \tilde{f}$ in $\mathcal{L}^2(\lambda^n)$.
Also folgt mit a)

$$(\hat{f} \cdot 1_{B_R})^{\sim} + \mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{F}}_{L^2}(\hat{f} \cdot 1_{B_R} + \mathcal{N}) \to \widetilde{\mathcal{F}}_{L^2}(\hat{f} + \mathcal{N}) = f + \mathcal{N} \quad \text{für } R \to \infty.$$

Eindeutigkeit: Gilt für $T : L^2(\lambda^n) \to L^2(\lambda^n)$ ebenfalls a) und b), so folgt für $f \in \mathcal{L}^2(\lambda^n)$ und (f_k) wie im ersten Teil des Beweises

$$T(f + \mathcal{N}) = \lim T(f_k + \mathcal{N}) = \lim \mathcal{F}_{L^2}(f_k + \mathcal{N}) = \mathcal{F}_{L^2}(f + \mathcal{N}). \qquad \blacksquare$$

8.10 Beispiel Nach Bsp. 8.2 ist $(1_{[-1,1]})^\wedge = 2\,\mathrm{sinc}$, da $1_{[-1,1]} \in \mathcal{L}^2(\lambda)$ ist nach der Umkehrformel in $\mathcal{L}^2$

$$1_{[-1,1]} \quad = \quad \lim_{R\to\infty} 2 \cdot \int_{-R}^{R} e^{2\pi i(\cdot)y}\, \mathrm{sinc}(y)\, dy \text{ in } \mathcal{L}^2(\lambda^n) \qquad (*)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^1 \cos(\cdot)y \cdot \frac{\sin y}{y}\,dy + \lim_{R\to\infty}\int_1^\infty \cos(\cdot)y \cdot \frac{\sin y}{y}\,dy\right).$$

Für $|x| \neq 1$ ist

$$\begin{aligned} g_R(x) := & \int_1^R \cos xy \cdot \frac{\sin y}{y}\,dy \\ = & \left(\frac{F(x,y)}{y}\bigg|_1^R + \int_1^R \frac{F(x,y)}{y^2}\,dy\right) \end{aligned}$$

wobei

$$F(x,y) := \frac{\cos y\,\cos xy + x \cdot \sin y\,\sin xy}{x^2-1},$$

also existiert $\lim_{R\to\infty} g_R(x) =: g(x)$ und es gilt

$$g(x) = -F(x,1) + \int_1^\infty \frac{F(x,y)}{y^2}\,dy.$$

Aus Satz 4.6 folgt, daß g und dann auch die rechte Seite von (*) stetig ist für $|x| \neq 1$, da auch $1_{[-1,1]}$ für $|x| \neq 1$ stetig ist, folgt (vgl. den Beweis von Satz 8.5)

$$1_{[-1,1]}(x) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-R}^R \cos xy \cdot \frac{\sin y}{y}\,dy \quad \forall |x| \neq 1.$$

Insdesondere folgt für $x = 0$

$$\pi = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

8.4 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}^*$

Die Fortsetzung der Fouriertransformation auf den Distributionenraum $\mathcal{S}^*$ erfolgt ähnlich wie die Definition der Ableitung auf $\mathcal{D}^*$, als Grundraum $\mathcal{S}$ muß hier allerdings ein größerer VR als $\mathcal{D}$ gewählt werden.

8.11 Definition Es sei

$$\mathcal{S} := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathsf{R}^n)\,|\,\forall k \in \mathsf{N},\, \beta \in \mathsf{N}^n \text{ ist } x \mapsto ||x||^k \cdot \partial^\beta\varphi(x) \text{ beschränkt }\}$$

die *Schwarz-Klasse*.
Der Dualraum $\mathcal{S}^*$ heißt der *Raum der temperierten Distributionen.*

Bezeichnung $\mathcal{L}^\infty(\lambda^n) := \{f \in \mathcal{L}^0(\lambda^n)\,|\,f \text{ ist beschränkt }\}$.

8.12 Lemma $\forall p \in [1,\infty]$ *gilt*

a) $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^p(\lambda^n)$,

b) $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$,

c) $\forall f \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$ *und* $\varphi \in \mathcal{S}$ *ist* $f \cdot \varphi \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, *also ist*
$\eta_f : \mathcal{S} \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \int f \cdot \varphi \, d\lambda^n$ *in* $\mathcal{S}^*$.

Beweis: a) und c) folgen direkt aus der Definition mit Satz 6.10, b) folgt aus Satz 8.3 g),h) analog zu (*) im Beweis von Lemma 8.8. ■

Bemerkung a) $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{S}$, z.B. ist $x \mapsto \exp(-||x||^2) \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$.

b) Ist $f \in \mathcal{L}^p(\lambda^n)$, so gilt nach Satz 7.12 : $\eta_f = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü.

c) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, so gilt nach Satz 8.3 f)

$$\eta_{\hat{f}}(\varphi) = \int \hat{f} \cdot \varphi \, d\lambda^n = \int f \cdot \hat{\varphi} \, d\lambda^n = \eta_f(\hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Man definiert deshalb "verträglich"

8.13 Definition Für $\eta \in \mathcal{S}^*$ sei $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^*}(\eta)\,(=:\hat{\eta}) : \mathcal{S} \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \eta(\hat{\varphi})$ die *Fourier-Transformierte von* η.

Nach dem Lemma ist $\hat{\eta}$ definiert und es gilt $\hat{\eta} \in \mathcal{S}^*$.

8.14 Beispiel Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\delta_y \in \mathcal{S}^*$, $\varphi \mapsto \varphi(y)$ gilt:

a) Ist $f = \omega_{-y} \in \mathcal{L}^\infty(\lambda^n)$, so ist nach der Umkehrformel

$$(\eta_{\omega_{-y}})^\wedge(\varphi) = \int \omega_{-y} \, \hat{\varphi} \, d\lambda^n = \varphi(y) = \delta_y(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

also $(\eta_{\omega_{-y}})^\wedge$ $(=: \exp(2\pi i < \cdot|y >)^\wedge) = \delta_y$.

b)

$$\hat{\delta}_y(\varphi) = \delta_y(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(y) = \int \omega_y \, \varphi \, d\lambda^n = \eta_{\omega_y}(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

also $\hat{\delta}_y = \eta_{\omega_y}$.

Insbesondere ist $\hat{\delta} = \eta_1$.

Bemerkung Das Beispiel illustriert die *(Heisenberg-)Unschärferelation:* Zeit und Frequenz lassen sich nicht gleichzeitig beliebig gut lokalisieren.

III
Maßtheorie

Im Kap.9 werden maßtheoretische Grundlagen ergänzt, die vor allem in der Wahrscheinlichkeitstheorie benötigt werden, der Satz von Radon-Nikodym im folgenden Kap. ist auch für andere Gebiete von Bedeutung.

9 Ergänzungen zu Teil I

9.1 Maßfortsetzung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Fortsetzung einer $\sigma-$additiven Mengenfunktion $m : \mathcal{S} \to \overline{\mathsf{R}}_+$, $\mathcal{S}$ Semiring, zu einem Maß.

9.1.1 Existenz einer Fortsezung

9.1 Lemma *Ist $\mathcal{S}$ ein Semiring, so ist*

$$\mathcal{R} := \left\{ \sum{}' A_j |\, A_j \in \mathcal{S} \right\}$$

der von $\mathcal{S}$ erzeugte Ring (vgl. die Bem. vor Def. 3.18).

Beweis: Sind $A = \sum_{j=0}^{m} A_j$ und $B = \sum_{k=0}^{p} B_k$ aus $\mathcal{R}$, so ist

$$A \backslash B = \sum_j{}' (A_j \backslash B_0) \backslash \sum_{k \geq 1}{}' B_k = \sum_j{}' (\sum_l{}' C_{l,j} \backslash \sum_{k \geq 1}{}' B_k) \text{ mit } C_{l,j} \in \mathcal{S},$$

durch Indution nach p folgt damit $A \backslash B \in \mathcal{R}$. Also ist auch $A \cup B = (A \backslash B) + B$ aus $\mathcal{R}$. Da $\mathcal{R}$ Ring und $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}(\mathcal{S})$, folgt die Beh. ∎

9.2 Satz *Jedes $\sigma-$additive $m : \mathcal{S} \to \overline{\mathsf{R}}_+$ läßt sich eindeutig zu einer $\sigma-$additiven Funktion $\widetilde{m}$ auf den von $\mathcal{S}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$ fortsetzen.*

Beweis: Zu $A \in \mathcal{R}$ existiert nach dem Lemma $C_j \in \mathcal{S}$ mit $A = \sum' C_j$.
Ist ferner $A = \sum' D_k$ mit $D_k \in \mathcal{S}$, so ist
$C_j = \sum_k' C_j \cap D_k$ und $D_k = \sum_j' C_j \cap D_k$.
Da μ additiv folgt

$$\sum_j{}' m(C_j) = \sum_j{}' \sum_k{}' m(C_j \cap D_k) = \sum_k{}' \sum_j{}' m(C_j \cap D_k) = \sum_k{}' m(D_k).$$

Demnach ist $\widetilde{m} : \mathcal{R} \to \overline{\mathsf{R}}_+$ durch

$$\widetilde{m}(A) := \sum_j{}' m(C_j) \tag{*}$$

(wohl-)definiert, setzt m fort und ist durch die Forderung der Additivität eindeutig durch (*) gegeben.

Ist nun

$$A = \sum_i A_i \text{ mit } A, A_i \in \mathcal{R},$$

so existieren $C_j, C_{i,k} \in \mathcal{S}$ mit $A = \sum_j' C_j$, $A_i = \sum_k' C_{i,k}$. Da

$$C_j = \sum_i \sum_k{}' (C_j \cap C_{i,k}) \text{ und } A_i = \sum_j{}' \sum_k{}' (C_j \cap C_{i,k})$$

und m $\sigma-$additiv, folgt mit Lemma 2.2

$$\begin{aligned} \widetilde{m}(A) &= \sum_j{}' m(C_j) = \sum_j{}' \sum_i \sum_k{}' m(C_j \cap C_{i,k}) \\ &= \sum_i \sum_j{}' \sum_k{}' m(C_j \cap C_{i,k}) = \sum_i \widetilde{m}(A_i). \end{aligned}$$

■

Für die weitere Fortsetzung benutzen wir den Fortsetzungsprozeß bei Daniell-Integralen:
Sei $m : \mathcal{R} \to \overline{\mathsf{R}}_+$ $\sigma-$additiv. Aus der Bem. zu Def.1.15 folgt, daß

$$\mathcal{R}_m := \{A \in \mathcal{R} \,|\, m(A) < \infty\}$$

ein Ring ist, also ist $\mu := m|_{\mathcal{R}_m}$ ein Prämaß. Nach Satz 3.10 (und der Bem.c) dazu) hat μ eine Fortsetzung $m_\mu : \mathcal{A}_\mu \to \overline{\mathsf{R}}_+$, die *Daniell-Fortsetzung von μ*, zu einem Maß.

Der folgende Satz besagt, daß m_μ auch m fortsetzt:

9.3 Satz *Die Daniell-Fortsetzung m_μ von $\mu := m|_{\mathcal{R}_m}$ ist eine Fortsetzung von m. Jede $\sigma-$additive Mengenfunktion auf einem Semiring läßt sich also zu einem Maß fortsetzen.*

Beweis: Zu zeigen ist noch:

a) $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_\mu$
und
b) $\forall\ A \in \mathcal{R}$ mit $m(A) = \infty$ ist $m_\mu(A) = \infty$.

Sei $A \in \mathcal{R}$.
a) Ist $\varphi = \sum' \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_m)$ in Normaldarstellung, so ist

$$\min(1_A, \varphi) = \sum{}' \min(1, \alpha_j) 1_{A_j \cap A} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_m)\,,$$

also ist nach Lemma 3.6 $A \in \mathcal{A}_\mu$.

b) Sei $m_\mu(A) < \infty$, also $1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
Nach Def.2.1 existiert $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{R}_m)$ mit $1_A \leq \sum \varphi_k$ und $\sum \mu(\varphi_k) < \infty$. Sei

$$B_k := \{\sum_{j=0}^{k} \varphi_j > 0\} \cap A, \text{ für } k \in \mathsf{N}, \;\; B_{-1} := \emptyset,$$

so ist $B_k \in \mathcal{R}_m$ und $B_k \nearrow A$.
Mit B.Levi folgt

$$m(A) = \sum_0^\infty m(B_k \backslash B_{k-1}) = \lim m(B_k) = \lim m_\mu(B_k) = m_\mu(A) < \infty. \quad \blacksquare$$

Bemerkung Man kann zeigen, daß $m = m_\mu$ gilt, falls m $\sigma-$endliches und vollständiges Maß ist ([Weir, Theorem 13.4.2]). Die $\sigma-$Endlichkeit spielt auch bei dem folgenden Eindeutigkeitssatz eine entscheidende Rolle.

9.1.2 Eindeutigkeit der Fortsetzung

Wir wollen noch ein Kriterium für die Eindeutigkeit der Fortsetzung einer $\sigma-$additiven Mengenfunktion m auf einem Semiring $\mathcal{S}$ geben. Analog zum Fortsetzungsproblem bei D-I ist die Frage bei bel. σ-Algebren, die $\mathcal{S}$ enthalten, nicht sinnvoll -es kann z.B. $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$ sein- jedoch für die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Ist $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{S}$ erzeugte Ring, so ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}(\mathcal{S})$, also gilt $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Wegen Satz 9.2 können wir also Œ m auf einem Ring $\mathcal{R}$ betrachten.
Wir wollen $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ anders charakterisieren. Dazu zunächst

Bezeichnung $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *monotone Klasse,* wenn gilt:
Ist $(M_j) \subset \mathcal{M}$ und gilt $M_j \nearrow M$ oder $M_j \searrow M$ so ist $M \in \mathcal{M}$.

Bemerkung Da der Durchschnitt monotoner Klassen wieder monotone Klasse ist, ist für $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) := \bigcap \{\mathcal{M} \text{ monotone Klasse} \,|\, \mathcal{C} \subset \mathcal{M}\},$$

eine monotone Klasse, die *von $\mathcal{C}$ erzeugte monotone Klasse.*

9.4 Satz *Ist $\mathcal{R}$ ein Ring auf X und ist $X \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, so ist $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{R})$.*

Beweis: Da $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ monotone Klasse, gilt $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{R})$.
Sei für $M \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{M}_M := \{N \subset X \,|\, M\backslash N,\, N\backslash M,\, N \cup M \in \mathcal{M}\}.$$

Dann gilt:

a) $\forall N, M \in \mathcal{M}$ ist $N \in \mathcal{M}_M \Leftrightarrow M \in \mathcal{M}_N$,
b) $\mathcal{M}_M$ ist monotone Klasse (da $\mathcal{M}$ monotone Klasse),
c) $A \in \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \subset \mathcal{M}_A$,

d) $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A \quad \forall A \in \mathcal{R}$ (aus c)und b)).

Ist $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{R}$, so ist nach d) $M \in \mathcal{M}_A$, nach a) demnach $A \in \mathcal{M}_M$, also folgt aus b) $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_M$.
Nach Def. von $\mathcal{M}_M$ gilt dann

$$M, N \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_M \Rightarrow M \backslash N,\ N \backslash M,\ N \cup M\ \in \mathcal{M}\,.$$

Da $X \in \mathcal{M}$ ist $\mathcal{M}$ eine Algebra, da $\mathcal{M}$ monotone Klasse auch σ-Algebra. ■

Für den folgenden Eindeutigkeitssatz ist die σ-Endlichkeit von m (Def.5.10) wesentlich.

9.5 Satz *Ist $\mathcal{S}$ Semiring, $m : \mathcal{S} \to \overline{\mathsf{R}}_+$ $\sigma-$additiv und σ-endlich, so hat m eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß m auf $\mathcal{A}(\mathcal{S})$.*

Beweis: Die Existenz ist bereits gezeigt, ferner können wir, da sich auch die σ-Endlichkeit überträgt, $\mathcal{S}$ durch den von $\mathcal{S}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$ ersetzen.
Seien m_1 und m_2 Maß-Fortstzungen von m auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.
Sei $C \in \mathcal{R}$ mit $m(C) < \infty$ und sei

$$\mathcal{A}\,(= \mathcal{A}_C) := \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{R}) \mid m_1(A \cap C) = m_2(A \cap C)\}.$$

Da $A \mapsto m_{1,2}(A \cap C)$ Prämaße auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, sind, folgt aus dem Satz von B.Levi oder aus Aufg. 5, daß $\mathcal{A}$ monotone Klasse ist. Da $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$ folgt aus dem obigen Satz, daß $\mathcal{A}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}$.
Sei $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ und sei $(C_k) \subset \mathcal{R}$ mit $C_k \nearrow X$ und $m(C_k) < \infty \ \ \forall k$.
Für $A_k := A \cap C_k \in \mathcal{A}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{C_k}$ gilt dann $m_1(A_k) = m_2(A_k)$.
Da $A = \sum (A_k \backslash A_{k-1})$ und $m_{1,2}$ $\sigma-$additiv, folgt $m_1(A) = m_2(A)$. ■

9.2 Abstrakte Meßbarkeit

Wir betrachten hier Meßbarkeit unabhängig von Integrierbarkeit.

