Hardy-Toeplitz C*-Algebren
über
nicht-konvexen Kegeln

DISSERTATION
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

dem
Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Udo Hagenbach
aus Salmünster

Marburg/Lahn 1999

Μωε,

λέει ο ελάφι,

μου,

απαντάει η αγελάδα.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Trotz immenser Bemühungen können nur sehr wenige Klassen von Operatoren als zufriedenstellend verstanden bezeichnet werden und lediglich für einige Beispiele, wie die selbstadjungierten Operatoren, sind Details über die Struktur bekannt. Die klassischen Hardy-Toeplitz Operatoren bilden eine dieser Ausnahmen. Sie wirken auf einen Hardy-Raum analytischer Funktionen nach der Regel: Multiplikation mit einer gegebenen (im allgemeinen nicht analytischen) Funktion φ, dem sogenannten Symbol des Toeplitz-Operators, und anschließende Rückprojektion auf den Ausgangsraum. Schon der Hardy-Raum $H^2(\mathbb{S}^1)$ über der Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1$ ist ein zentraler Teil operatortheoretischer Untersuchungen mit vielen Anwendungen, wie zum Beispiel in der Funktionentheorie der Einheitskreisscheibe $\mathbb{B}$ (Riemann-Hilbert Problem), aber auch in den Ingenieurwissenschaften (Windkanalmodelle). Im zweiten Fall spielt vor allem das Problem der Invertierung von Hardy-Toeplitz Operatoren eine zentrale Rolle, welches mit numerischen Methoden im Falle $H^2(\mathbb{S}^1)$ als gut gelöst bezeichnet werden kann [BS, FG2].

Mittels der Cayley-Transformation ist $\mathbb{B}$ äquivalent zur rechten Ξ_+ und linken Halbebene Ξ_- in $\mathbb{C}$. Die dadurch definierten Hardy-Räume $H^2_+(i\mathbb{R})$ und $H^2_-(i\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ stehen wiederum in direktem Zusammenhang mit holomorphen Funktionen über Ξ_+ und Ξ_-, und man erhält die klassische Zerlegung

$$L^2(i\mathbb{R}) = H^2_+(i\mathbb{R}) \oplus H^2_-(i\mathbb{R}) \tag{0.1}$$

des Raumes aller (Äquivalenzklassen) quadratintegrierbarer Funktionen über $i\mathbb{R}$.

Vermöge der Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist der Hardy-Toeplitz Operator $T(\varphi)$ über $H^2_+(i\mathbb{R})$ unitär äquivalent zum Wiener-Hopf Operator $W(\phi)$ mit Symbol $\phi = \mathcal{F}(\varphi)$, welcher im Falle $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ für $\rho \in L^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$ als

$$W(\phi)(\rho)(\xi) := \int_0^\infty \phi(\xi - \eta)\rho(\eta)\, d\eta,\ \xi \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

definiert ist. Das Bemühen um die Lösung der zugehörigen Wiener-Hopf Integralgleichung

$$\Big(id_{L^2(\overline{\mathbb{R}}_+)} + W(\phi)\Big)\rho_1 = \rho_2,$$

wobei $\rho_2 \in L^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$ bekannt ist, wurde durch die Anwendung von Techniken aus der Theorie der Banachalgebren entscheidend vorangebracht. Der Grund für einen großen Teil der erreichten Fortschritte ist die Tatsache, daß die C*-Algebra $\mathcal{W}$, die durch die Operatoren $W(\phi), \phi \in L^1(\mathbb{R})$, erzeugt wird, eine besonders einfache Form hat. So enthält $\mathcal{W}$ die ganze C*-Algebra $\mathcal{K}$ der kompakten Operatoren auf $L^2(\overline{\mathbb{R}}_+)$ als ein *-Ideal und es existiert eine Isomorphie, so daß