9.6 Definition a) $(X, \mathcal{A})$ heißt ein *Meßraum,* wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist.

b) Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Meßräume.
$T : X \to X'$ heißt $\mathcal{A} - \mathcal{A}'-$ *meßbar*, wenn

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\ \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

c) Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum, so heißt $f : X \to \mathsf{R}$ $\mathcal{A}-$*meßbar,* wenn f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathsf{R})-$meßbar ist. ($\mathcal{B}(\mathsf{R})$ ist die Borel$-\sigma-$Algebra auf R, vgl.Def.3.18.)

Bemerkung Die Def. ist analog zur Def. der Stetigkeit von Abb. zwischen topologischen Räumen. Entsprechend gilt auch hier

9.7 Satz *Sind $T : X \to X'$ $\mathcal{A} - \mathcal{A}'-$ meßbar und $S : X' \to X''$ $\mathcal{A}' - \mathcal{A}''-$ meßbar , so ist $S \circ T : X \to X''$ $\mathcal{A} - \mathcal{A}''-$ meßbar.*

Beweis: Ist $A'' \in \mathcal{A}''$, so ist $S^{-1}(A'') \in \mathcal{A}'$, also
$(S \circ T)^{-1}(A'') = T^{-1}(S^{-1}(A'')) \in \mathcal{A}$. ■

9.8 Beispiel Jede konstante Abb. $T : X \to X'$ ist $\mathcal{A} - \mathcal{A}'-$ meßbar, da $T^{-1}(A')$ entweder leer oder X ist.

Zum Nachweis der Meßbarkeit ist folgendes Kriterium nützlich:

9.9 Lemma *Sind* $(X, \mathcal{A})$ *und* $(X', \mathcal{A}')$ *Meßräume* und $\mathcal{C}'$ *ein Erzeuger von* $\mathcal{A}'$ *d.h.* $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mathcal{C}')$, *so gilt*

$$T : X \to X' \text{ ist } \mathcal{A} - \mathcal{A}' - \text{meßbar} \Longleftrightarrow T^{-1}(C') \in \mathcal{A} \ \ \forall C' \in \mathcal{C}'\,.$$

Beweis: " $\Rightarrow$ " Da $\mathcal{C}' \subset \mathcal{A}'$.
" $\Leftarrow$ " $\mathcal{A}_1 := \{B \subset X' \,|\, T^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ ist $\sigma-$Algebra, da $X' \in \mathcal{A}_1$ und (vgl Aufg.3)

$$T^{-1}(B \backslash C) = T^{-1}(B) \backslash T^{-1}(C) \text{ und } \cup_j T^{-1}(B_j) = T^{-1}(\cup_j B_j)\,.$$

Da $\mathcal{C}' \subset \mathcal{A}_1$ ist $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_1$, also gilt $\forall A' \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_1$, daß $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. ■

Wegen des Lemmas ist es für die $\mathcal{A}-$Meßbarkeit nützlich, Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathsf{R})$ zu untersuchen:

9.10 Satz *Jedes der Intervall-Systeme*
$\{]a, b[\}$, $\{[a, b[\}$, $\{]a, b]\}$, $\{[a, b]\}$, $\{]a, \infty[\}$, $\{[a, \infty[\}$, $\{] - \infty, b[\}$, $\{] - \infty, b]\}$ *ist Erzeuger von* $\mathcal{B}(\mathsf{R})$.

Beweis: Ist $U \subset \mathsf{R}$ offen, $x \in U$, so existiert ein offenes Intervall I_x mit rationalen Endpunkten mit $x \in I_x \subset U$. Da $\{I_x| \ x \in U\}$ abzählbar, ist

$$U = \bigcup \{I_x \,|\, x \in U\} \in \mathcal{A}(\{]a, b[\}) =: \mathcal{A}_0.$$

Da $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}(\mathsf{R})$ gilt $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathsf{R})$.
Wir zeigen noch exemplarisch
$\mathcal{A}(\{[a, \infty[\}) =: \mathcal{A}_1 = \mathcal{B}(\mathsf{R})$, alle übrigen Beweise verlaufen ganz ähnlich.
Da $\mathcal{B}(\mathsf{R})$ mit den offenen Mengen auch die abg. Mengen als deren Komplemente enthält, gilt $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}(\mathsf{R})$.
Umgekehrt ist $[a, b[= [a, \infty[\backslash [b, \infty[\in \mathcal{A}_1$, also ist
$]a, b[= \bigcup_{k>0} [a + 1/k, b[\in \mathcal{A}_1$, und somit $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$. ■

Mit Lemma 9.9 erhalten wir daraus

9.11 Folgerung *Sei* $f : X \to \mathsf{R}$

a) *Äquivalent:*

   i. f *ist* $\mathcal{A}-$*meßbar*
   ii. $\{f > a\} \in \mathcal{A} \ \forall a \in \mathsf{R}$
   iii. $\{f \geq a\} \in \mathcal{A} \ \forall a \in \mathsf{R}$
   iv. $\{f < a\} \in \mathcal{A} \ \forall a \in \mathsf{R}$

v. $\{f \leq a\} \in \mathcal{A} \; \forall a \in \mathsf{R}$.

b) *Ist $\mathcal{A}_\mu$ die von einem vollst. D-I erzeugte $\sigma-$Algebra, so gilt*

$$f \text{ ist } \mu - \text{meßbar} \Leftrightarrow f \text{ ist } \mathcal{A}_\mu - \text{meßbar}.$$

Beweis: a) folgt aus Satz 9.10, da z.B. $\{f > a\} = f^{-1}(]a, \infty[)$.
b) Satz 3.11 b). ■

9.12 Beispiel a) Jede stetige Abb. $T : X \to X'$ ist $\mathcal{B}(X) - \mathcal{B}(X')-$meßbar, da Urbilder offener Mengen unter T offen sind.

b) Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum, so gilt

i. 1_A ist $\mathcal{A}-$meßbar $\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$, da

$$\{1_A > a\} = \begin{cases} X & \text{falls} \quad a < 0 \\ A & \text{falls} \quad 0 \leq a < 1 \\ \emptyset & \text{falls} \quad a \geq 1 \end{cases}$$

ii. $\varphi = \sum' \alpha_j 1_{A_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ (Œ in Normaldarstellung) ist $\mathcal{A}-$meßbar, da $\{\varphi > a\} = \sum_{\alpha_j > a} A_j$.

Bemerkung Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum, so gilt mit demselben Beweis wieder Satz 3.11 c). Zu $\mathcal{A}-$meßbarem $f : X \to \mathsf{R}_+$ existiert also eine Folge $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$ mit $\varphi_k \nearrow f$.

Damit erhalten wir die Aussagen aus Satz 3.2 b), c) und Folg 3.12:

9.13 Satz a) *Ist (f_k) eine Folge $\mathcal{A}-$meßbarer Funktionen, so gilt:*

i. *existiert* $\lim f_k =: f \in \mathsf{R}^X$, *so ist f $\mathcal{A}-$meßbar,*
ii. *existiert* $\sup f_k =: f \in \mathsf{R}^X$, *so ist f $\mathcal{A}-$meßbar,*
iii. *existiert* $\inf f_k =: f \in \mathsf{R}^X$, *so ist f $\mathcal{A}-$meßbar.*

b) *Die Menge der $\mathcal{A}-$meßbaren Funktionen ist ein Vektor-Verband.*

c) *Sind f und g $\mathcal{A}-$meßbar, so ist für $p \geq 0$ $|f|^p$ und $f \cdot g$ $\mathcal{A}-$meßbar.*

Beweis: a) ii,iii) aus

$$\{\sup f_j > a\} = \bigcup \{f_j > a\}, \; \{\inf f_j < a\} = \bigcup \{f_j < a\}.$$

i) Da $g_k := \inf_{j>k} f_j \nearrow f$ und g_k $\mathcal{A}-$meßbar, ist $f = \sup g_k$ $\mathcal{A}-$meßbar.
b) Mit f ist auch $f^\pm$ $\mathcal{A}-$meßbar, da z.B.

$$\{f^+ > a\} = \begin{cases} \{f > a\} & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ X & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}.$$

Nach obiger Bem. existiert also zu $f = f^+ - f^-$eine Folge $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{A})$ mit $\varphi_k \to f$.

Da $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ VV folgt mit a i) die Beh. in b).
c) Genau wie Folg. 3.12. ■

9.3 Stochastische Konvergenz

Sei $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{K}$ ein vollst. D-I mit erzeugtem Ring $\mathcal{R}_\mu$ und $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}_\mu$ .Wir schreiben wieder $\mu(A) := \mu(1_A)$ für $A \in \mathcal{R}_\mu$.

9.14 Definition Seien $f_k, f \in \mathcal{L}^0(\mu)$. (f_k) *konvergiert μ-stochastisch gegen f*, Bez. $f = \mu - \lim f_k$, wenn $\forall \alpha > 0$ und $A \in \mathcal{R}_\mu$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{|f_k - f| \geq \alpha\} \cap A) = 0. \tag{*}$$

Bemerkung Ist $X \in \mathcal{R}_\mu$, so ist (*) äquivalent zu

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{|f_k - f| \geq \alpha\}) = 0. \tag{**}$$

Aus (*) folgt nicht (**), auch nicht für σ-endliche Maße. Dazu

9.15 Beispiel Sei $X = \mathsf{R}$, $f_k = k \cdot 1_{[k,k+1]} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Ist $\lambda(A) < \infty$, $\alpha > 0$, so folgt aus der Stetigkeit des Maßes (Aufg. 5) oder dem Satz von B. Levi

$$\lambda(\{f_k \geq \alpha\} \cap A) \leq \lambda([k, \infty[\cap A) \to 0,$$

aber $\lambda(\{f_k \geq \alpha\}) = 1 \quad \forall k \geq \alpha$.

Bemerkung Ist $f = \mu - \lim f_k$, so gilt:
$f = g$ μ-f.ü. $\Rightarrow g = \mu - \lim f_k$.
Zur Umkehrung zeigen wir

9.16 Satz *Ist μ σ-endlich und gilt $f = \mu - \lim f_k$ und $g = \mu - \lim f_k$, so ist $f = g$ μ-f.ü. .*

Beweis: Da $|f - g| \leq |f - f_k| + |g - f_k|$ gilt

$$\{|f - g| \geq \alpha\} \subset \{|f - f_k| \geq \frac{\alpha}{2}\} \cup \{|g - f_k| \geq \frac{\alpha}{2}\} =: A_k \cup B_k.$$

Ist $A \in \mathcal{R}_\mu$, so folgt

$$\mu(\{|f - g| \geq \alpha\} \cap A) \leq \mu(A_k \cap A) + \mu(B_k \cap A) \to 0,$$

also ist $\mu(\{|f - g| \geq \alpha\} \cap A) = 0$.
Sei nun $(C_j) \subset \mathcal{R}_\mu$ mit $C_j \nearrow X$, so erhalten wir, da die abzählbare Vereinigung von NM wieder eine NM

$$\mu(\{|f - g| \neq 0\} = \mu\left(\bigcup_{j,k}(\{|f - g| \geq \frac{1}{k}\} \cap C_j)\right) = 0. \quad ■$$

Um den Zusammenhang zur Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\mu)$ herzuleiten, zeigen wir zunächst

9.17 Satz (Ungleichung von Chebyshev-Markov) *Sei* $p \in [1,\infty[$, $f \in \mathcal{L}^p_+(\mu)$, *so gilt* $\forall \alpha > 0$

$$\mu\{f \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \int f^p \, d\mu.$$

Beweis: $A_\alpha := \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}_\mu$ und

$$\int f^p \, d\mu \geq \int_{A_\alpha} f^p \, d\mu \geq \int_{A_\alpha} \alpha^p \, d\mu = \alpha^p \, \mu(A_\alpha). \qquad \blacksquare$$

9.18 Satz *Sei* $p \in [1,\infty[$. *Gilt* $f_k \to f$ *in* $\mathcal{L}^p(\mu)$, *so folgt* $\mu - \lim f_k = f$ *(sogar* $\lim_{k\to\infty} \mu(\{|f_k - f| \geq \alpha\}) = 0 \ \ \forall \alpha > 0$).

Beweis: Dies folgt aus der Ungleichung von Chebyshev-Markov:

$$\mu\{|f_k - f| \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \int |f_k - f|^p \, d\mu \to 0. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung Die Umkehrung gilt nicht, in Bsp. 9.15 gilt $||f_k||_p \to \infty$.

Für den Zusammenhang mit der punktweisen Konvergenz gilt

9.19 Satz *Seien* $f_k, f \in \mathcal{L}^0(\mu)$. *Gilt* $f_k \to f$ μ*-f.ü., so folgt* $\mu - \lim f_k = f$.

Beweis: Sei $N := \{\lim f_k = f\}^c$, und $g_k := \sup_{j\geq k}(|f_j - f| \cdot 1_{N^c}) : X \to \mathsf{R}$, so gilt
$(g_k) \subset \mathcal{L}^0(\mu)$ und $g_k \searrow 0$.
Ist $A \in \mathcal{R}_\mu$, so folgt mit dem Satz von B. Levi

$$\mu(\{|f_k - f| \geq \alpha\} \cap A) \leq \mu(\{g_k \geq \alpha\} \cap A) \to 0. \quad \blacksquare$$

Bemerkung a) Die Umkehrung gilt nicht (vgl. Aufg. 24).

b) Nach diesen Sätzen und denen in 7.2 gelten für $p \in [1,\infty[$ folgende (und nur diese) Implikationen für die Konvergenz einer Folge $(f_k) \subset \mathcal{L}^0(\mu)$:

$f_k \to f$ μ-f.ü. $\Rightarrow f_k \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$, falls $|f_k| \leq g \in \mathcal{L}^p_+(\mu)$,

$f_k \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu) \Rightarrow \exists$ Teilfolge (f_{k_j}) mit $f_{k_j} \to f$ μ-f.ü.,

$f_k \to f$ μ-f.ü. oder $f_k \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu) \Rightarrow \mu - \lim f_k = f$.

9.4 Unendliche Produkte

Wir betrachten noch das Produkt von abzählbar vielen vollständige Daniell-Integralen μ_1, μ_2, ...Dies tritt als Modell für ein unbegrenzt wiederholbares Zufallsexperiment auf. In dieser Anwendungssituation gilt

$$\mu_j(X_j) = 1 \ \ \forall j,$$

und diese Voraussetzung ist auch für die mathematische Behandlung wesentlich. Man betrachtet dazu den Semiring der *Zylindermengen*

$$\mathcal{S}_\pi := \{A_1 \times ... \times A_m \times \prod_{j>m} X_j \,|\, m \in \mathsf{N}^*, \;\; A_j \in \mathcal{A}_{\mu_j}\}$$

und definiert $\mu_\pi : \mathcal{S}_\pi \to \mathsf{R}_+$ durch

$$\mu_\pi(A_1 \times ... \times A_m \times \prod_{j>m} X_j) := \mu_1(A_1) \cdot ... \cdot \mu_m(A_m).$$

Der wesentliche und technisch etwas komplizierte Beweisschritt für den nachfolgenden Satz ist die Prämaß-Eigenschaft von μ_π (vgl. z.B. [Bauer]). Man erhält damit

9.20 Satz *Es gibt ein vollst. D-I μ_π auf dem Grundraum $X_\pi := \prod_j X_j$ mit*

$$\mu_\pi(A_1 \times ... \times A_m \times \prod_{j>m} X_j) := \mu_1(A_1) \cdot ... \cdot \mu_m(A_m).$$

Insbesondere ist $\mu_\pi(X_\pi) = 1$.

10 Maße mit Dichten

In diesem Kap. wird i.W. die "Darstellung" eines D-I μ durch ein anderes D-I ν untersucht. Diese Theorie ist in der Literatur meist maßtheoretisch formuliert, wir werden einige Anmerkungen dazu machen (und haben dieser üblichen Betrachtungsweise in der Überschrift Rechnung getragen).
Es sei stets $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathsf{K}$ ein vollständiges D-I mit davon erzeugtem Ring $\mathcal{R}_\mu$ und $\sigma-$Algebra $\mathcal{A}_\mu$.

10.1 Dichte, Absolutstetigkeit

10.1 Satz (Dichte-Satz) *Sei $\rho : X \to \mathsf{R}_+$,*

$$\nu := \rho\,\mu : \{f : X \to \mathsf{K} \mid f \cdot \rho \in \mathcal{L}^1(\mu)\}(=: \mathcal{V}^\rho) \to \mathsf{K}, \;\; f \mapsto \mu(f \cdot \rho),$$

so gilt:

a) *ν ist vollständiges D-I.*

b) *Jede $\mu-$NM ist $\nu-$NM.*

c) *Ist $\rho \in \mathcal{L}^0(\mu)$, so ist $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_\nu$.*

Beweis: a) ν ist D-I und für alle $f : X \to \mathsf{K}$ gilt, da die folgenden Mengen monoton fallen

$$\begin{aligned} \mu^*(f \cdot \rho) &= \inf\{\sum_k \mu(g_k) \mid g_k \in \mathcal{L}^1_+(\mu), \;\; |f \cdot \rho| \le \sum_k g_k\} \\ &\le \inf\{\sum_k \mu(h_k \cdot \rho) \mid h_k \cdot \rho \in \mathcal{L}^1_+(\mu), \;\; |f \cdot \rho| \le \sum_k h_k \cdot \rho\} \\ &\le \inf\{\sum_k \nu(h_k) \mid h_k \in \mathcal{V}^\rho_+, \;\; |f| \le \sum_k h_k\} \\ &= \nu^*(f). \end{aligned}$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$, $(h_k) \subset \mathcal{V}$ mit $\nu^*(f - h_k) \to 0$, so folgt

$$\mu^*(f \cdot \rho - h_k \cdot \rho) \to 0,$$

also ist $f \cdot \rho \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und demnach $f \in \mathcal{V}^\rho$.
b) Ist A $\mu-$NM, so ist $1_A \cdot \rho = 0$ $\mu-$f.ü., also folgt mit Satz 4.1 b)

$$0 = \mu(1_A \cdot \rho) = \nu(1_A).$$

c) Ist $A \in \mathcal{A}_\mu$, so ist, da $\rho \in \mathcal{L}^0(\mu)$ auch $1_A \cdot \rho \in \mathcal{L}^0(\mu)$.
Für $g \in \mathcal{L}^1_+(\nu)$, also $g \cdot \rho \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ folgt

$$(\min(1_A, g)) \cdot \rho = \min(1_A \cdot \rho, g \cdot \rho) \in \mathcal{L}^1_+(\mu),$$

also ist $\min(1_A, g) \in \mathcal{L}^1_+(\nu)$, und demnach $1_A \in \mathcal{L}^0(\nu)$. ∎

10.2 Definition a) Ist ρ und ν wie im Satz 10.1, so heißt ν ein D-I *mit Dichte ρ bzgl. μ*, Bez. $\nu = \rho \cdot \mu$ oder auch $d\nu = \rho \cdot d\mu$.

b) Sind μ und ν vollst. D-I, so heißt ν *absolutstetig bzgl. μ*, wenn jede $\mu-$NM eine $\nu-$NM ist, Bez. $\nu \ll \mu$.

Bemerkung a) Nach Satz 10.1 gilt also: $\nu = \rho \cdot \mu \Rightarrow \nu \ll \mu$.

b) Ist $\nu = \rho \cdot \mu$, so gilt insbesonders

$$\nu(B) = \int_B \rho \, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{R}_\nu.$$

Dies ist die maßtheoretische Definition der Dichte.

c) Ist $A \in \mathcal{A}_\mu$, so ist nach Def. 3.13

$$1_A \cdot \mu(f) = \int_A f \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(1_A \cdot \mu),$$

die Integration über Teilmengen ist also ein Spezialfall eines Integrals mit Dichte.

10.3 Beispiel Für das vollständige Radon-Integral $\delta_a : \mathsf{K}^\mathsf{R} \to \mathsf{K}$, $f \mapsto f(a)$ (vgl. Bsp 1.16, 2.15 und Aufg. 8) und das Lebesgue-Integral λ auf R gilt:
δ_a ist nicht absolutstetig bzgl. λ, da $\{a\}$ eine $\lambda-$NM, und λ ist nicht absolutstetig bzgl. δ_a.

Für die Eindeutigkeit der Dichte wird (wieder) die $\sigma-$Endlichkeit von μ benötigt:

10.4 Satz *Ist μ $\sigma-$endlich, $\rho, \kappa \in \mathcal{L}^0_+(\mu)$ mit $\rho \cdot \mu = \kappa \cdot \mu$, so ist $\rho = \kappa$ $\mu-$f.ü.*.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{R}_\mu$ und

$$B_k := \{\rho > \kappa\} \cap \{\max(\rho, \kappa) \leq k\} \cap A, \tag{*}$$

so ist $B_k \in \mathcal{R}_\mu$ und nach Satz 3.4 ist $\rho, \kappa \in \mathcal{L}^1_+(B_k, \mu)$. Da

$$0 = \int_{B_k} \rho \, d\mu - \int_{B_k} \kappa \, d\mu = \int_{B_k} (\rho - \kappa) \, d\mu$$

ist nach Satz 4.1 b) $\rho - \kappa = 0$ $\mu-$f.ü. auf B_k, also folgt aus (*) $\mu(B_k) = 0 \; \forall k$. Damit folgt

$$\mu(\{\rho > \kappa\} \cap A) = \mu(\bigcup_0^\infty B_k) = 0.$$

Wählt man nun eine Folge $(A_j) \subset \mathcal{R}_\mu$ mit $A_j \nearrow X$, so folgt $\mu(\{\rho > \kappa\}) = 0$ und analog folgt $\mu(\{\rho < \kappa\}) = 0$. ■

10.2 Zueinander singuläre Integrale

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Begriffe für den Vergleich von μ mit einem weiteren vollständigen D-I $\nu : \mathcal{L}^1(\nu) \to \mathsf{K}$ eingeführt.

10.5 Definition a) ν heißt *getragen durch* $A \in \mathcal{A}_\nu$, wenn A^c eine $\nu-$NM ist, Bez. $\operatorname{supp} \nu \subset A$.

b) ν heißt *singulär zu* μ, wenn ν durch eine $\mu-$NM getragen ist, Bez. $\nu \perp \mu$.

c) Sind ν_a und ν_s vollst. D-I mit $\mathcal{L}^1(\nu) \subset \mathcal{L}^1(\nu_a) \cap \mathcal{L}^1(\nu_s)$ und $\nu(f) = \nu_a(f) + \nu_s(f) \;\; \forall f \in \mathcal{L}^1(\nu)$, und gilt

$$\nu_a \ll \mu \text{ und } \nu_s \perp \mu,$$

so heißt (ν_a, ν_s) eine *Lebesgue-Zerlegung von* ν *bzgl.* μ *in den* $\mu-$*absolutstetigen und den* $\mu-$*singulären Anteil.*

Im folgenden Lemma werden einige elementare Eigenschaften zusammengestellt:

10.6 Lemma a) $\nu \perp \mu \Leftrightarrow \mu \perp \nu$,

b) $\operatorname{supp} \nu \subset A \Leftrightarrow m_\nu(A \cap B) = m_\nu(B) \;\; \forall B \in \mathcal{A}_\nu$, *wobei* $m_\nu : \mathcal{A}_\nu \to \overline{\mathsf{R}}_+$ *das von* ν *erzeugte Maß sei,*

c) $\nu \ll \mu$ *und* $\nu \perp \mu \Rightarrow \nu = 0$,

d) (ν_a, ν_s) *L-Zerlegung von* ν *bzgl.* $\mu \Rightarrow \nu_a \perp \nu_s$.

Beweis: a) Es gilt

$$\begin{aligned} \nu \perp \mu &\Leftrightarrow \exists\, \mu - \text{NM } A \text{ mit } A^c \text{ ist } \nu - \text{NM} \\ &\Leftrightarrow \exists\, \nu - \text{NM } B (= A^c) \text{ mit } B^c \text{ ist } \mu - \text{NM} \\ &\Leftrightarrow \mu \perp \nu. \end{aligned}$$

b) Ist $\operatorname{supp} \nu \subset A$, so ist $m_\nu(B) = m_\nu(A \cap B) + m_\nu(A^c \cap B) = m_\nu(A \cap B) \;\; \forall B \in \mathcal{A}_\nu$. Die Rückrichtung folgt mit $B := A^c$.

c) Ist $\operatorname{supp} \nu \subset A$ und A eine $\mu-$NM, so ist A auch $\nu-$NM (da $\nu \ll \mu$), mit b) folgt dann

$$m_\nu(A \cap B) = m_\nu(B) \; = 0 \;\; \forall B \in \mathcal{A}_\nu .$$

Insbesondere ist $\nu|_{\mathcal{R}_\nu} = 0$, nach dem Stoneschen Darstellungssatz also auch $\nu = 0$.

d) Ist A eine $\mu-$NM mit $\nu_s(A^c) = 0$, so ist $\nu_a(A) = 0$ (da $\nu_a \ll \mu$), also $\nu_a \perp \nu_s$. ■

10.7 Beispiel a) Ist $I = [a, b] \in \mathsf{R}$ ein kompaktes Intervall, $F : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ monoton wachsend und konstant auf $]-\infty, a[$ und $]b, \infty[$, so ist $\mu_F(I') = 0$ $\forall I' \in \mathcal{S}_\mathsf{R}$ mit $I \cap I' = \emptyset$, aus dem Satz von B.Levi folgt, daß $\mathsf{R} \backslash I$ eine μ_F-NM ist, also ist $\operatorname{supp} \mu_F \subset I$.

b) Ist $A = \{a_j \,|\, j \in \mathsf{N}\} \subset X$, $(\alpha_j) \subset \mathsf{R}_+^*$, so erhält man genau wie beim Zähl-Prämaß (vgl Bsp.1.16 und 2.7):

Für das von dem Prämaß

$$\{C \subset X \mid A \cap C \,\text{endlich}\} \ni C \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, \delta_{a_j}(C)$$

erzeugte vollst. D-I $\mu (=: \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, \delta_{a_j})$ gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, |f(a_j)| \text{ konvergiert},$$

und dann ist

$$\mu(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, f(a_j) \, .$$

Demnach ist $\operatorname{supp} \mu \subset A$ und

$$N \subset X \text{ ist } \mu - \text{NM} \Leftrightarrow N \cap A = \emptyset .$$

Ist $\nu = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \, \delta_{b_j}$ mit $\beta_j > 0$, $b_j \in X$, so folgt

$$\nu_a := \sum_{b_j \in A} \beta_j \, \delta_{b_j} \ll \mu, \;\; \nu_s := \sum_{b_j \in A^c} \beta_j \, \delta_{b_j} \perp \mu$$

und damit ist (ν_a, ν_s) eine L-Zerlegung von ν bzgl. μ. Ferner ist

$$\rho := \sum_{b_j \in A} \frac{\beta_j}{\alpha_j} 1_{\{b_j\}}$$

eine $\mu-$meßbare Dichte von ν_a bzgl. μ, $\nu_a = \rho \cdot \mu$.

Bemerkung a) Das Ziel dieses Kap. ist die Verallgemeinerung der Aussagen des Beispiels.

b) Die Lebesgue-Zerlegung entspricht formal der Orthogonal-Zerlegung in einem reellen SPR V : Zu $u, v \in V$ existiert (eindeutig) $v_a, v_s \in V$, $\rho \in \mathsf{R}$ mit $v = v_a + v_s$ und $v_a = \rho \cdot u$, $v_s \perp u$.

Wir geben noch einen dem Satz 10.4 entsprechenden Eindeutigkeitssatz:

10.8 Satz *Ist (ν_a, ν_s) eine Lebesgue-Zerlegung von ν bzgl. μ, so sind ν_a und ν_s auf $\mathcal{L}^1(\nu)$ eindeutig.*

Beweis: Sei (ν'_a, ν'_s) eine weitere L-Zerlegung von ν bzgl. μ, und seien ν_s bzw ν'_s getragen durch die $\mu-$NM A bzw. A'. Für $A_0 := A \cup A'$ gilt dann

$$\mu(A_0) = 0 \text{ und } \nu_a(A_0^c) = \nu'_a(A_0^c) = 0.$$

Ist $B \in \mathcal{R}_\nu$, so folgt aus Lemma 10.6 und mit $\nu_a(A_0^c) = 0$:

$$\nu_s(B) = \nu_s(A_0 \cap B) = \nu(A_0 \cap B) = \nu'_s(B)$$

und daraus

$$\nu_a(B) = \nu(B) - \nu_s(B) = \nu'_a(B).$$

Da $\nu_{a,s}$ und $\nu'_{a,s}$ auf $\mathcal{E}(\mathcal{R}_v)$ übereinstimmen, folgt die Beh. aus dem Darstellungssatz von Stone. ■

10.3 Der Satz von Radon-Nikodym

Zur Vorbereitung der zentralen Sätze dieses Kapitels benötigen wir ein Resultat aus der Funktionalanalysis:

10.9 Satz (Darstellungssatz von Riesz für lineare Funktionale) *Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum (also ein vollständiger Skalarproduktraum) über K, H' der Raum der stetigen linearen Funktionale auf H, so gilt:*
Für alle $\eta \in H'$ existiert genau ein $g \in H$ mit

$$\eta(f) = \langle f|g\rangle \quad \forall f \in H.$$

Beweis: Der Beweis stützt sich auf den *Zerlegungssatz* (siehe z.B. [Heuser, Satz 22.1]), den wir ohne Beweis angeben:
Ist U ein abgeschlossener UVR von H, so ist $U \oplus U^\perp = H$.
Ist nun $\eta \in H'$, Œ $\eta \neq 0$, so ist

$$U := \text{Kern}\,\eta = \eta^{-1}(\{0\})$$

eine abgeschlossene Hyperebene in H, da $U \oplus U^\perp = H$, ist $\dim(U^\perp) = 1$, also existiert ein $g_0 \in H$ mit $||g_0|| = 1$ und

$$U \oplus \mathsf{K}\, g_0 = H.$$

Ist $f \in H$, so ist

$$f = f_U + \alpha\, g_0 \text{ mit } f_U \in U \text{ und } \alpha = \langle f|g_0\rangle\,,$$

und demnach

$$\eta(f) = \alpha\, \eta(g_0) = \left\langle f|\,\overline{\eta(g_0)}g_0 \right\rangle = \langle f|g\rangle$$

mit $g := \overline{\eta(g_0)}g_0$.
Eindeutigkeit: Gilt $\forall f \in H$

$$\langle f|g\rangle = \langle f|g'\rangle$$

so folgt $\langle f|g - g'\rangle = 0$, mit $f := g - g'$ also $g = g'$. ■

Seien nun μ und ν vollst D-I auf X, μ sei $\sigma-$endlich und ν sei die Abschließung eines Elementar-Integrals auf $\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$. Dann gelten

10.10 Satz (Lebesguescher Zerlegungssatz) *Es gibt eine -im Sinne von Satz 10.8- eindeutige Lebesgue-Zerlegung (ν_a, ν_s) von ν bzgl. μ.*

10.11 Satz (Radon-Nikodym, 1913/1930) *Es gibt eine μ–f.ü. eindeutige Dichte $\rho \in \mathcal{L}^0_+(\mu)$ von ν_a bzgl. μ, also $\nu_a = \rho \cdot \mu$.*

Beweis beider Sätze (nach v. Neumann): Die Eindeutigkeitsaussagen sind schon gezeigt.

a) Vorbemekung: Sei $\tau : \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu) \to \mathsf{K}, \;\; \varphi \mapsto \mu(\varphi) + \nu(\varphi)$, so ist τ ein D-I und nach Def. ist $\tau^* \geq \mu^*$ und $\tau^* \geq \nu^*$.
Ist $f \in \mathcal{L}^1(\tau)$, $(\varphi_k) \subset \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$ mit $\tau^*(f - \varphi_k) \to 0$, so folgt $\mu^*(f - \varphi_k) \to 0$ und $\nu^*(f - \varphi_k) \to 0$, und damit gilt

$$\mathcal{L}^1(\tau) \subset \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\nu), \quad \int f\, d\tau = \lim \tau(\varphi_k) = \int f\, d\mu + \int f\, d\nu \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\tau). \quad (1)$$

Aus Lemma 3.6 (mit $\mathcal{V} = \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$) folgt damit auch $\mathcal{L}^0(\tau) \subset \mathcal{L}^0(\mu) \cap \mathcal{L}^0(\nu)$.

b) Beweis der Sätze falls $X \in \mathcal{R}_\mu$.
$\forall f \in \mathcal{L}^2(\tau)$ gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $f = f \cdot 1 \in \mathcal{L}^1(\tau) \subset \mathcal{L}^1(\nu)$, mit (1) folgt

$$\left| \int f\, d\nu \right| \leq \int |f|\; d\nu \leq \int |f|\; d\tau \leq \left(\int |f|^2\; d\tau \right)^{1/2} \cdot (\tau(X))^{1/2}.$$

Also ist

$$L^2(\tau) \ni f + \mathcal{N} \mapsto \int f\, d\nu \in \mathsf{K}$$

(wohl-)definiert, linear und stetig, da $L^2(\tau)$ ein Hilbert-Raum (Bem. zu Satz 4.14), existiert nach dem Darstellungssatz 10.9 $g \in \mathcal{L}^2(\tau)$ mit

$$\int f\, d\nu = \int f \cdot \overline{g}\, d\tau \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\tau). \quad (2)$$

Die Funktion g ist rellwertig wählbar: Für $f :=\operatorname{Im} g$ folgt

$$\int \operatorname{Im} g\, d\nu = \int \operatorname{Im} g \cdot \operatorname{Re} g\, d\tau - i \int |\operatorname{Im} g|^2\, d\tau,$$

also ist $\operatorname{Im} g = 0$ τ–f.ü.
Ferner gilt Œ

$$0 \leq g \leq 1.$$

Sei nämlich $A_1 := \{g > 1\}$, $f := 1_{A_1}$, so ist nach (2) und (1)

$$\int_{A_1} g\, d\tau = \int_{A_1} d\nu \leq \int_{A_1} d\tau,$$

also ist $\int_{A_1} (g-1)\, d\tau = \int 1_{A_1} \cdot (g-1)\, d\tau = 0$, und demnach (Satz 4.1) ist A_1 eine τ–NM.
Analog folgt, daß $\{g < 0\}$ eine τ–NM ist.