$$\mathcal{W}/\mathcal{K} \cong \mathcal{C}_0(\mathbb{R})\,. \tag{0.2}$$

$\overline{\mathbb{R}}_+$ ist das einfachste Beispiel eines konvexen abgeschlossenen Kegels, der den gesamten umliegenden Raum erzeugt. Von diesem Standpunkt aus ist folgender Übergang zu multivariablen Wiener-Hopf Operatoren, also Operatoren der obigen Form, definiert auf Räumen von Funktionen in mehreren Variablen, naheliegend: Sei $\Lambda^{\#}$ ein beliebiger konvexer abgeschlossener Kegel im $\mathbb{R}^m$, so daß $\Lambda^{\#} + (-\Lambda^{\#}) = \mathbb{R}^m$, dann ist für $\phi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ der zugehörige Wiener-Hopf Operator definiert als

$$W(\phi)(\rho)(\xi) := \int_{\Lambda^{\#}} \phi(\xi - \eta)\rho(\eta)\, d\eta$$

für alle $\rho \in L^2(\Lambda^{\#})$ und $\xi \in \Lambda^{\#}$. Für den Fall eines polyedrischen oder irreduziblen symmetrischen, also insbesondere konvexen Kegels, wurde in [MR] als Verallgemeinerung der Resultate für die Halbgerade gezeigt, daß $\mathcal{W}$ eine endliche auflösende Kompositionsreihe im Sinne von [D2] besitzt und sich als postliminale C*-Algebra mit relativ einfach zu beschreibendem Spektrum erweist. Hierbei zeigten Jordan-Algebra Begriffe zum ersten Mal Ihre Nützlichkeit zur geschlossenen Darstellung der Ergebnisse, weil jeder symmetrische Kegel im $\mathbb{R}^m$ als Zusammenhangskomponente des regulären Bereiches einer geeigneten formalreellen Jordan-Algebra realisiert werden kann.

Ist Λ konvex, dann ist das Tubengebiet $\Xi = \Lambda \oplus i\mathbb{R}^m$ pseudokonvex, also ein Holomorphiegebiet, und mittels der Fourier-Transformation lassen sich die erreichten Resultate auf multivariable Hardy-Toeplitz Operatoren übertragen, welche auf analytische Funktionen über Ξ wirken. Entscheidend ist, daß das Urbild von $L^2(\Lambda^{\#})$ als Hilbertraum $H^2(\Xi)$ analytischer Funktionen über Ξ identifiziert werden kann. Diese Ergebnisse etablieren einen tiefen Zusammenhang zwischen Operatortheorie, konvexer Geometrie und holomorphen Funktionen in mehreren Variablen. Der Übergang mittels der Cayley-Transformation zur beschränkten Realisierung der Hardy-Räume führt zu Funktionenräumen über beschränkten symmetrischen Gebieten. Für die zugehörigen Hardy-Toeplitz C*-Algebren $\mathcal{T}$ konnten in [U3] wieder endliche Kompositionsreihen konstruiert werden. Der Übertrag der Resultate auf die unbeschränkte Realisierung [U4] bewies erneut die in [MR] erreichten Ergebnisse. Mit Hilfe von Jordan-Algebra Begriffen konnte nun aber eine gemeinsame Beschreibung mit den Resultaten aus [U3] und die explizite Konstruktion aller irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{T}$ erreicht werden.

Alle bis zu diesem Zeitpunkt erreichten Resultate [BC, MR, U2], wie auch neuere Verallgemeinerungen [HN, BH], beschränkten sich auf das Studium von Hardy-

Toeplitz Operatoren, die auf analytische Objekte (Funktionen, Schnitte in Vektorbündeln) wirken. Äquivalent dazu ist, daß diese Objekte über Gebieten definiert sind, die durch konvexe Kegel bestimmt sind. Der nächste Schritt, auch nicht konvexe Kegel als Basis des Tubengebietes zu erlauben, erweitert nicht nur die Anwendungen von Wiener-Hopf Operatoren (Wellenbrechung an einem nicht konvexen Hindernis), sondern auch der komplexen Analysis, denn die zugehörigen Hardy-Räume können nicht aus holomorphen Funktionen bestehen. Da Ξ nicht mehr pseudokonvex ist, müssen sie nun als Hilberträume $H^{(d)}(\Xi)$ von Čech-Kozykeln der Länge d realisiert werden [G2], die sich wiederum als L^2-Kohomologieklassen von glatten d-Formen beschreiben lassen [G3]. Der Konkavitätsindex d spiegelt hierbei den Grad der Nicht-Konvexität des Kegels wider, und ist dementsprechend gleich null im konvexen Fall. Darüber hinaus ermöglicht die Einbeziehung nicht konvexer Kegel wieder eine Zerlegung (0.1) des L^2-Raumes über dem Shilov-Rand iX von Ξ in Hardy-Räume, denn allein im eindimensionalen Fall bilden die irreduziblen konvexen Kegel eine Zerlegung des regulären Bereiches von X; in allen anderen Fällen existiert mindestens ein nicht konvexer Kegel.

Als erstes Beispiel eines nicht konvexen Kegels wurde in [HU1] das Äußere des Doppellichtkegels betrachtet, realisiert als die Menge der (2×2)-Matrizen der Signatur $(1,1)$ in der Jordan-Algebra $Sym(2;\mathbb{R})$. In [HU2] wurden als nächster Schritt die entsprechenden Resultate auf die Kegel fester Signatur in $Sym(r;\mathbb{R})$ ausgedehnt. Die auftretenden algebraischen und analytischen Schwierigkeiten werden zum einen durch Ausnutzen der speziellen Struktur dieser Beispiele überwunden. Zum anderen erwies es sich aber als hilfreich, daß immer mindestens zwei konvexe Kegel in $Sym(r;\mathbb{R})$ existieren und alle nicht konvexen Kegel sogenannte Satelliten dieser beiden konvexen Kegel sind. Letzteres ist aber keine Besonderheit der beiden behandelten Beispiele, denn jede formalreelle Jordan-Algebra enthält zwei konvexe Kegel als Zusammenhangskomponenten des regulären Bereiches.

In der vorliegenden Arbeit werden alle Kegel Λ behandelt, die als Zusammenhangskomponenten des regulären Bereiches einer beliebigen halbeinfachen, also nicht notwendig formalreellen Jordan-Algebra X vorkommen. Im Gegensatz zu den bisher behandelten Fällen gibt es in nicht formalreellen Jordan-Algebren keine konvexen Kegel mehr. Da es auch in formalreellen lediglich zwei konvexe Kegel gibt, scheint der konvexe Fall eher die Ausnahme zu sein.

Das angestrebte Hauptresultat ist, ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen aller irreduziblen Darstellungen der zugehörigen Hardy-Toeplitz C*-Algebra $\mathcal{T}$ explizit zu konstruieren und daraus eine Kompositionsreihe von $\mathcal{T}$ abzuleiten, deren Form direkt aus der geometrischen Stratifizierung über die Facetten des Tubengebietes Ξ abgelesen werden kann. Dies entspricht der allgemeinen „Quantisierungsphilosophie“, wonach die Observablenalgebra und ihr Spektrum eine „nicht kommutative“ Deformation der Ausgangsgeometrie, in diesem Fall des Tubengebietes Ξ, darstellen.

Durch die gewählte allgemeine Situation, das heißt, daß zum einen Λ nicht mehr notwendigerweise konvex ist und zum anderen die Jordan-Algebra nicht mehr als formalreell vorausgesetzt wird, treten jedoch eine Reihe bisher unbekannter Schwierigkeiten auf. Als erstes ist nicht klar, was unter der geometrischen Stratifizierung von Ξ zu verstehen ist, weil schon unklar ist, was eigentlich eine Facette von Λ, beziehungsweise Ξ ist. Es zeigt sich, daß die übliche Definition einer Facette im nicht konvexen Fall nicht zu den gewünschten Resultaten führt und es Facetten gibt, die unterschieden werden müssen, obwohl sie denselben Untervektorraum von X erzeugen. Diese Frage wird allerdings letztendlich erst durch das Inäquivalenztheorem 6.2.23 eindeutig geklärt.