Damit läßt sich jetzt eine Lebesgue-Zerlegung von ν definieren: Da $\mathcal{L}^0(\tau) \subset \mathcal{L}^0(\mu)$ ist

$$A := \{g = 1\} \in \mathcal{A}_\mu.$$

Sei $\nu_a := 1_{A^c} \cdot \nu$, also

$$\nu_a : \{f \to \mathsf{K} \mid f \in \mathcal{L}^1(A^c, \nu)\} \ni \ f \mapsto \int_{A^c} f \, d\nu,$$

und $\nu_s := 1_A \cdot \nu$, so ist nach Satz 3.14 a)

$$\mathcal{L}^1(\nu) \subset \mathcal{L}^1(\nu_a) \cap \mathcal{L}^1(\nu_s) \text{ und } \int f \, d\nu = \int f \, d\nu_a + \int f \, d\nu_s \ \ \forall f \in \mathcal{L}^1(\nu).$$

Nach (2) und (1) gilt $\forall f \in \mathcal{L}^2(\tau)$

$$\int f \cdot (1-g) \, d\nu = \int f \cdot g \, d\tau - \int f \cdot g \, d\nu = \int f \cdot g \, d\mu. \tag{3}$$

Mit $f := 1_A$ folgt $\mu(A) = 0$, da $\operatorname{supp} \nu_s \subset A$ ist also $\nu_s \perp \mu$.
Definition der Dichte:
Sei $\rho_k := g + g^2 + ... + g^k$. Setzt man in (3) $f = (1 + \rho_{k-1}) \cdot 1_B$ mit $B \in \mathcal{A}_\mu$ ein, so folgt

$$\int (1 - g^k) \cdot 1_B \, d\nu = \int \rho_k \cdot 1_B \, d\mu, \tag{4}$$

da $0 \leq 1 - g^k \leq 1$ erhält man aus dem Satz von B.Levi für $B = X$:

$$\exists \, \rho \in \mathcal{L}^1_+(\mu) \text{ mit } \rho_k \nearrow \rho \ \ \mu - \text{f.ü.}$$

Da $(1 - g^{k+1}) \nearrow 1_{A^c}$ folgt aus (4), wieder mit dem Satz von B.Levi

$$\nu_a(B) = \int 1_{A^c} \cdot 1_B \, d\nu = \int 1_B \cdot \rho \, d\mu = \rho \cdot \mu(B). \tag{5}$$

Mit Lemma 10.12 folgt daraus $\nu_a = \rho \cdot \mu$, also gilt auch $\nu_a \ll \mu$.
c) Beweis des allgemeinen Falls.
Sei $(C_j) \in \mathcal{R}_\mu$ mit $C_j \nearrow X$ und $B_0 := C_0$, $B_j := C_j - C_{j-1}$ für $j > 0$. Dann ist

$$X = \sum B_j \text{ mit } B_j \in \mathcal{R}_\mu \ \ \forall j.$$

Sei

$$\mu_j := 1_{B_j} \cdot \mu, \ \ \nu_j := 1_{B_j} \cdot \nu,$$

und dazu nach b) A_j und $\nu_{j,a}$, $\nu_{j,s}$, ρ_j definiert. Da $A_j \subset B_j$ ist

$$\mu(A_j) = \mu_j(A_j) = 0,$$

also ist $A := \sum A_j$ eine $\mu-$NM. Sei

$$f \in \mathcal{L}^1(\nu_a) :\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(\nu_{j,a}) \ \ \forall j \text{ und } \sum \int_{B_j} |f| \, d\nu_{j,a} \text{ konvergiert,}$$

und für diese f sei

$$\nu_a(f) := \sum \nu_{j,a}(f) := \sum \int_{B_j} f \, d\nu_{j,a}$$

(vgl. Lemma 3.15) und analog sei $\nu_s := \sum \nu_{j,s}$. Ferner sei

$$\rho : X \to \mathsf{R}_+, \ \ \rho|_{B_j} := \rho_j \ \ \forall j.$$

Dann ist $\forall f \in \mathcal{L}^1(\nu_a)$

$$\nu_a(f) = \sum \int_{B_j} f \, d\nu_{j,a} = \sum \int_{B_j} f \cdot \rho_j \, d\mu_j = \int f \cdot \rho \, d\mu.$$

Ähnlich folgt $\operatorname{supp} \nu_s \subset A$. ∎

Bemerkung Da $\rho \in \mathcal{L}^1(C, \mu) \; \forall C \in \mathcal{R}_\mu$, gilt $\rho \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$, falls μ ein vollständiges Radon-Integral auf R^n ist.

Zum Beweis der Aussage $\nu_a = \rho \cdot \mu$ zeigen wir nun noch

10.12 Lemma *Sei μ ein vollständiges D-I, $\rho \in \mathcal{L}^0_+(\mu)$, $\mathcal{V}$ ein UVV von $\mathcal{L}^1(\rho \cdot \mu)$, und sei ω die Abschließung von $\rho \cdot \mu|_\mathcal{V}$. Dann gilt*

a) *$\rho \cdot \mu$ ist Fortsetzung von ω.*

b) *Ist ω $\sigma-$endlich und $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_\omega$, so ist $\rho \cdot \mu = \omega$.*

Beweis: a) Da $\rho \cdot \mu$ vollständiges D-I, gilt a) nach Satz 2.11 a).

b) Sei $\nu := \rho \cdot \mu$ und $\kappa := \begin{cases} 1/\rho & \text{falls } \rho > 0 \\ 0 & \text{falls } \rho = 0 \end{cases}$,
so ist $\kappa \in \mathcal{L}^0(\mu)$:

$$\{\kappa \geq a\} = \begin{cases} X & \text{falls } a \leq 0 \\ \{\rho \leq 1/a\} \cap \{\rho > 0\} & \text{falls } a > 0 \end{cases}.$$

Ist $f \in \mathcal{L}^0(\nu)$ und $h \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, so folgt aus $h \cdot \kappa \cdot \rho = h \cdot 1_{\{\rho > 0\}} \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$, daß $h \cdot \kappa \in \mathcal{L}^1_+(\nu)$, und damit gilt

$$\mathrm{m}(f \cdot \rho, h) = \mathrm{m}(f \cdot \rho, h \cdot \kappa \cdot \rho) = \mathrm{m}(f, h \cdot \kappa) \cdot \rho \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Also ist $f \cdot \rho \in \mathcal{L}^0(\mu)$ und demnach auch

$$f \cdot 1_{\{\rho > 0\}} = f \cdot \rho \cdot 1_{\{\rho > 0\}} \cdot \kappa \in \mathcal{L}^0(\mu).$$

Da $1_{\{\rho = 0\}} \cdot \rho = 0$ ist $\{\rho = 0\}$ eine $\nu-$NM und da ν Fortsetzung von ω demnach auch $\omega-$NM. Aus $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_\omega$ folgt nach Satz 3.11 b) $\mathcal{L}^0(\mu) \subset \mathcal{L}^0(\omega)$, also erhält man aus Satz 4.1 c) $f \in \mathcal{L}^0(\omega)$.

Ist nun $f \in \mathcal{L}^1_+(\nu)$, so existiert, da ω $\sigma-$endlich, nach Lemma 5.12 $(f_k) \subset \mathcal{L}^1_+(\omega)$ mit $f_k \nearrow f$. Da $\omega(f_k) = \nu(f_k) \; \forall k$, folgt aus dem Satz von B.Levi $f \in \mathcal{L}^1_+(\omega)$, und damit gilt b). ∎

Bemerkung Im Beweis der Sätze 10.10, 10.11, Formel (5), ist $\mathcal{V} = \mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$ und $\omega := \nu_a = 1_{A^c} \cdot \nu$ mit $\nu_a = \rho \cdot \mu$ auf $\mathcal{E}(\mathcal{R}_\mu)$. Da nach Vor. $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{R}_\nu$ und μ $\sigma-$endlich, ist $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{A}_\nu \subset \mathcal{A}_{\nu_a}$ und ν_a ist ebenfalls $\sigma-$endlich.

10.4 Absolutstetige Funktionen

In diesem Abschnitt sollen noch Integrale mit mit einer Dichte bzgl. λ untersucht werden. Der folgende Satz präzisiert die Aussage $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ aus Satz 3.19 a); er wird zur Anwendung von Lemma 10.12 benötigt.

10.13 Satz *Sei μ ein $\sigma-$endliches und vollständiges Radon-Integral auf X, so gilt*

$$A \in \mathcal{A}_\mu \Leftrightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}(X) \text{ mit } A \subset B \text{ und } B \backslash A \text{ ist } \mu - NM.$$

Beweis: "$\Leftarrow$" Da $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}_\mu$ (Satz 3.19) ist $A = B\backslash(B\backslash A) \in \mathcal{A}_\mu$.
"$\Rightarrow$" Wegen der $\sigma-$Endlichkeit von μ genügt es die Beh. für $A \in \mathcal{R}_\mu$ zu zeigen: Da $\mu(A)\,(= \mu^*(A)) < \infty$ existiert zu jedem $j \in \mathsf{N}^*$ eine Folge $(\varphi_k) \subset \mathcal{C}_{c,+}(X)$ mit

$$1_A \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\varphi_k) \leq \mu(A) + \frac{1}{j}.$$

Sei

$$B_j := \{\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \geq 1\} = \bigcap_{m \in \mathsf{N}^*} \left(\bigcup_{l \in \mathsf{N}} \{\sum_{k=0}^{l} \varphi_k \geq 1 - \frac{1}{m}\} \right),$$

so ist $B_j \in \mathcal{B}(X)$ und $1_A \leq 1_{B_j} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$, also gilt $\mu(B_j) \leq \mu(A) + \frac{1}{j}\ \forall j \in \mathsf{N}^*$.
Für $B := \bigcap_{j \in \mathsf{N}^*} B_j$ gilt dann $B \in \mathcal{B}(X)$, $A \subset B$ und $\mu(A) = \mu(B)$. ■

Wir kommen jetzt zu der für die Beschreibung von Dichten bzgl. λ zentralen Funktionenklasse:

10.14 Definition $G : \mathsf{R} \to \mathsf{K}$ heißt *absolutstetig*, Bez. $G \in \mathcal{AC}(\mathsf{R})$, wenn $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$ und $c \in \mathsf{K}$ existieren mit

$$G = c + \int_0^\bullet g\, d\lambda.$$

Bemerkung a) Da $\int_a^\bullet g\, d\lambda = \int_a^0 g\, d\lambda + \int_0^\bullet g\, d\lambda$, kann 0 durch a und c durch c' ersetzt werden.

b) Nach dem Satz von Lebesgue ist $\mathcal{AC}(\mathsf{R}) \subset \mathcal{C}(\mathsf{R})$. Mit Hilfe des Cantor-Diskontinuums kann man zeigen, daß $\mathcal{AC}(\mathsf{R}) \subsetneq \mathcal{C}(\mathsf{R})$ (vgl. [Taylor, Ex. 9.2.5]).

Sei nun $\rho \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$, $\rho \geq 0$ und $F := \int_0^\bullet \rho\, d\lambda$. Dann ist $F : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ monoton wachsend, erzeugt also ein Lebesgue-Stieltjes-Integral μ_F, und nach Satz 10.1 ist

$\rho\cdot\lambda$ ebenfalls ein vollständiges D-I auf R. Im folgenden Satz wird $\mu_F = \rho\cdot\lambda$ gezeigt, als formale Beziehung

$$F := \int_0^\bullet \rho\, d\lambda \;\Rightarrow\; d\mu_F = \rho \cdot d\lambda.$$

10.15 Satz *Ist $F := \int_0^\bullet \rho\, d\lambda$ mit $\rho \in \mathcal{L}^1_{loc,+}(\lambda)$, so gilt $\mu_F = \rho\cdot\lambda$.*

Beweis: Sei $I \in \mathcal{S}_{\mathsf{R}}$, $\inf I =: a$, $\sup I =: b$, so folgt aus der Def. des Stieltjes-Integrals, da F stetig

$$\int 1_I\, d\mu_F = F(b) - F(a) = \int_a^b \rho\, d\lambda = \int 1_I \cdot \rho\, d\lambda.$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt mit $\nu := \rho\cdot\lambda$

$$\mu_F(\varphi) = \int \varphi\, d\mu_F = \int \varphi\cdot\rho\, d\lambda = \nu(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathsf{R}).$$

Da μ_F die Abschließung des Radon-Integrals $\mathcal{C}_c(\mathsf{R}) \ni \varphi \mapsto \int \varphi\, d\mu_F$ ist, genügt es nach Lemma 10.12 noch zu zeigen

$$\mathcal{A}_\lambda \subset \mathcal{A}_{\mu_F}.$$

Sei $A \in \mathcal{A}_\lambda$, so existiert nach Satz 10.13 $B \in \mathcal{B}(\mathsf{R})$ mit $A \subset B$ und $\lambda(B\backslash A) = 0$, wegen $\nu \ll \lambda$ folgt $\nu(B\backslash A) = 0$. Da ν Fortsetzung von μ_F ist auch $\mu_F(B\backslash A) = 0$, und mit $\mathcal{B}(\mathsf{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu_F}$ folgt $A \in \mathcal{A}_{\mu_F}$. ■

Bemerkung a) Der Satz hat folgende Umkehrung: Ist $F : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ monoton wachsend und $\mu_F \ll \lambda$, so existiert nach dem Satz von Radon-Nikodym und der Bem. dazu $\rho \in \mathcal{L}^1_{loc,+}(\lambda)$ mit $\mu_F = \rho\cdot\lambda$. Da

$$F(x+) - F(0+) = \mu_F(]0,x]) = \int_0^x \rho\, d\lambda,$$

folgt für $F_1 := \int_0^\bullet \rho\, d\lambda \in \mathcal{AC}(\mathsf{R}) : \mu_{F_1} = \mu_F$.

b) Ist ρ stetig, so ist $F' = \rho$, und demnach gilt

$$\int f\, d\mu_F = \int f\cdot F'\, d\lambda \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu_F).$$

Man erhält also wieder das Resultat aus Aufgabe 12.
Ist nur $\rho \in \mathcal{L}^1_{loc,+}(\lambda)$, so kann man zeigen, daß $\partial\eta_F = \eta_\rho$ gilt; dies ist die distributive Verallgemeinerung des Hauptsatzes.

IV
Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Das Hauptziel ist die Verallgemeinerung der Aussage aus Lemma 7.13:

$$\int_{\mathsf{R}^n} \partial_j f \, d\lambda^n = 0 \quad \text{falls } f \in \mathcal{C}_c^1(\mathsf{R}^n)$$

auf allgemeinere Integrationsmengen A und Funktionsklassen. Dazu werden zunächst in Kap. 11 geeignete geometrische Objekte, die als Rand von A auftreten und die Integration darauf eingeführt.

11 Untermannigfaltigkeiten

Seien stets $n, m \in \mathsf{N}^*$ mit $n > m$, sei $\mathsf{E}^m := \{x \in \mathsf{R}^n \,|\, x_{m+1} = ... = x_n = 0\}$, $\pi_m : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$, $x \mapsto (x_1, ..., x_m)$, $\iota : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^n$, $u \mapsto (u, 0)$.

11.1 Kriterien für Untermannigfaltigkeiten

11.1 Definition a) $M \subset \mathsf{R}^n$ heißt *eine $m-$dimensionale Untermannigfaltigkeit des R^n der Klasse $\mathcal{C}^k$*, $k \geq 1$, (*$\mathcal{C}^k-$UMF*) wenn M lokal diffeomorph zum E^m (also auch zu R^m) ist, d.h.
$\forall a \in M \; \exists$ offene Mengen $G, V \subset \mathsf{R}^n$ mit $a \in G$ und ein $\mathcal{C}^k-$Diffeomorphismus $\phi : V \to G$ mit

$$M \cap G = \phi(\mathsf{E}^m \cap V).$$

b) $\varphi : \pi_m(\mathsf{E}^m \cap V) =: U \, (\subset \mathsf{R}^m) \to M \cap G \, (\subset \mathsf{R}^n)$, $u \mapsto \phi(u, 0)$
heißt dann *eine lokale Parametrisierung* oder *eine Karte von M*.
Eine Familie $\{\varphi_\gamma : U_\gamma \to \mathsf{R}^n\}$ von Karten von M mit $\bigcup_\gamma \varphi_\gamma(U_\gamma) = M$ heißt *ein Atlas von M*.

c) Eine $(n-1)-$dim. UMF des R^n heißt *eine Hyperfläche.*

Bemerkung a) Nach Def 11.1 besitzt jede UMF M des R^n einen Atlas.

b) Mit obigen Bez. ist $\varphi = \phi \circ \iota_m|_U$ und $\varphi^{-1} = \pi_m \circ \phi^{-1}|_{M \cap G}$.

c) Manchmal wird statt φ die Abb. φ^{-1} als Karte bezeichnet.