Die Konkavität der behandelten Kegel verursacht als nächstes Problem, daß der zugehörige Hardy-Raum nicht mehr als Raum holomorpher Funktionen realisiert werden kann und deshalb nicht explizit bekannt ist. Trotz einiger Bemühungen verschiedener Experten auf diesem Gebiet, liegen bisher nur rudimentäre Resultate in dieser Richtung vor [G2]. Dies gilt ebenfalls für die Berechnung der zugehörigen Szegö-Kerne [G3]. Im konvexen Fall beruht eine Vielzahl der Beweise auf der Kenntnis der konkreten Realisationen der Hardy-Räume als Funktionenräume; zum Beispiel zur Konstruktion einer geeigneten Symbolfunktion φ, so daß der zugehörige Operator $T(\varphi)$ im Kern einer bestimmten, aber nicht im Kern einer anderen Darstellung liegt. Derartige Konstruktionen sind entscheidend für den Beweis der Inäquivalenz der definierten Darstellungen. In der vorliegenden Arbeit sind die Hardy-Räume lediglich als Urbilder gut bekannter Hilberträume unter der Fourier-Transformation realisiert. Dementsprechend geschieht ein großer Teil der Beweise im Fourier-Bild und die dadurch erreichten Resultate bedürfen danach der Rücktransformation ins Ausgangsbild.

Eine weitere Besonderheit liegt darin begründet, daß für die behandelten Jordan-Algebren nur noch die Halbeinfachheit vorausgesetzt wird. Im formalreellen Fall ist die Gruppe der Jordan-Algebraautomorphismen $Aut(X)$ von X stets kompakt. Darüber hinaus definiert die Peirce-Zerlegung von X eine diagonale Jordan-Unteralgebra Θ, so daß die Spektralzerlegung $X = Aut(X) \cdot \Theta$ gilt. Im Verlauf der Arbeit wird klar, daß diese Spektralzerlegung wesentlich für eine Vielzahl der Beweise ist, und daß dabei auf die Kompaktheit von $Aut(X)$ nicht verzichtet werden kann. Auch für lediglich halbeinfache Jordan-Algebren existiert die Peirce-Zerlegung und damit die Diagonale Θ, aber $Aut(X)$ ist zum einen nicht mehr kompakt und zum anderen ist die Existenz einer Spektralzerlegung bezüglich Θ nicht bekannt. Gelöst wird dieses Problem durch die Einführung der in der Literatur bisher nicht betrachteten Spektralgruppe K^σ. Die Definition bedient sich des Hilfsmittels der Modifikation von Jordan-Algebren und des Resultates, daß es zu jeder halbeinfachen Jordan-Algebra eine formalreelle Modifikaton gibt [H4]. Die Kegelstruktur in dieser Modifikation ist allerdings grundverschieden von derjenigen in der ursprünglichen Jordan-Algebra, so daß die naheliegende Idee, einfach in der modifizierten Jordan-Algebra weiterzuarbeiten, nicht zum Ziel führt. Man gelangt aber zur Definition einer Symmetrie σ

der Strukturgruppe von X, als deren Fixpunktgruppe man K^σ definiert. Es zeigt sich, daß K^σ kompakt ist und der Spektralsatz $X = K^\sigma \cdot \Theta$ für alle halbeinfachen Jordan-Algebren gilt.

Darüber hinaus bestimmt die Spektralgruppe die Struktur der nicht-konvexen[1] Kegel, welche sich als Orthantenkegel bezüglich K^σ herausstellen. Das heißt, sie werden durch die Operation von K^σ aus offenen Orthanten in der Diagonale Θ erzeugt. Da die Orthanten konvexe Kegel sind, wird die Homologie des Orthantenkegels allein durch die Operation - und damit durch die homologische Struktur - von K^σ erzeugt.

Das Hauptresultat der Arbeit ist das Strukturtheorem für die Hardy-Toeplitz C*-Algebra $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$, welches eine explizite Kompositionsreihe

$$\{0\} = I_0 \lhd I_1 = \mathcal{K}(H^2_p(iX)) \lhd I_2 \lhd \ldots \lhd I_r \lhd I_{r+1} = \mathcal{T}(H^2_p(iX))$$

von $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$ angibt, so daß für $j = 0, \ldots, r$

$$I_{j+1}/I_j \cong \mathcal{C}_0(\mathbb{F}_{r-j}) \otimes \mathcal{K}(H_{r-j}) \ ,$$

wobei $\mathbb{F}_{r-j}$ ein lokal kompakter Hausdorffraum und H_{r-j} ein Hilbertraum ist. Damit ist insbesondere gezeigt, daß $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$ eine auflösbare postliminale C*-Algebra ist und es gilt die Verallgemeinerung des klassischen Resultates (0.2):

$$\mathcal{T}(H^2_p(iX))/I_r \cong \mathcal{C}_0(iX) \ .$$

Hierbei entspricht die Länge der Kompositionsreihe gerade dem Rang der Jordan-Algebra, und die Faktoren sind direkt durch die Stratifikation des Tubengebietes Ξ bestimmt. Das (nicht separierte) Spektrum von $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$ ist durch die Menge aller Facetten von Ξ gegeben, wobei $\{0\}$ und Ξ als Facetten in alle Aussagen mit eingeschlossen sind.

Die in der Operatortheorie stets erste Frage, ob das *-Ideal der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H^2_p(iX))$ in der betrachteten Algebra enthalten ist, wird positiv entschieden. Schon im klassischen eindimensionalen Fall ist dieses Faktum nicht trivial und der Beweis bedarf genauer Analyse des zugehörigen Poisson-Kernes. Darüber hinaus wird gezeigt, daß der gemeinsame Kern aller irreduziblen Darstellungen gerade den kompakten Operatoren entspricht, beziehungsweise, daß jeder Faktor der Kompositionsreihe eine C*-Algebra eines stetigen Feldes elementarer C*-Algebren ist.

Diese Ergebnisse werden mit Hilfe allgemeiner Methoden unabhängig von der Klassifikation der halbeinfachen Jordan-Algebren erreicht. Deshalb können sie als ein Beitrag zu dem Programm betrachtet werden, Operatoralgebren über Hilberträumen über allgemeinen symmetrischen Räumen analog zu analysieren. Letztliches Ziel ist es hierbei, operierende Gruppen zuzulassen, die weder kompakt noch

[1] Die Schreibweise „nicht-konvex" soll andeuten, daß die behandelten Kegel nicht notwendigerweise konvex sind, allerdings in Einzelfällen durchaus konvex sein können

kommutativ sind. Für nicht kommutative, jedoch kompakte Gruppen, wurde dieses Programm für einige Beispiele in [HU3] umgesetzt. Wie im Ausblick gezeigt wird, entspricht die in der vorliegenden Arbeit behandelte Situation - im obigen Sinne - dem Spezialfall euklidischer Transformationsgruppen. Aufgrund der Struktur als halbdirektes Produkt einer kompakten und einer kommutativen Gruppe, sind diese ein Schritt in Richtung Nichtkompaktheit und Nichtkommutativität. Mit den Resultaten der Arbeit kann die Fragestellung für Transformationsgruppen, mit Ausnahme der konkreten Realisation der Hardy-Räume, für die gesamte Klasse der halbeinfachen Jordan-Algebren und aller dadurch definierten Kegel als ausreichend beantwortet bezeichnet werden.

Die Arbeit gliedert sich in acht Kapitel. Außer dem achten besteht jedes einzelne wieder aus mehreren Abschnitten und ist mit einer eigenen Einleitung versehen. Diese referiert zum einen die wesentlichen Inhalte des Kapitels, grenzt zum anderen aber auch die eigenen Beiträge des Autors von schon bekannten Resultaten ab. Insbesondere dann, wenn ein Kapitel eine kurze Einführung in nicht übliche Begriffsbildungen enthält.

Das erklärte Ziel der Arbeit ist es, eine durch die geometrische Stratifizierung des Tubengebietes bestimmte Strukturtheorie für Hardy-Toeplitz Operatoralgebren zu beweisen. Dafür ist es zunächst notwendig, einen algebraischen Rahmen für das verwendete geometrische Ausgangsobjekt - den Kegel Λ - zu schaffen. Als dieser Rahmen werden im ersten Kapitel halbeinfache Jordan-Algebren eingeführt und ihre wichtigsten Eigenschaften vorgestellt. Wesentlicher Punkt ist die Definition der Spektralgruppe K^σ und der dadurch mögliche Beweis eines Spektralsatzes für halbeinfache Jordan-Algebren bezüglich einer kompakten Gruppe. Das abschließende Zitat der Klassifikation halbeinfacher Jordan-Algebren verschafft einen Überblick über die möglichen Ausgangssituationen, von denen die sogenannten „exceptionellen" besonders tiefliegend und interessant sind.