11.2 Beispiel Ist $M = b + W$ ein $m-$dim. affiner Unterraum des R^n, so existiert ein affiner Isomorphismus $\phi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ mit $\phi(\mathsf{E}^m) = M$. Also ist M eine $m-$dim. UMF des R^n mit einem Atlas, der nur aus einer Karte $\varphi = \phi \circ \iota_m$ besteht.

Im folgenden Satz dient das Kriterien b) zur Beschreibung konkreter UMF und c) ist für die weitere theoretische Untersuchung von Bedeutung.

11.3 Satz *Sei $M \subset \mathsf{R}^n$. Dann ist äquivalent:*

a) *M ist $m-$dim. $\mathcal{C}^k-$ UMF des R^n,*

b) *$\forall a \in M$ existiert eine offene Umgebung $G \subset \mathsf{R}^n$ und eine $\mathcal{C}^k-$Abb. $g : G \to \mathsf{R}^{n-m}$ mit*

$$M \cap G = g^{-1}(\{0\}) \text{ und } \operatorname{Rang} \partial g(a) = n - m,$$

c) *$\forall a \in M$ existiert bei geigneter Numerierung der Koordinaten $U \subset \mathsf{R}^m$, $U' \subset \mathsf{R}^{n-m}$ offen mit $a \in U \times U' =: G_1$ und eine $\mathcal{C}^k-$Abb. $h : U \to \mathsf{R}^{n-m}$ mit*

$$M \cap G_1 = \operatorname{Graph}(h).$$

Beweis: a)$\Rightarrow$b) Sei $\phi : V \to G$ aus Def. 11.1, so ist $F := \phi^{-1} : G \to V$ ein $\mathcal{C}^k-$Diffeomorphismus mit $F(M \cap G) = \mathsf{E}^m \cap V$. Sei

$$g := (F_{m+1}, ..., F_n) : G \to \mathsf{R}^{n-m},$$

so ist $g \in \mathcal{C}^k(G)$ und für $x \in G$ ist

$$\begin{aligned} x \in M \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad F(x) \in \mathsf{E}^m \cap V \\ &\Leftrightarrow \quad g(x) = 0. \end{aligned}$$

Da $\operatorname{Rang} \partial F(a) = n$ ist

$$\operatorname{Rang} \partial g(a) = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \partial_1 F_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_n F_{m+1} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \partial_1 F_n & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_n F_n \end{pmatrix} (a) = n - m.$$

b)$\Rightarrow$c) Sei g aus b). Da $n - m$ der Spaltevektoren $\partial_j g(a)$ linear unabhängig sind, sei Œ

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} \partial_{m+1} g_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_n g_1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \partial_{m+1} g_{n-m} & \cdot & \cdot & \cdot & \partial_n g_{n-m} \end{pmatrix} (a) = n - m.$$

Da $g(a) = 0$ existiert nach dem Satz über implizite Funktionen
$U \subset \mathsf{R}^m$, $U' \subset \mathsf{R}^{n-m}$ offen mit $a \in U \times U' =: G_1 \subset G$
und eine $\mathcal{C}^k-$Abb. $h : U \to \mathsf{R}^{n-m}$ mit

$$\{x \in G_1 \,|\, g(x) = 0\} = \operatorname{Graph}(h).$$

c)$\Rightarrow$a) Sei h aus c) und

$$F : U \times U' \to \mathsf{R}^n, \quad (u, u') \mapsto (u, u' - h(u)).$$

Dann ist $\operatorname{Rang} \partial F(u, u') = n \ \forall (u, u') \in G_1$ und nach dem Satz über Umkehrfunktionen ist $V := F(G_1)$ offen: $\forall x \in G_1 \ \exists$ eine Umgebung $G_x \subset G_1$, so daß $F(G_x)\,(\subset V)$ Umgebung von $F(x)$ ist. Für

$$\phi : V \to G_1, \quad (u, u') \mapsto (u, u' + h(u)) \qquad (*)$$

gilt $\phi \circ F = id_G$, $F \circ \phi = id_V$. Also ist ϕ ein $\mathcal{C}^k-$Diffeomorphismus und es folgt mit (*)

$$M \cap G_1 = \operatorname{Graph}(h) = \phi(\mathsf{E}^m \cap V).$$

■

11.4 Folgerung *Ist $h : U \to \mathsf{R}^{n-m}$ wie in c), so ist*

$$\varphi : U \to \mathsf{R}^n, \quad u \mapsto (u, h(u))$$

eine Karte.

Beweis: Sei ϕ wie in (*) definiert, so ist $\phi(u,0) = \varphi(u)\ \forall u \in U$. ■

11.5 Beispiel Die *Sphäre* $S_r^{n-1} := \{x \in \mathsf{R}^n \,|\, ||x|| = r\}$ mit Radius $r > 0$ ist nach dem Kriterium in Satz 11.3 b) eine $\mathcal{C}^\infty-$Hyperfläche des R^n, denn für

$$g : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}, \quad x \mapsto ||x||^2 - r$$

gilt $S_r^{n-1} = \{x \in \mathsf{R}^n \,|\, g(x) = 0\}$ und da $\operatorname{grad} g(x) = 2x$ ist $\operatorname{grad} g(x) \neq 0\ \forall x \in S_r^{n-1}$.
Wir geben einen Atlas an, der gemäß Folg. 11.4 konstruiert wird: Sei

$$U := \{u \in \mathsf{R}^{n-1} \,|\, ||u|| < r\},$$

$$h^\pm : U \to \mathsf{R}, \quad u \mapsto \pm\sqrt{r^2 - ||u||^2},$$

und für $j \in \{1, ..., n\}$

$$\varphi_j^\pm : U \to \mathsf{R}^n, \quad u \mapsto (u_1, ..., u_{j-1}, h^\pm(u), u_{j+1}, ..., u_{n-1})$$

und

$$G_j^\pm := \{x \in \mathsf{R}^n \,|\, \pm x_j > 0\}.$$

Da $S_r^{n-1} \cap G_j^\pm = \varphi_j^\pm(U)\ (= \{(u_1, ..., u_{j-1}, h^\pm(u), u_{j+1}, ..., u_{n-1}) \,|\, u \in U\})$ sind nach Folg. 11.4 (bei Umnumerierung der Koordinaten) $\varphi_j^\pm$ Karten. Da $S_r^{n-1} \subset \bigcup G_j^\pm$ ist demnach $\{\varphi_j^\pm\}$ ein Atlas aus $2n$ Karten.
Für $n = 2$ (und $n = 3$) erhält man auch einen Atlas mittels Polarkoordinaten: Sei

$$\phi :]-r, \infty[\times]0, 2\pi[=: V \to \mathsf{R}^2 \backslash (\mathsf{R}_+ \times \{0\}) =: G, \quad (t, \vartheta) \mapsto ((t+r)\cos\vartheta, (t+r)\sin\vartheta),$$

so ist ϕ ein $\mathcal{C}^\infty-$Diffeomorphismus (vgl. Satz 6.7) mit $\phi(\{0\}\times]0, 2\pi[) = S_r^1 \cap G$, also ist

$$\varphi :]0, 2\pi[\to \mathsf{R}^2, \quad \vartheta \mapsto (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$$

eine Karte. Ersetzt man $]0, 2\pi[$ durch $]-\pi, \pi[$, so erhält man einen Atlas aus 2 Karten.
Man kann zeigen, daß S_r^1 nicht durch eine einzige Karte darstellbar ist.

11.2 Der Tangentialraum

Dies ist eines der grundlegenden geometrischen Objekte, die einer UMF zugeordnet werden. Er wird hier insbesondere zur Veranschaulichung der Definition des Integrals auf UMF benutzt.
Sei in diesem Abschnitt M eine $k-$dim. $\mathcal{C}^1-$UMF des R^n und $a \in M$.

11.6 Definition $v \in \mathsf{R}^n$ heißt *Tangentialvektor an M in $a \in M$*, wenn $\varepsilon > 0$ und eine $\mathcal{C}^1-$Kurve $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subset \mathsf{R}^n$ existiert mit

$$\gamma(0) = a \text{ und } \gamma'(0) = v.$$

$$T_aM := \{v \in \mathsf{R}^n \,|\, v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}$$

heißt der *Tangentialraum an M in a.*

Der folgende Satz gibt ähnlich zu Satz 11.3 Kriterien für Tangentialvektoren:

11.7 Satz *Unter obigen Vor. gilt*

a) *T_aM ist $m-$dim. UVR des R^n.*

b) *Ist $\varphi : U \to \mathsf{R}^n$ eine Karte von M mit $\varphi(y) = a$, so ist*

$$(\partial_1\varphi(y), ..., \partial_m\varphi(y))$$

eine Basis von T_aM.

c) *Ist $g : G \to \mathsf{R}^{n-m}$ aus $\mathcal{C}^1$, $G \in \mathsf{R}^n$ offen mit $a \in G$,* Rang $\partial g(a) = n - m$ *und $M \cap G = g^{-1}(\{0\})$, so ist*

$$(\operatorname{grad} g_1(a), ..., \operatorname{grad} g_{n-m}(a))$$

eine Basis des Normalenraums $N_aM := T_aM^{\perp}$.

Beweis: Sei

$$W_\varphi := \operatorname{Span}(\partial_1\varphi(y), ...\partial_m\varphi(y)), W_g := \operatorname{Span}(\operatorname{grad} g_1(a), ..., \operatorname{grad} g_{n-m}(a)).$$

Da $\partial\varphi(y)$ eine $n \times m$ Untermatrix von $\partial\phi(y, 0)$ (mit ϕ aus Def. 11.1), ist Rang $\partial\varphi(y) = m$, also ist dim$W_\varphi = m$ und es ist dim$W_g = n - m$. Aus

$$W_\varphi \subset T_aM \subset W_g^{\perp}$$

folgt dann die Beh.

1) $W_\varphi \subset T_aM$: Sei $v := \sum_1^m \alpha_j\, \partial_j\varphi(y) \in W_\varphi$,
$\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\to M,\ t \mapsto \varphi(y + t\sum_1^m \alpha_j\, e^j)$, so ist $\gamma(0) = \varphi(y) = a$ und nach der Kettenregel ist $\gamma'(0) = \partial\varphi(y) \cdot \sum_1^m \alpha_j\, e^j = v$.

2) $T_aM \subset W_g^{\perp}$: Sei $v = \gamma'(0) \in T_aM$ wobei $\gamma :] - \varepsilon, \varepsilon[\to M$ $\mathcal{C}^1-$Kurve mit $\gamma(0) = a$, so ist $g \circ \gamma = 0$, also folgt aus der Kettenregel $\partial g(a)\gamma'(0) = 0$ und demnach ist $< \operatorname{grad} g_j(a) \,|\, \gamma'(0) >= 0$ für $j = 1, ..., n - m$. ■

11.8 Beispiel Für die Sphäre $S_r^{n-1} = g^{-1}(\{0\})$ mit $g = ||\cdot||^2 - r^2$ ist grad $g(a) = 2a$ $\forall a$, also ist

$$N_aS_r^{n-1} = \mathsf{R}a \text{ und } T_aS_r^{n-1} = (\mathsf{R}a)^{\perp}.$$

11.3 Lokale Integration auf UMF

Sei M eine $k-$dim. $\mathcal{C}^1-$UMF des R^n, $\varphi : U \to M \subset \mathsf{R}^n$ eine Karte von M, sei $\varphi(y) = a$.
Wir betrachten zunächst die Integration auf T_aM :

Sei $v^1, ..., v^m$ eine Orthonormalbasis von T_aM (bzgl. des Skalarproduktes des R^n), $e^1, ..., e^m$ die kanonische Basis des R^m und sei

$$S : T_aM \to \mathsf{R}^m \text{ linear mit } Sv^j = e^j \text{ für } j = 1, ..., m.$$

Da S Längen und Winkel erhält, definiert man

$$\int_{T_aM} f\, d\sigma := \int_{\mathsf{R}^m} f \circ S^{-1}\, d\lambda^m \quad \forall f : T_aM \to \mathsf{K} \text{ mit } f \circ S^{-1} \in \mathcal{L}^1(\lambda^m). \qquad (\#)$$

Wir wollen dieses *Oberflächen-Integral von f* durch die Karte φ ausdrücken:
Da nach Satz 11.7 $D := D\varphi(y) : \mathsf{R}^m \to T_aM$ ein VR-Isomorphismus, ist auch $S \circ D : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^m$ ein Isomorphismus. Seien nun A und B die Matrixdarstellungen von S und D bzgl. der Basen $v^1, ..., v^m$ und $e^1, ..., e^m$, so ist $A = E_m$ und AB ist die Matrixdarstellung von $S \circ D$ bzgl. der Basis $e^1, ..., e^m$. Damit folgt

$$0 < (\det S \circ D)^2 = (\det AB)^2 = (\det B)^2 = \det B^t \cdot \det B = \det B^t B =: g_\varphi(y).$$

Da $\partial_j \varphi(y) = D\, e^j = \sum_{l=1}^m b_{lj} v^l$, folgt aus der Orthonormiertheit der v^j

$$\begin{aligned}
\left((\partial\varphi(y))^t \partial\varphi(y)\right)_{jk} &= <\partial_j\varphi(y) \,|\, \partial_k\varphi(y)> = <\sum_{l=1}^m b_{lj} v^l \,|\, \sum_{i=1}^m b_{ik} v^i> \\
&= \sum_{l=1}^m b_{lj} b_{lk} = (B^t B)_{jk},
\end{aligned}$$

also ist

$$g_\varphi(y) = \det(\partial\varphi(y))^t \partial\varphi(y).$$

Aus Satz 6.4 erhält man nun die gesuchte Darstellung von $\int_{T_aM} f\, d\sigma$

$$\begin{aligned}
\int_{T_aM} f\, d\sigma &= \int_{\mathsf{R}^m} (f \circ D) \circ (S \circ D)^{-1}\, d\lambda^m \qquad (*) \\
&= \int_{\mathsf{R}^m} (f \circ D)\, |\det S \circ D|\, d\lambda^m = \int_{\mathsf{R}^m} (f \circ D\varphi(y)) \sqrt{g_\varphi(y)}\, d\lambda^m .
\end{aligned}$$

11.9 Definition $g_\varphi(u) := \det(\partial\varphi(u))^t \partial\varphi(u)\ (> 0)$ heißt *die Gram-Determinante von φ in $u \in U$*,
$(<\partial_j\varphi(u) | \partial_k\varphi(u)>_{\mathsf{R}^n})_{1 \le j,k \le m}$ heißt *die Gram-Matrix von φ in $u \in U$*.

11.10 Beispiel Sei M eine Hyperfläche des R^3, $\varphi : U \to M$ eine Karte von M, $v^j := \partial_j\varphi(u)$. Für das Kreuzprodukt $v^1 \times v^2$ gilt (vgl z.B. [Fischer, LA])

$$||v^1 \times v^2||^2 = ||v^1||^2 \cdot ||v^2||^2 \cdot (\sin\vartheta)^2 \text{ wobei } \cos\vartheta := \frac{<v^1 \,|\, v^2>}{||v^1|| \cdot ||v^2||}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} g_\varphi(u) &= \det \begin{pmatrix} < v^1 \,|\, v^1 > & < v^1 \,|\, v^2 > \\ < v^2 \,|\, v^1 > & < v^2 \,|\, v^2 > \end{pmatrix} \\ &= ||v^1||^2 \cdot ||v^2||^2 - < v^1 \,|\, v^2 >^2 \\ &= ||v^1||^2 \cdot ||v^2||^2 \cdot (\sin \vartheta)^2 \\ &= ||v^1 \times v^2||^2. \end{aligned}$$

11.11 Beispiel Sei M eine Hyperfläche des R^n und $\varphi : U \to M$ eine Karte wie in Folg. 11.4, also $\varphi(u) = (u, h(u))\ \forall u \in U$, wobei $h : U \to \mathsf{R}$ mit $M \cap G_1 = \mathrm{Graph}(h)$. Dann ist

$$g_\varphi(u) = 1 + ||\,\mathrm{grad}\, h(u)||^2 \quad \forall u \in U.$$

Beweis: Sei $v := \mathrm{grad}\, h(u)$, so ist

$$\partial\varphi(u) = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ v \end{pmatrix}.$$

Sei

$$B := \begin{pmatrix} E_{n-1} & -v^t \\ v & 1 \end{pmatrix},$$

so folgt durch Entwicklung nach der letzten Zeile, ähnlich wie im Beweis von Lemma 6.9
$\det B = 1 + ||v||^2$. Andererseits gilt

$$(\det B)^2 = \det B^t \cdot B = \det \begin{pmatrix} \partial\varphi(u)^t \cdot \partial\varphi(u) & 0 \\ 0 & 1 + ||v||^2 \end{pmatrix} = g_\varphi(u)\,(1 + ||v||^2),$$

also gilt die Beh. ■

Zur Definition des Oberflächen-Integrals auf $\varphi(U)$ liegt es nahe, die Formel (*) vor Def. 11.9 zu verallgemeinern. Wir benötigen dazu noch die Unabhängigkeit von der Karte:

11.12 Lemma (Kartenwechsel) *Sind für $j = 1, 2$ $\varphi_j : U_j \to M$ Karten mit $W := \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) \neq \emptyset$, sei $U^j := \varphi_j^{-1}(W)$ und $\varphi^j := \varphi_j|_{U^j}$, so gilt*

a) *φ^1, φ^2 sind Karten von M und*
$\tau := (\varphi^2)^{-1} \circ \varphi^1 : U^1 \to U^2$ ist ein $\mathcal{C}^1-$Diffeomorphismus.

b) *Für $f : W \to \mathsf{K}$ gilt*

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^1 \cdot \sqrt{g_{\varphi^1}} \in \mathcal{L}^1(U^1, \lambda^m) \quad &\Leftrightarrow \quad f \circ \varphi^2 \cdot \sqrt{g_{\varphi^2}} \in \mathcal{L}^1(U^2, \lambda^m) \\ &\Leftrightarrow \quad : f \in \mathcal{L}^1(W, \sigma), \end{aligned}$$

und dann ist

$$\int_{U^1} f \circ \varphi^1 \cdot \sqrt{g_{\varphi^1}}\, d\lambda^m = \int_{U^2} f \circ \varphi^2 \cdot \sqrt{g_{\varphi^2}}\, d\lambda^m =: \int_W f\, d\sigma.$$

Beweis: a) Seien $\phi_j : V_j \to G_j$ die den φ_j gemäß Def. 11.1 zugeordneten Diffeomorphismen, so ist $W = M \cap G_1 \cap G_2$, da
$V^j := \phi_j^{-1}(\ G_1 \cap G_2)$ offen, ist $\phi^j := \phi_j|_{V^j} : V^j \to G_1 \cap G_2$ ein Diffeomorphismus und $U^j = \pi_m(\mathsf{E}^m \cap V^j)$ ist offen. Also ist $\varphi^j = \phi^j \circ \iota_m|_{U^j}$ eine Karte.

Nach der Bem. zu Def. 11.1 ist

$$\tau = \pi_m \circ (\phi^2)^{-1} \circ \phi^1 \circ \iota_m|_{U^1},$$

also ist $\tau \in \mathcal{C}^1$ und ebenso folgt $\tau^{-1} \in \mathcal{C}^1$. Damit gilt a).
b) Da $\varphi^1 = \varphi^2 \circ \tau$ ist $\partial\varphi^1 = ((\partial\varphi^2) \circ \tau) \cdot \partial\tau$, also ist

$$\begin{aligned} g_{\varphi^1} &= \det\left((\partial\varphi^1)^t \partial\varphi^1\right) \\ &= \det\left(\partial\tau^t \cdot ((\partial\varphi^2) \circ \tau)^t \cdot ((\partial\varphi^2) \circ \tau) \cdot \partial\tau\right) \\ &= (\det \partial\tau)^2 \cdot g_{\varphi^2} \circ \tau. \end{aligned}$$

Aus der Trafo-Formel folgt daraus

$$\begin{aligned} & \int_{U^2} f \circ \varphi^2 \cdot \sqrt{g_{\varphi^2}}\, d\lambda^m \\ = & \int_{U^1} (f \circ \varphi^2) \circ \tau \cdot \sqrt{g_{\varphi^2} \circ \tau}\ \cdot |\det \partial\tau|\, d\lambda^m \\ = & \int_{U^1} f \circ \varphi^1 \cdot \sqrt{g_{\varphi^1}}\, d\lambda^m. \end{aligned}$$

■

Bemerkung Damit ist das *lokale Oberflächen-Integral* durch

$$\int_{\varphi(U)} f(x)\, d\sigma(x) := \int_U f \circ \varphi(u) \cdot \sqrt{g_\varphi(u)}\, du$$

kartenunabhängig (im Sinne von Lemma 11.12) definiert. Als Merkregel für die lokale Integrationsformel hat man ähnlich wie bei der Trafo-Formel:
Mit $x = \varphi(u)$ "folgt" $x \in W \Leftrightarrow u \in U$ und $d\sigma(x) = \sqrt{g_\varphi(u)}\, du$.
Ist M ein UVR, $\phi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ orthogonal mit $\phi(\mathsf{E}^m) = M$, $\varphi = \phi \circ \iota_m$, so ist E_m die Gram-Matrix von φ, und demnach

$$\int_M f\, d\sigma := \int_{\mathsf{R}^m} f \circ \varphi\, d\lambda^m,$$

also wieder die Ausgangsformel (#) für die Integration auf $T_a M$.

11.4 Globale Integration auf UMF

Diese wird durch eine Teilung der Eins auf die lokale Integation zurückgeführt.
Sei M eine $m-$dim. $\mathcal{C}^1-$UMF des R^n.

Wir setzen im Folgenden stets voraus, daß M einen endlichen Atlas $\varphi_1, ..., \varphi_l$ besitzt. Dies gilt, wenn M kompakt ist und nur solche UMF werden in Kap. 12 betrachtet.
Sei für $j \in \{1, ..., l\}$
$\varphi_j : U_j \to M$, $W_j := \varphi_j(U_j)$ und

$$A_j := W_j \setminus \bigcup_{k<j} W_k \, (= W_j \setminus \bigcup_{k<j} (W_j \cap W_k)\,)\,.$$

Dann ist $\sum_j A_j = M$, und für eine beliebige Karte $\varphi : U \to M$ gilt nach Lemma 11.12:

$$\varphi^{-1}(W_j) \text{ und } \varphi^{-1}(W_j \cap W_k) \text{ sind offen,}$$

also ist $\varphi^{-1}(A_j)$ als Differenz von offenen Mengen λ^m-meßbar. Damit ist

$$1_{A_j} \circ \varphi = 1_{\varphi^{-1}(A_j)} \in \mathcal{L}^0(U, \lambda^m).$$

Bezeichnung $\{\chi_j := 1_{A_j} \,|\, j = 1, ..., l\}$ heißt eine *meßbare Teilung der Eins von M bzgl. $W_1, ..., W_l$.*

Für die folgende Def. ist wieder ein Unabhängigkeitsnachweis erforderlich.
Ist $\{\varphi'_i : U'_i \to W'_i \subset M\}$ ein weiterer Atlas von M und $A'_i := W'_i \setminus \bigcup_{k<i} W'_k$, so gilt

11.13 Lemma *Ist $f : M \to \mathsf{K}$, so ist*

$$f \in \mathcal{L}^1(A_j, \sigma) \;\; \forall j \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(A'_i, \sigma) \;\; \forall i$$

und dann ist

$$\sum_j \int_{A_j} f \, d\sigma = \sum_i \int_{A'_i} f \, d\sigma.$$

Beweis: Nach Def. ist

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{A_j} f \, d\sigma &= \sum_j \int_{U_j} (\chi_j \cdot f) \circ \varphi_j \sqrt{g_{\varphi_j}} \, d\lambda^m \\ &= \sum_j \sum_i \int_{U_j} (\chi'_i \cdot \chi_j \cdot f) \circ \varphi_j \sqrt{g_{\varphi_j}} \, d\lambda^m, \end{aligned}$$

letzteres, da $\sum_i \chi'_i = 1$. Da $\chi'_i \cdot \chi_j$ auf $(W_j \cap W'_i)^c$ Null ist, ist das Kartenwechsel-Lemma anwendbar und man erhält damit

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{A_j} f \, d\sigma &= \sum_i \sum_j \int_{U'_i} (\chi'_i \cdot \chi_j \cdot f) \circ \varphi'_i \sqrt{g_{\varphi'_i}} \, d\lambda^m \\ &= \sum_i \int_{A'_i} f \, d\sigma. \end{aligned}$$

■

Bemerkung Vertauscht man im Atlas die Reihenfolge der Karten, so daß φ_k an erster Stelle steht, so ist $A_k = W_k$, also folgt

$$f \in \mathcal{L}^1(A_j, \sigma) \ \ \forall j \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(W_j, \sigma) \ \ \forall j.$$

11.14 Definition Mit obigen Bez. heißt

a) $f : M \to \mathsf{K}$ *$\sigma-$integrierbar auf M*, Bez.: $f \in \mathcal{L}^1(M, \sigma)$, wenn $f \in \mathcal{L}^1(W_j, \sigma) \ \ \forall j$ und dann sei

$$\int_M f \, d\sigma := \sum_j \int_{W_j} \chi_j \cdot f \, d\sigma$$

das *Oberflächen-Integral von f über M.*
$d\sigma \, (= d\sigma_M)$ heißt *Flächenelement von M.*

b) $f : M \to \mathsf{K}$ heißt *$\sigma-$meßbar,* Bez. $f \in \mathcal{L}^0(M, \sigma)$, wenn $f \circ \varphi_j \in \mathcal{L}^0(U_j, \lambda^m) \ \ \forall j$.

c) Für $1_A \in \mathcal{L}^0(M, \sigma)$ sei

$$\int_A f \, d\sigma := \int_M f \cdot 1_A \, d\sigma \text{ falls } f \cdot 1_A \in \mathcal{L}^1(M, \sigma),$$

und für $1_A \in \mathcal{L}^1(M, \sigma)$ sei $\sigma(A) := \int_M 1_A \, d\sigma$.

d) $N \subset M$ heißt $\sigma-$NM, falls $1_N \in \mathcal{L}^1(M, \sigma)$ mit $\sigma(N) = 0$.

Bemerkung Da $\sqrt{g_{\varphi_j}} > 0$ und stetig, ist

$$f \in \mathcal{L}^0(M, \sigma) \Leftrightarrow f \circ \varphi_j \cdot \sqrt{g_{\varphi_j}} \in \mathcal{L}^0(U_j, \lambda^m) \ \ \forall j.$$

11.15 Beispiel Sei M 1$-$dim. $\mathcal{C}^1-$UMF des R^n, $\varphi : U \to M$ eine Karte, so ist

$$g_\varphi(t) = < \varphi'(t) \,|\, \varphi'(t) > .$$

Ist $I \subset U$ ein kompaktes Intervall, so ist $1_{\varphi(I)} \in \mathcal{L}^1(M, \sigma)$ und

$$\sigma(\varphi(I)) := \int_{\varphi(I)} d\sigma = \int_I ||\varphi'(t)|| \, dt,$$

man erhält also für $\sigma(\varphi(I))$ wieder die aus Analysis II bekannte Formel für die Länge der Kurve $\varphi|_I : I \to \mathsf{R}^n$.

11.5 Integration auf $S_{\mathsf{r}}^{\mathsf{n-1}}$

In diesem Abschnitt soll die Integrationsformel für rotationssymmetrische Funktionen aus Satz 6.10 verallgemeinert werden. Sei dazu nach Bsp. 11.5

$$\varphi_r : U_r \to \mathsf{R}^n, \quad u \mapsto (u, h(u))$$

eine Karte von S_r^{n-1}, wobei $U_r = \{u \in \mathsf{R}^{n-1} \,|\, ||u|| < r\}$ und

$h : U_r \to \mathsf{R}, \quad u \mapsto \sqrt{r^2 - ||u||^2}$.
Dann ist $\varphi_r(U_r) = \{x \in S_r^{n-1} \,|\, x_n > 0\} =: S_r^+$ und $\operatorname{grad} h(u) = -\frac{1}{h(u)} \cdot u$, also ist nach Bsp. 11.11

$$g_{\varphi_r}(u) = 1 + \frac{||u||^2}{r^2 - ||u||^2} = \frac{r^2}{r^2 - ||u||^2}.$$

Für $f \in \mathcal{L}^1(S_r^+, \sigma)$ erhält man mit $u \mapsto r \cdot u$ und da $r \cdot \varphi_1(u) = \varphi_r(ru)$

$$\begin{aligned} \int_{S_r^+} f(x)\, d\sigma(x) &= \int_{U_r} (f \circ \varphi_r)(u) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - ||u||^2}}\, du \qquad (*) \\ &= \int_{U_1} (f \circ \varphi_r)(ru) \cdot \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - ||u||^2}}\, du \\ &= r^{n-1} \int_{U_1} (f(r\cdot) \circ \varphi_1)(u) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - ||u||^2}}\, du \\ &= r^{n-1} \int_{S_1^+} (f(rx)\, d\sigma(x). \end{aligned}$$

Diese Formel wird in dem folgenden Bsp. und Satz benutzt:

11.16 Beispiel (Sphärenoberfläche) Im Beweis von Satz 6.10 ist gezeigt

$$\tau_n := \lambda^n(B_1^n) = \frac{2}{n} \int_{U_1} \frac{1}{\sqrt{1 - ||u||^2}}\, du.$$

Setzt man in (*) $f = 1$, so folgt

$$\sigma(S_r^+) = r^{n-1}\sigma(S_1^+) = r^{n-1}\, \frac{n}{2}\, \tau_n.$$

Das Gleiche gilt für die untere Halbsphäre S_r^-, und mit dem Atlas aus Bsp. 11.5 erhält man, daß $S_r^{n-1} \backslash (S_r^+ \cup S_r^-)$ eine $\sigma-$NM ist, also gilt

$$\omega_n := \sigma(S_1^{n-1}) = n \cdot \tau_n \text{ und } \sigma(S_r^{n-1}) = r^{n-1} \cdot \omega_n.$$

Insbesondere ist nach Bsp. 6.2 $\omega_2 = 2\,\pi$ und $\omega_3 = 4\,\pi$.

Die folgende Verallgemeinerung von Satz 6.10 gibt eine der wichtigen Formeln der mehrdimensionale Integration:

11.17 Satz *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(S_r^{n-1}, \sigma)$ für $\lambda-$fast alle $r \in \mathsf{R}_+^*$, $r \mapsto \int_{S_r^{n-1}} f(x)\, d\sigma(x) \in \mathcal{L}^1(\mathsf{R}_+^*, \lambda)$ und es gilt*

$$\int_{\mathsf{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{n-1}} f(x)\, d\sigma(x) \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{S_1^{n-1}} f(rx)\, d\sigma(x) \right) r^{n-1}\, dr.$$

Beweis: Mit den Bez. aus (*) und $(\mathsf{R}^n)^+ := \{x \in \mathsf{R}^n \,|\, x_n > 0\}$ ist im Beweis von Satz 6.10 gezeigt

$$\int_{(\mathsf{R}^n)^+} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{U_1} f(ru, r\sqrt{1-||u||^2}) \cdot \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-||u||^2}}\,du \right) dr$$

wobei das innere Integral f.ü. definiert ist und nach (*) gerade $\int_{S_r^+} f(x)\,d\sigma(x)$ ergibt. Betrachtet man analog das Integral über $(\mathsf{R}^n)^-$, so folgt die Existenzaussage und die erste Integralformel, die zweite folgt ebenfalls aus (*). ■

Bemerkung Für rotationssymmetrische Funktionen folgt mit Bsp. 11.16 wieder die Formel in Satz 6.10.

12 Die Integralsätze

Im Zentrum dieses Kapitels steht der Gaußsche Integralsatz, der als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung interpretiert werden kann.

12.1 Kompakta mit glattem Rand

Dies sind die Mengen, auf denen wir den Gaußschen Integralsatz formulieren und beweisen werden.

12.1 Definition $A \subset \mathsf{R}^n$ heißt *Kompaktum mit glattem Rand*, wenn gilt: A ist kompakt, und zu jedem $a \in \partial A$, dem Rand von A, existiert eine offene Umgebung $G \subset \mathsf{R}^n$ und $g : G \to \mathsf{R}$ aus $\mathcal{C}^1$ mit $\operatorname{grad} g(x) \neq 0 \ \forall x \in G$ und

$$A \cap G = \{x \in G \,|\, g(x) \leq 0\}.$$

12.2 Satz *Unter diesen Vor. ist*

$$\partial A \cap G = \{x \in G \,|\, g(x) = 0\}.$$

Insbesondere ist ∂A eine $\mathcal{C}^1-$Hyperebene.

Beweis: Ist $g(x) > 0$ (< 0), so gilt dies auch in einer Umgebung von x, also ist $x \notin \partial A$.
Ist $g(x) = 0$ und sei

$$v(x) := \frac{\operatorname{grad} g(x)}{||\operatorname{grad} g(x)||} \ (=: v),$$

so gilt nach Def. der Diff'barkeit

$$\begin{aligned} g(x + s\,v) &= g(x) + < \operatorname{grad} g(x) \,|\, s\,v > + ||s\,v|| \cdot r(s\,v) \\ &= s\left(||\operatorname{grad} g(x)|| + \frac{|s|}{s} \cdot r(s\,v) \right) \end{aligned}$$

mit $\lim_{s \to 0} r(s\,v) = 0$. Also existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$g(x + s\,v) \begin{cases} > 0, \text{ also } x + s\,v \in A^c & \forall s \in]0, \varepsilon[\\ < 0, \text{ also } x + s\,v \in A & \forall s \in]-\varepsilon, 0[\end{cases}, \qquad (*)$$

und demnach ist $x \in \partial A$. Aus Satz 11.3 folgt die zweite Beh. ■

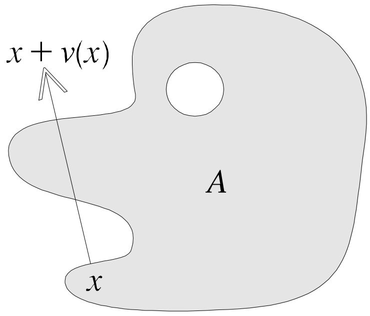
Die folgende Def. und die Bem. dazu geben eine geometrische Interpretation eines Kompaktums mit glattem Rand:

12.3 Definition Sei $A \subset \mathsf{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so heißt $v : \partial A \to \mathsf{R}^n$ ein *äußeres Einheitsnormalen-Vektorfeld (äENV) von A*, wenn $\forall x \in \partial A$ gilt:

a) $||v(x)|| = 1$,

b) $v(x) \in N_x\partial A$ $(= (T_x\partial A)^\perp)$,

c) $\exists \varepsilon > 0$ mit $x + s\,v(x) \begin{cases} \in A^c & \forall s \in]0,\varepsilon[\\ \in A & \forall s \in]-\varepsilon, 0[\end{cases}$.