Im zweiten Kapitel werden nicht-konvexe Kegel eingeführt und mit Hilfe von Mutationen von Jordan-Algebren der Grad ihrer Konkavität untersucht. Es zeigt sich, daß die nicht-konvexen Kegel gerade die Zerlegung des regulären Bereiches der zugrunde gelegten Jordan-Algebra X in Zusammenhangskomponenten bilden. Wichtigstes Resultat ist die Determinierung der Kegelzugehörigkeit fast aller regulärer Elemente aus X durch die charakteristische Signaturzahl p_s. Die Klassifikationsliste aller nicht-konvexen Kegel in halbeinfachen Jordan-Algebren, inklusive ihrer Darstellungen als homogene Kegel, zeigt, wie vielfältig und interessant die involvierten Gruppen sind. Zum Ende des Kapitels wird die Frage geklärt, wie die Begriffe Dualität und Symmetrie für nicht-konvexe Kegel zu verstehen sind.

Damit sind die Vorbereitungen getroffen, um im folgenden dritten Kapitel die durch Λ bestimmten Hardy-Räume und Hardy-Toeplitz C*-Algebren einführen zu können. Die Frage nach der konkreten geometrischen Realisation der Hardy-Räume wird kurz diskutiert, um dann das zentrale Objekt der folgenden Analysis einzufühnhren: die C*-Algebra $C_p^*(iX)$ der Hardy-Faltungsoperatoren. Als erstes Resultat über diese Operatoralgebra wird gezeigt, daß sie eine Vervollständigung der Gruppen C*-Algebra von iX ist. Hieraus wird später das wichtige Faktum folgen, daß das *-Ideal der kompakten Operatoren in der Hardy-Toeplitz C*-Algebra enthalten ist.

Inhalt des vierten Kapitels ist es, für jede Facette von Λ explizit eine Darstellung von $C_p^*(iX)$ zu konstruieren. Dazu muß zunächst einmal geklärt werden, was die Facetten eines nicht-konvexen Kegels sind. Die Art und Weise, wie diese Frage entschieden wird, kann allerdings erst im sechsten Kapitel nach dem Beweis des Inäquivalenztheorems 6.2.23 gerechtfertigt werden. Nach kurzen vorbereitenden Untersuchungen der durch eine Facette induzierten Substrukturen, wie Spektralgruppe und Kegelzahl der zugehörigen Jordan-Unteralgebra oder Hardy-Toeplitz C*-Algebra $T_{\tilde{r}\tilde{p}}^k(H_{\tilde{p}}^2(ikX_{\tilde{r}}))$ des Hardy-Raumes über der Facette, folgt die Konstruktion der zugehörigen Darstellung. Dies geschieht zuerst für die zu $C_p^*(iX)$ duale C*-Algebra $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ der Hardy-Multiplikatoren durch einen Limesprozeß entlang der dualen Facette. Die so gefundene Darstellung wird mittels der Fourier-Transformation auf $C_p^*(iX)$ übertragen. In den Konstruktionsbeweis geht entscheidend die Charakterisierung der Kegelzugehörigkeit durch die charakteristische Signaturzahl p_s ein.

Im fünften Kapitel werden die gefundenen Darstellungen mit Hilfe von C*-Dualitätstechniken zu Darstellungen des Cokreuzproduktes $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$ ausgebaut. Die dafür notwendigen theoretischen Resultate werden kurz eingeführt; sie gehen vor allem auf [LPRS] zurück.

Der nächste Schritt ist die Rückführung der Darstellungen des Cokreuzproduktes $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$, welches eine Operatoralgebra in $\mathcal{L}(L^2(iX \times iX))$ ist, zu Darstellungen einer geeigneten Operatoralgebra in $\mathcal{L}(L^2(iX)$: der Hardy-Toeplitz Vervollständigung $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ der kompakten Operatoren auf $L^2(iX)$. $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ kann nun als Kompression der Operatoren aus $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ realisiert werden, wodurch die Darstellungen von $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ wiederum auf $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ übertragen werden können. Hauptergebnis des sechsten Kapitels ist das Inäquivalenztheorem, welches eindeutig charakterisiert, welche der konstruierten Darstellungen zueinander inäquivalent sind. Für den technisch schwierigsten Teil des Beweises muß wieder in das Fourier-Bild gewechselt werden.