Bemerkung Nach (*) existiert ein äENV v, und da $N_x\partial A$ eindimensional (Satz 11.7), ist v eindeutig. Also gilt lokal $v(x) = ||\operatorname{grad} g(x)||^{-1}\cdot\operatorname{grad} g(x)$, und demnach ist v stetig (da lokal stetig).

12.4 Beispiel Sei $A = B_r^n$, $g : \mathsf{R}^n\backslash\{0\} =: G \to \mathsf{R}$, $x \mapsto ||x||^2 - r^2$, so ist $B_r^n \cap G = \{x \in G \,|\, g(x) \leq 0\}$ und $\operatorname{grad} g(x) = 2\,x \neq 0$ $\forall x \in G$. Also ist B_r^n ein Kompaktum mit glattem Rand, $\partial A = \{x \in G \,|\, g(x) = 0\} = S_r^{n-1}$, und

$$v : S_r^{n-1} \to \mathsf{R}^n, \quad x \mapsto \frac{1}{r}\,x$$

ist äENV.

12.2 Der Integralsatz von Gauß

Sei stets $A \subset \mathsf{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $v : \partial A \to \mathsf{R}^n$ das äENV von A.

12.5 Satz (Gaußscher Integralsatz, Divergenzsatz) *Sei $V \subset \mathsf{R}^n$ eine offene Umgebung von A und $F = (F_1, ..., F_n) : V \to \mathsf{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1-$Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\,dx = \int_{\partial A} < F(x) \,|\, v(x) > \,d\sigma(x). \qquad (*)$$

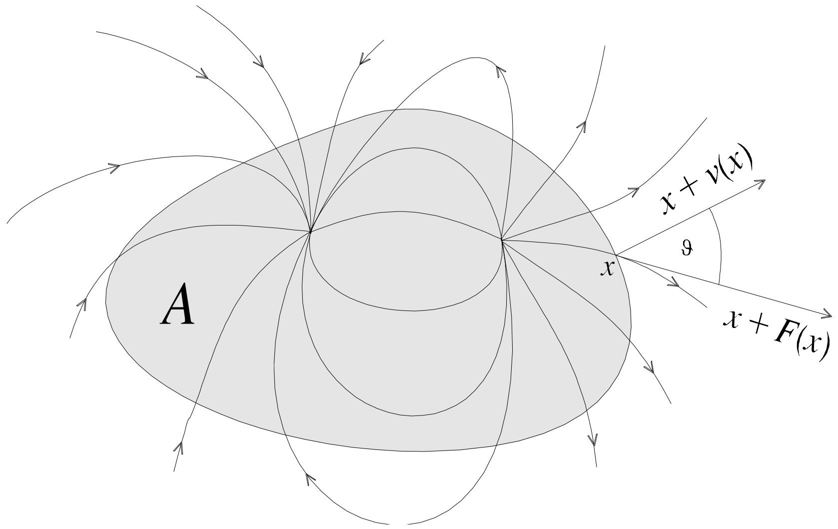
Dabei ist $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \partial_j F_j$.

Bemerkung Die Beh. ist äquivalet zu:
$\forall f : V \to \mathsf{R}$ aus $\mathcal{C}^1$ und $j \in \{1, ..., n\}$ gilt

$$\int_A \partial_j f(x)\,dx = \int_{\partial A} f(x)\,v_j(x)\,d\sigma(x), \qquad (**)$$

denn (**) folgt aus (*) mit $F := f \cdot e^j$, und (*) aus (**) mit $f := F_j$ und Summation über j.
Die Formel (**) ist die gesuchte Verallgemeinerung von Lemma 7.13, (*) läßt sich als Verallgemeinerung des Hauptsatzes auffassen.

Der Gaußsche Integralsatz hat folgende physikalische Interpretation:



In der Skizze ist F durch die *Flußlinien*, d.h. durch die Lösungskurven von $x'(t) = F(x(t))$ veranschaulicht. Für $x \in \partial A$ ist wegen $||v(x)|| = 1$

$$< F(x) \,|\, v(x) >= ||F(x)|| \cdot \cos \vartheta,$$

wobei ϑ der von $F(x)$ und $v(x)$ eingeschlossene Winkel sei.
$< F(x) \,|\, v(x) > \; d\sigma(x)$ wird demnach als Fluß des Vektorfeldes F durch das "Oberflächenelement $d\sigma(x)$" interpretiert; man vergleiche dazu die Diskussion der Integration auf T_xM bei der Einführung des Oberflächenintegrals. Damit erhält man

$$\int_{\partial A} < F(x) \,|\, v(x) > \; d\sigma(x) \doteq \text{Gesamtfluß von } F \text{ durch die Oberfläche } \partial A. \quad (+)$$

Da $\operatorname{div} F$ stetig, ist für $x \in A$

$$\lim_{r \to 0} (\sup\{|\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(y)| \,|\, y \in B^n_r(x)\} = 0,$$

also folgt mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(x) &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda^n(B^n_r(x))} \int_{B^n_r(x)} (\operatorname{div} F(x) - \operatorname{div} F(y) + \operatorname{div} F(y))\, dy \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda^n(B^n_r(x))} \int_{B^n_r(x)} \operatorname{div} F(y)\, dy \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda^n(B^n_r(x))} \int_{S^{n-1}_r(x)} < F(y) \,|\, v(y) > \; d\sigma(y). \end{aligned}$$

Mit (+) erhält man

$$\operatorname{div} F(x) \ \doteq \ \text{Quell-(bzw. Sicker-) Dichte von } F \text{ in } x,$$

und demnach

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\, dx \ \doteq \ \text{Gesamtquellstärke von } F \text{ in } A.$$

Mit diesen Interpretationen besagt also der Gaußsche Satz:

Gesamtquellstärke von F in A = Gesamtfluß von F durch die Oberfläche ∂A.

Z.B. ist im ladungsfreien Raum für das elektrische Feld beides Null.

12.6 Beispiel Sei $F = id_{\mathsf{R}^n}$, so ist $\operatorname{div} F(x) = n \ \forall x \in \mathsf{R}^n$ (alle Punkte sind also Quellen) und demnach gilt

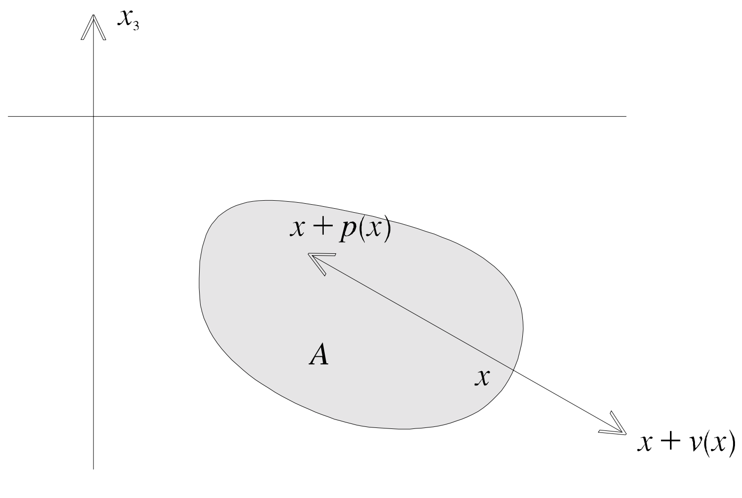
$$n \cdot \lambda^n(A) = \int_{\partial A} < x \,|\, v(x) > \, d\sigma(x).$$

Speziell für $A = B_1^n$ ist $v(x) = x \ \forall x \in S_1^{n-1}$ (Bsp. 12.4), also folgt

$$n \cdot \tau_n = n \cdot \lambda^n(B_1^n) = \int_{S_1^{n-1}} ||x||^2 \, d\sigma(x) = \sigma(S_1^{n-1}) = \omega_n.$$

Man erhält wieder das Resultat aus Bsp. 11.16.

12.7 Beispiel (Archimedes-Prinzip) Sei $A \subset \mathsf{R}^n$ ein Körper (Kompaktum mit glattem Rand) in einer Flüssigkeit mit konstanter spezifischer Wichte ρ.



Für den Druck $p(x)$ auf A in $x \in \partial A$ gilt dann $p(x) = \rho \cdot x_3 \cdot v(x)$, $p(x)$ ist wegen $x_3 < 0$ also ins Innere von A gerichtet. Sei $K \in \mathsf{R}^3$ die auf A wirkende Auftriebskraft, so gilt für $j \in \{1, 2, 3\}$

$$K_j = \int_{\partial A} p_j(x)\, d\sigma(x) = \int_{\partial A} \rho \cdot x_3 \cdot v_j(x)\, d\sigma(x) = \int_A \rho \cdot \partial_j f(x)\, dx,$$

Letzteres aus der Formel (**) mit $f(x) := x_3$. Man erhält demnach

$$K = \rho \cdot \lambda^3(A) \cdot e^3,$$

die Auftriebskraft wirkt in x_3-Richtung und ist vom Betrag gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Der folgende Satz ist für die Behandlung der partiellen Differentialgleichung $\Delta f = h$ grundlegend:

12.8 Satz (Greensche Formel) *Sei V eine offene Umgebung von A, $f, g : V \to \mathsf{R}$ aus $\mathcal{C}^2$, sei $\partial_v f =< \operatorname{grad} f \mid v >$ die Richtungsableitung von f nach v und $\Delta f = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f$ der Laplace-Operator von f. Dann gilt*

$$\int_A (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\,d\lambda^n = \int_{\partial A} (f\,\partial_v g - g\,\partial_v f)\,d\sigma.$$

Beweis: Man wendet Satz 12.5 auf

$$F := f\ \operatorname{grad} g - g\ \operatorname{grad} f$$

an: Dann ist

$$< F \mid v >= f\,\partial_v g - g\,\partial_v f,$$

und aus $\operatorname{div}(f\ \operatorname{grad} g) =< \operatorname{grad} f \mid \operatorname{grad} g > + f\,\Delta g$ folgt

$$\operatorname{div} F = f\,\Delta g - g\,\Delta f,$$

also gilt die Beh. ■

12.3 Beweis des Gaußschen Integralsatzes

Der Beweis ist in der Struktur dem der Trafo-Formel ähnlich: Der Satz wird zunächst lokal -in einer einfachen geometrischen Situation- bewiesen, der Abschluß des Beweises benutzt dann wieder eine Teilung der Eins.
Sei $A \subset \mathsf{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $v : \partial A \to \mathsf{R}^n$ das äENV. Sei $a \in \partial A$ und nach Def. 12.1 $g : G' \to \mathsf{R}$ aus $\mathcal{C}^1$ mit $\operatorname{grad} g(x) \neq 0\, \forall x \in G'$ und $A \cap G' = \{g \leq 0\}$.
Sei Œ $\partial_n g(a) \neq 0$, wir betrachten zunächst den Fall $\partial_n g(a) > 0$.
Nach Satz 11.3 existiert eine offene Umgebung $G = U \times I \subset G'$ von a und $h : G \to \mathsf{R}$ mit

$$\partial A \cap G = \operatorname{Graph}(h). \tag{1}$$

Nach evtl. Verkleinerung können wir annehmen, daß $U = U_r(a')$, $I =]\alpha, \beta[$ und $\partial_n g(x) > 0\ \forall x \in G$. Da nach dem Hauptsatz

$$g(u,t) = g(u, h(u)) + \int_{h(u)}^t \partial_n g(u,s)\,ds \quad \forall (u,t) \in U \times I$$

und nach Satz 12.2 $g(u,h(u)) = 0$, ist $g(u,t) \leq 0$ genau wenn $t \leq h(u)$, also gilt

$$A \cap G = \{(u,t) \in G \,|\, t \leq h(u)\}. \tag{2}$$

Sei $g_1 : G \to \mathsf{R}$, $(u,t) \mapsto t - h(u)$, so ist nach (2) $A \cap G = \{g_1 \leq 0\}$ und $\operatorname{grad} g_1(u,t) = (-\operatorname{grad} h(u), 1)$. Aus der Def. von v (vgl. die Bem. zu Def. 12.3) folgt

$$v(u,h(u)) = (||\operatorname{grad} h(u)||^2 + 1)^{-1/2} \cdot (-\operatorname{grad} h(u), 1) \quad \forall u \in U. \tag{3}$$

Ferner gilt für die Karte (vgl. Folg. 11.4) $\varphi : U \to \mathsf{R}$, $u \mapsto (u, h(u))$ nach Bsp. 11.11

$$g_\varphi(u) = 1 + ||\operatorname{grad} h(u)||^2 \quad \forall u \in U. \tag{4}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun die folgende lokale Version des Gaußschen Satzes

12.9 Lemma *Für alle $f \in \mathcal{C}^1_c(G)$ und $j \in \{1, ..., n\}$ gilt*

$$\int_{A \cap G} \partial_j f \, d\lambda^n = \int_{\partial A \cap G} f \cdot v_j \, d\sigma.$$

Beweis: a) Sei $j < n$. Sei

$$\gamma : U \to \mathsf{R}, \quad u \mapsto \int_\alpha^{h(u)} f(u,s)\, ds,$$

so ist $\gamma = \phi \circ (id_U, h)$ mit $\phi : G \to \mathsf{R}$, $(u,t) \mapsto \int_\alpha^t f(u,s)\,ds$. Aus Satz 4.6, 4.7 und der Kettenregel folgt, daß $\gamma \in \mathcal{C}^1(G)$, und es gilt $\forall u \in U$

$$\begin{aligned} \partial_j \gamma(u) &= \left(\operatorname{grad} \phi(u,h(u)) \cdot \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \operatorname{grad} h(u) \end{pmatrix} \right)_j \\ &= \int_\alpha^{h(u)} \partial_j f(u,s)\,ds + f(u,h(u)) \cdot \partial_j h(u). \end{aligned} \tag{5}$$

Ferner gilt $\bigcup_{k>0} (U_k \times I_k) = G$, wobei $U_k := U_{r-1/k}(a')$ und $I_k :=]\alpha - 1/k, \beta - 1/k[$ sei, also existiert ein $k' > 0$ mit

$$\operatorname{supp} f \subset U_{k'} \times I_{k'}\,. \tag{6}$$

Aus der Def. von γ erhält man demnach $\gamma \in \mathcal{C}^1_c(U)$.

Damit folgt mit (2), dem Satz von Fubini und (5)

$$\begin{aligned} \int_{A \cap G} \partial_j f \, d\lambda^n &= \int_U \int_\alpha^{h(u)} \partial_j f(u,s)\,ds\,du \\ &= \int_U \partial_j \gamma(u)\,du - \int_U f(u,h(u)) \cdot \partial_j h(u)\,du. \end{aligned}$$

Da $\gamma \in \mathcal{C}_c^1(U)$ verschwindet nach Lemma 7.13 das Integral über $\partial_j\gamma$, mit (3), (4) und (1) folgt aus der Def. der (lokalen) Integration auf UMF

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap G} \partial_j f \, d\lambda^n &= \int_U f(\varphi(u))\, v_j(\varphi(u)) \sqrt{g_\varphi(u)}\, du \\
&= \int_{\partial A\cap G} f \cdot v_j \, d\sigma.
\end{aligned}$$

b) Sei $j = n$. Da nach (6) $f(u,\alpha) = 0 \ \forall u \in U$ folgt mit (3) und (4)

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap G} \partial_n f \, d\lambda^n &= \int_U \int_\alpha^{h(u)} \partial_n f(u,s)\, ds\, du \\
&= \int_U f(u, h(u))\, du \\
&= \int_U f(\varphi(u))\, v_n(\varphi(u)) \sqrt{g_\varphi(u)}\, du \\
&= \int_{\partial A\cap G} f \cdot v_n \, d\sigma. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Bemerkung Mit einem ähnlichen Beweis erhält man die Aussage des Lemmas für den Fall $\partial_n g(a) < 0$.

Zum Abschluss des Beweise benötigen wir eine diff'bare Teilung der Eins von A: Sei zu jedem $x \in \partial A$ eine Umgebung G^x wie in (1) gewählt, und sei $G_0 := A\backslash\partial A$. Da A kompakt, existieren nach dem Beweis von Satz 6.13 offene Mengen $W_0, W_1, ..., W_m$ mit
$A \subset \bigcup_{k=0}^m W_k$, $\overline{W_k}$ ist kompakt $\forall k$, $\overline{W_0} \subset G_0$ und $\forall k > 0$ existiert $G_k \in \{G^x \mid x \in \partial A\}$ mit $\overline{W_k} \subset G_k$. Sei nun nach Aufg. 37

$$\chi_k \in \mathcal{D} \text{ mit } \operatorname{supp} \chi_k \subset G_k \text{ und } \chi_k|_{\overline{W_k}} = 1 \text{ für } k = 0, ..., m,$$

so folgt wie in Satz 6.13 die Existenz einer diff'baren Teilung der Eins

$$\{\varphi_k \in \mathcal{D} \mid k = 0, ..., m\}$$

von A bzgl. $\{G^x \mid x \in \partial A\} \cup \{G_0\}$.

Ist nun wie in Satz 12.5 (**) $f : V \to \mathsf{R}$ aus $\mathcal{C}^1$, V eine offene Umgebung von A, $j \in \{1, ..., n\}$, so folgt mit $\sum_{k=0}^m \varphi_k = 1$ auf A und Lemma 7.13

$$\begin{aligned}
\int_A \partial_j f \, d\lambda^n &= \sum_{k=0}^m \int_A \partial_j(\varphi_k \cdot f)\, d\lambda^n \\
&= \sum_{k=1}^m \int_{A\cap G_k} \partial_j(\varphi_k \cdot f)\, d\lambda^n,
\end{aligned}$$

und mit Lemma 12.9 und $\sum_{k=1}^m \varphi_k = 1$ auf ∂A folgt daraus

$$\begin{aligned}\int_A \partial_j f \, d\lambda^n &= \sum_{k=1}^m \int_{\partial A \cap G_k} \varphi_k \cdot f \cdot v_j \, d\sigma \\ &= \int_{\partial A} f \cdot v_j \, d\sigma. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

12.4 Der Integralsatz von Stokes

In diesem zweiten zentralen Integralsatz kommt eine weitere geometrische Eigenschaft, die *Orientierbarkeit von M* hinzu. Wir werden den Satz nur in zwei Spezialfällen behandeln.

12.4.1 Die Green-Riemann-Formel

Sei $A \subset \mathsf{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A, $v : \partial A \to \mathsf{R}^2$ das äENV.
Da $T_x \partial A$ für alle $x \in \partial A$ eindimensional ist, existiert eindeutig

$$w : \partial A \to \mathsf{R}^2 \text{ mit } w(x) \in T_x\partial A, \ \ ||w(x)|| = 1 \text{ und } \det(v(x), w(x)) = 1 \ \ \forall x \in \partial A.$$

v und w haben also die gleiche (positive) Orientierung wie e^1 und e^2, man erhält $w_1 = -v_2$ und $w_2 = v_1$.

Bezeichnung ∂A heißt durch w *positiv orientiert.*

Anschaulich bedeutet dies, daß ∂A im "negativen Uhrzeigersinn" durchlaufen wird, A liegt "links von ∂A".

12.10 Definition Sei $F : \partial A \to \mathsf{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, so heißt

$$\int_{\partial A} F \, d\overrightarrow{\sigma} := \int_{\partial A} < F \mid w > \, d\sigma$$

das *Kurvenintegral von F längs ∂A in positiver Orientierung.*

Der folgende Satz ist für die Theorie der analytischen (komplexen) Funktionen grundlegend:

12.11 Satz (Green-Riemann-Formel, Stokescher Satz im R^2) *Sei $V \subset \mathsf{R}^2$ eine offene Umgebung von A und $F : V \to \mathsf{R}^2$ aus $\mathcal{C}^1$. Dann gilt*

$$\int_A (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \, d\lambda^2 = \int_{\partial A} F \, d\overrightarrow{\sigma}.$$

Beweis: Nach Satz 12.5 (**) ist

$$\int_A \partial_1 F_2 \, d\lambda^2 = \int_{\partial A} F_2 \, v_1 \, d\sigma, \quad \int_A \partial_2 F_1 \, d\lambda^2 = \int_{\partial A} F_1 \, v_2 \, d\sigma,$$

und nach Def. von w ist $\int_{\partial A} F \, d\overrightarrow{\sigma} = \int_{\partial A} (-F_1 \, v_2 + F_2 \, v_1) \, d\sigma.$ $\blacksquare$

12.4.2 Der lokale Stokesche Satz im R^3

Sei M eine $\mathcal{C}^2-$Hyperfläche des R^3, $U \subset \mathsf{R}^2$ offen und $\varphi : U \to \mathsf{R}^3$ eine Karte von M. Da im Folgenden nur $\varphi(U)$ betrachtet wird, sei Œ $M = \varphi(U)$.
Wir legen eine Orientierung von M fest: Sei $v^j := (\partial_j\varphi) \circ \varphi^{-1} \, (= \partial\varphi \circ \varphi^{-1} \cdot e^j)$ für $j = 1, 2$, so ist nach Satz 11.7

$$M \ni x \mapsto (v^1(x),\, v^2(x)\,) \in T_xM$$

eine stetige Basis des Tangentialraums. Diese wird durch ein stetiges Normalenvetorfeld n zu einer Basis des R^3 ergänzt: Da nach Definition

$$< w^1 \times w^2 \,|\, w^3 >= \det(w^1, w^2, w^3) \quad \forall w^j \in \mathsf{R}^3 \qquad (+)$$

und $v^1(x), v^2(x)$ eine Basis von T_xM, ist $(v^1 \times v^2)(x) \neq 0$ und $(v^1 \times v^2)(x) \in (T_xM)^{\perp} = N_xM \quad \forall x \in M$. Sei

$$n : M \to \mathsf{R}^3, \quad x \mapsto \frac{v^1 \times v^2}{||v^1 \times v^2||}(x)\,(\in N_xM),$$

so gilt nach (+)

$$\det(v^1, v^2, n) = ||v^1 \times v^2|| > 0.$$

(v^1, v^2, n) ist also -wie (e^1, e^2, e^3)- positiv orientiert und entsteht mittels φ in natürlicher Weise aus der kanonischen Basis.

Sei nun $A \subset U$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A und $B := \varphi(A)$.
Dann ist $\varphi(\partial A)$ der Rand ∂B von B in M, wobei M der durch Einschränkung der euklidischen Metrik des R^3 erzeugte topologische Raum sei. Man betrachte dazu den Diffeomorphismus ϕ zu φ; dieser bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. Außerdem folgt mit Aufg. 49

$$\partial B \text{ ist eine eindim. } \mathcal{C}^2\text{-UMF des } \mathsf{R}^3 \text{ und } \varphi \circ \psi \text{ ist eine Karte von } \partial B.$$

Denn ist $\psi : I \to \mathsf{R}^2$ ein Karte von ∂A, so ist $\varphi \circ \psi(I) \subset \partial B$ und $\mathrm{Rang}(\varphi \circ \psi)(t) = 1$ $\forall t \in I$.
Wir definieren noch eine Orientierung von ∂B bzgl φ durch die von ∂A :

Bezeichnung Sei ∂A durch $w : \partial A \to \mathsf{R}^2$ positiv orientiert, so heißt ∂B durch

$$\mathrm{w} : \partial B \to \mathsf{R}^3, \quad x \mapsto \frac{\partial\varphi \cdot w}{||\partial\varphi \cdot w||}\varphi^{-1}(x)$$

positiv orientiert (bzgl. φ).
Für ein stetiges Vektorfeld $F : \partial B \to \mathsf{R}^3$ heißt dann

$$\int_{\partial B} F \, d\overrightarrow{\sigma} := \int_{\partial B} < F \,|\, \mathrm{w} > \, d\sigma$$

das *Kurvenintegral von F längs ∂B bzgl. der Orientierung* w.

Mit diesen Bez. und Vor. gilt nun

12.12 Satz (Stokes, lokal im R^3) *Sei $V \in \mathsf{R}^3$ eine offene Umgebung von B und $F : V \to \mathsf{R}^3$ aus $\mathcal{C}^1$. Dann gilt*

$$\int_B < \operatorname{rot} F \,|\, n > \, d\sigma = \int_{\partial B} F \, d\overrightarrow{\sigma}.$$

Dabei ist (formal) $\operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \times F$.

Beweis: a) Nach der Kettenregel gilt $(\varphi \circ \psi)' = (\partial\varphi \circ \psi) \cdot \psi'$, da ∂B eindimensional, ist $\psi' = \pm ||\psi'|| \cdot w \circ \psi$, also $||(\varphi \circ \psi)'|| = ||\,(\partial\varphi \cdot w) \circ \psi|| \cdot ||\psi'||$. Da ψ eine Karte von ∂A, $\varphi \circ \psi$ eine Karte von ∂B, folgt mit Bsp. 11.15 :

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi\circ\psi(I)} < F \,|\, \mathrm{w} > \, d\sigma &= \int_I < F \circ \varphi \circ \psi \,|\, \frac{\partial\varphi \cdot w}{||\partial\varphi \cdot w||} \circ \psi > \, ||(\varphi \circ \psi)'|| \, d\lambda \\
&= \int_{\psi(I)} < F \circ \varphi \,|\, \partial\varphi \cdot w > \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\int_{\partial B} F \, d\overrightarrow{\sigma} = \int_{\partial A} < F \circ \varphi \,|\, \partial\varphi \cdot w > \, d\sigma = \int_{\partial A} H \, d\overrightarrow{\sigma}$$

mit $H := \partial\varphi^t \cdot F \circ \varphi$. Aus der Green-Riemann-Formel folgt also

$$\int_{\partial B} F \, d\overrightarrow{\sigma} = \int_A (\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1) \, d\lambda^2. \tag{\#}$$

b) Nach Bsp. 11.10 und (+) ist

$$\begin{aligned}
\int_B < \operatorname{rot} F \,|\, n > \, d\sigma &= \int_A < \operatorname{rot} F \circ \varphi \,|\, n \circ \varphi > \, ||\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi|| \, d\lambda^2 \\
&= \int_A \det(\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \operatorname{rot} F \circ \varphi) \, d\lambda^2. \qquad (\#\#)
\end{aligned}$$

c) Wir zeigen nun noch, daß in den Integralen über A in (#) und (##) die Integranden übereinstimmen: Ist $F_2 = F_3 = 0$, so ist $\operatorname{rot} F = (0, \partial_3 F_1, -\partial_2 F_1)$ und damit

$$\begin{aligned}
& \det(\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \operatorname{rot} F \circ \varphi) \\
= \; & \partial_3 F_1 \circ \varphi \,(\partial_1\varphi_3 \, \partial_2\varphi_1 - \partial_1\varphi_1 \, \partial_2\varphi_3) + \partial_2 F_1 \circ \varphi \,(\partial_1\varphi_2 \, \partial_2\varphi_1 - \partial_1\varphi_1 \, \partial_2\varphi_2),
\end{aligned}$$

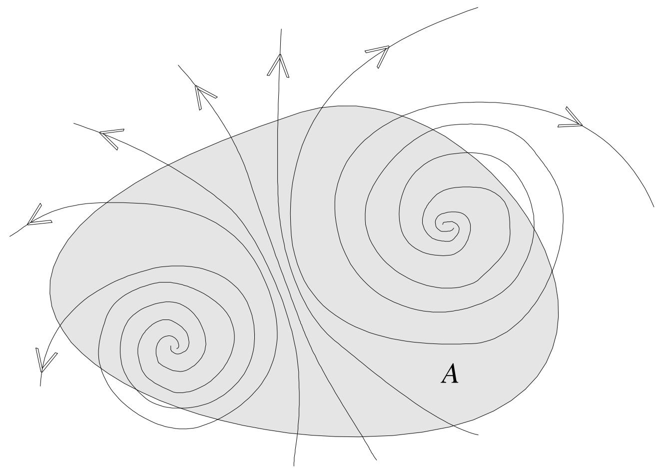
und aus $H = (\partial_1\varphi_1 \, F_1 \circ \varphi, \partial_2\varphi_1 \, F_1 \circ \varphi)$ folgt

$$\begin{aligned}
& \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 \\
= \; & \partial_1\partial_2\varphi_1 \, F_1 \circ \varphi + \partial_2\varphi_1(\partial_1 F_1 \circ \varphi \, \partial_1\varphi_1 + \partial_2 F_1 \circ \varphi \, \partial_1\varphi_2 + \partial_3 F_1 \circ \varphi \, \partial_1\varphi_3) \\
& -\partial_2\partial_1\varphi_1 \, F_1 \circ \varphi - \partial_1\varphi_1(\partial_1 F_1 \circ \varphi \, \partial_2\varphi_1 + \partial_2 F_1 \circ \varphi \, \partial_2\varphi_2 + \partial_3 F_1 \circ \varphi \, \partial_2\varphi_3).
\end{aligned}$$

Da die beiden ersten Terme sich jeweils wegheben, folgt die Beh. für diesen Fall, und durch zyklische Vertauschung der Indizes erhält man sie auch in den Fällen $F_1 = F_3 = 0$ und $F_1 = F_2 = 0$. Durch Summation folgt daraus die Beh. für allgemeines F. ■

Bemerkung Satz 12.11 ist ein Spezialfall von Satz 12.12 für $\varphi(u) = (u, 0)$, also $n = e^3$ und $F_3 = 0$.

Zur physikalischen Interpretation des Stokeschen Satzes:



Aus

$$\int_{\partial B} F \, d\overrightarrow{\sigma} := \int_{\partial B} < F \,|\, \mathrm{w} > \, d\sigma$$

erhält man zunächst

$$\int_{\partial B} F \, d\overrightarrow{\sigma} \doteq \text{ tangenlialer Fluß (Zirkulation) von } F \text{ längs } \partial B.$$

Sei $\varphi(u) = x$, $B^r := \varphi(B_r(u))$. Wie bei der Interpretation des Gaußschen Satzes folgt aus dem Stokeschen Satz

$$\begin{aligned} < \mathrm{rot}\, F(x) \,|\, n(x) > &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\sigma(B^r)} \int_{B^r} < \mathrm{rot}\, F \,|\, n > \, d\sigma \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\sigma(B^r)} \int_{\partial B^r} F \, d\overrightarrow{\sigma}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\text{Anteil von } \mathrm{rot}\, F(x) \text{ in Normalenrichtung } n(x) \\ &\doteq \text{ tangenlialer Fluß- (Wirbel-) Dichte von } F \text{ in } x. \end{aligned}$$

Damit besagt also der Stokesche Satz

$$\begin{aligned} &\text{Gesamtwirbelstärke von } F \text{ in } B \text{ in Normalenrichtung} \\ = \;&\text{Gesamter tangentialer Fluß (Zirkulation) von } F \text{ längs } \partial B. \end{aligned}$$

Bemerkung Ist F ein Gradientenfeld, $F = -\,\mathrm{grad}\, f$ mit f in $\mathcal{C}^2$, so ist $\mathrm{rot}\, F = 0$. Diese Aussage ist lokal umkehrbar (z.B. [Forster 2]).

Korrekturen

1) Zitat auf Seite 24 oben: Satz 3.22 (statt Satz 3.21).
2) Zitat in Bsp. 4.8: [Forster 2] (statt Analysis II).
3) Im Beweis von Satz 5.15, Seite 49 unten, kann ψ_k i.a. nicht auf einer NM abgeändert werden, da $\psi_k \in \mathcal{C}_c(X)$ benötigt wird. Die Formel (**) gilt aber auch ohne die Vorausetzung, daß $\sum \psi_k$ und $\sum \chi_k$ konvergiert: Für $a \in \mathsf{R}_+$ setze man dazu $a \cdot \infty := 0$ falls $a = 0$ und $a \cdot \infty := \infty$ falls $a > 0$.
4) Im Bsp. 6.2 gilt die Formel für τ_{2k-1} nur für $k \in \mathsf{N}^*$.
5) Im Beweis von Satz 6.4 ist statt des VR-Isomorphismus S ein affiner Isomorphismus $\psi : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ mit $\psi \circ \phi(\mathsf{R}^n) \subset \mathsf{R}^{n-1} \times \{0\}$ zu betrachten.
6) Bei der Seitenumerierung von Kap. 11 ist eine Translation $n \mapsto n+2$ durchzuführen.
(Stand 24.2.97)

Literaturhinweise

Zum Aufbau des Daniell-Integrals:

[**Van Daele**] Van Daele, A.: The Lebesgue Integral Without Measure Theorie, Am. Math. Monthly 97(1990), Seite 912-915

[**Weir**] Weir, A.J.: General Integration and Measure, Cambridge University Press, London 1974

[**Floret**] Floret, K.: Maß- und Integrationstheorie, Teubner, Stuttgart 1982

Zur Maß- und Integationstheorie:

[**Bauer**] Bauer, H.: Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter, Berlin 1990

[**Taylor**] Taylor, S. J..: Introduction to Measure and Integration, Cambridge University Press, London 1966

Zum Beweis des Satzes von Radon-Nikodym:

[**Rudin**] Rudin W.: Real and Complex Analysis, 2. Auflage, McGraw-Hill, New York 1966

[**Heuser**] Heuser, H.: Funktionalanalysis, 2. Auflage, Teubner, Stuttgart, 1986

Zur Integration im R^n und auf Untermannigfaltigkeiten:

[**Forster 3**] Forster, O.: Analysis 3, Vieweg, Braunschweig, 1981

Zu den Grundvorlesungen:

[**Forster 1**] Forster, O.: Analysis 1, Vieweg, Braunschweig, 1979

[**Forster 2**] Forster, O.: Analysis 2, Vieweg, Braunschweig, 1979

[**Fischer**] Fischer, G.: Lineare Algebra, 10. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1995