Das siebte Kapitel enthält das schon angekündigte Hauptresultat der Arbeit. Der Weg dorthin führt noch einmal zurück in die Darstellungstheorie von Cokreuzprodukten: es werden zwei allgemeine Resultate über Summen von Darstellungen allgemeiner Cokreuzprodukte bewiesen. Diese werden auf durch Facetten bestimmte Subsysteme der konstruierten Darstellungen angewandt, die entsprechend den beabsichtigten Aussagen über die Feinstruktur von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ definiert sind.

Im abschließenden achten Kapitel werden die erreichten Resultate in das Programm eingeordnet, möglichst allgemeine symmetrische Räume als Shilov-Rand des Gebietes Ξ zuzulassen, und mit analogen Resultaten zu untersuchen. iX ist natürlich auf triviale Art und Weise ein symmetrischer Raum. Doch die zugehörige euklidische Transformationsgruppe, das halbdirekte Produkt $K := K^\sigma \propto iX$, ermöglicht die nichttriviale Darstellung $iX = K^\sigma \setminus K$ von iX als homogener symmetrischer Raum. Es wird diskutiert, wie die erzielten Resultate im Rahmen der Darstellungstheorie halbeinfacher Lie-Gruppen mit Hilfe der Theorie von Mackey interpretiert werden können. Wie die Klassifikation der nicht-konvexen Kegel im zweiten Kapitel zeigt, treten hierbei eine Vielzahl interessanter Gruppen, einschließlich der Ausnahme Lie-Gruppen E_6 und F_4 auf.

Nachdem der mathematische Inhalt der Arbeit umrissen ist, sollen die beiden folgenden technischen Hinweise helfen, die Lesbarkeit zu erhöhen.

Die Numerierung ist dreiteilig: die beiden ersten Nummern korrespondieren mit dem jeweiligen Abschnitt, die dritte Nummer zählt sowohl alle Definitionen, Abbildungen und Resultate eines Abschnittes, als auch diejenigen Gleichungen, deren Aussagen im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Für Gleichungen wird also kein eigener Zähler verwandt, damit sie sich auch bei Querverweisen über Kapitelgrenzen hinweg leicht auffinden lassen. Das Ende eines Beweises wird stets mit $\square$ gekennzeichnet.

Die Notation ist durchgehend konsistent gewählt. Das heißt, daß sich die Bedeutung der verwendeten Symbole im Laufe des Textes nicht ändert. Wenn möglich wurden für Objekte im Fourier-Bild die den lateinischen des Ausgangsbildes entsprechenden griechischen Bezeichnungen gewählt. So ist zum Beispiel ξ immer ein Element aus dem linearen Dualraum $X^\#$ von X, während x immer ein Element aus X ist. Trotz der wiederholten Wechsel ins Fourier-Bild, sollte es dadurch möglich sein, sich schnell in allen Kapiteln zurechtzufinden, beziehungsweise einen Überblick zu verschaffen.

Diese Einleitung möchte ich mit dem Ausdruck meiner besonderen Dankbarkeit für Herrn Prof. Dr. H. Upmeier beschließen. Seine Bereitschaft zu anhaltenden Diskussionen und seine stetigen Anregungen haben dazu geführt, daß diese Arbeit ihre Form und ihren Inhalt überhaupt erst erreichen konnte.

Kapitel 1

Halbeinfache Jordan-Algebren

Jordan-Algebren und ihre interessanten algebraischen Eigenschaften haben sich in verschiedenen Gebieten der Mathematik als nützliches Hilfsmittel erwiesen [M2]. Dies gilt auch im Hinblick auf die in dieser Arbeit betrachteten Problemstellungen. Zum einen bieten sie einen genügend allgemeinen Rahmen, der sehr verschiedene Studienobjekte zuläßt. Zum anderen sind ihre algebraischen Eigenschaften aber auch stark genug, um eine Behandlung all dieser Objekte zu ermöglichen; zumindest wenn man sich, wie es in dieser Arbeit auch geschieht, auf die sogenannten halbeinfachen Jordan-Algebren beschränkt.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die wesentlichen Eigenschaften von Jordan-Algebren referiert. Wichtige Definitionen und Aussagen werden mit Beispielen verdeutlicht. Eine gute Einführung in die Theorie (formalreeller) Jordan-Algebren bietet [FK, Chapter II-IV], für eine detaillierte Darstellung und entsprechende Resultate über halbeinfache Jordan-Algebren empfiehlt sich das Standardwerk [BK].

Im zweiten Abschnitt werden zunächst Struktur- und Automorphismengruppe einer Jordan-Algebra betrachtet, um danach das wesentliche Objekt dieses Kapitels einzuführen: die Spektralgruppe von X, welche als Hauptresultat den Spektralsatz für halbeinfache Jordan-Algebren ermöglicht. Eine Betrachtung dieser Gruppe scheint in der Literatur bisher nicht vorzukommen.

Das Zitat der Klassifikation verschafft abschließend einen Überblick über die Gesamtsituation mit allen hier vorkommenden halbeinfachen Jordan-Algebren.

1.1 Allgemeine Eigenschaften

Der Körper $\mathbb{K}$ sei entweder der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Dann ist ein reeller Vektorraum der Dimension $m \in \mathbb{N}$ eine $\mathbb{K}$-*Algebra*, falls ein $\mathbb{K}$-bilineares Produkt

$$\diamond : X \times X \longrightarrow X;\ (x,y) \longmapsto x \diamond y \tag{1.1.1}$$

existiert.

Definition 1.1.2 Eine $\mathbb{K}$-Algebra X heißt eine *Jordan-Algebra* über $\mathbb{K}$, falls für alle $x, y \in X$ die Bedingungen

(J1) $\qquad x \diamond y = y \diamond x$,

(J2) $\qquad x \diamond (x^2 \diamond y) = x^2 \diamond (x \diamond y)$

erfüllt sind.

Damit ist eine Jordan-Algebra kommutativ. Im allgemeinen ist sie aber nicht assoziativ sondern lediglich *potenzassoziativ* [FK, Proposition II.1.2].

Beispiel 1.1.3 Es sei X eine beliebige assoziative Algebra über $\mathbb{K}$, zum Beispiel eine Matrizenalgebra über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder dem Schiefkörper Körper der Quaternionen $\mathbb{H}$. Dann definiert

$$\diamond : X \times X \longrightarrow X;\ (x,y) \longmapsto x \diamond y := \frac{1}{2}(xy + yx) \tag{1.1.4}$$

ein Jordan-Algebraprodukt auf X, welches *Jordan-*, oder auch *Antikommutatorprodukt* genannt wird.

Beispiel 1.1.5 Es sei $X := \mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}$. Mit dem Produkt

$$(x_1, x') \diamond (y_1, y') := \left(x_1 y_1 - \sum_{j=2}^{m} x_j y_j \,,\, x_1 y' + y_1 x' \right) ,$$

wobei $x' = (x_2, \ldots, x_m),\ y' = (y_2, \ldots, y_m) \in i\mathbb{R}^{m-1}$, wird X zu einer reellen Jordan-Algebra und heißt der *reelle Spinfaktor*.

$End(X)$ sei die Menge aller linearen Endomorphismen des Vektorraumes X. Für ein festes Element $x \in X$ ist der zugehörige *Multiplikationsoperator*

$$M_x : X \longrightarrow X;\ y \longmapsto x \diamond y,$$

ein Element von $End(X)$. $\mathrm{Tr}(T)$ bezeichne die *Spur* von $T \in End(X)$. Dann definiert

$$\lambda : X \times X \longrightarrow \mathbb{K};\ (x,y) \longmapsto \mathrm{Tr}(M_{x \diamond y})$$

eine *assoziative* Bilinearform auf $X \times X$, das heißt

$$\lambda(x \diamond y, z) = \lambda(x, y \diamond z) \tag{1.1.6}$$

für alle $x, y, z \in X$ [FK, Proposition II.4.3].

Definition 1.1.7 Es sei X eine Jordan-Algebra.

1. X heißt *halbeinfach*[1], falls die Bilinearform λ *nicht ausgeartet* ist. Das heißt, wenn für alle $x \in X$ gilt:

   Ist $\lambda(x, y) = 0$ für alle $y \in X$, dann folgt bereits $x = 0$.

2. X heißt *formalreell,* falls die Bilinearform λ *positiv definit* ist. Das heißt, wenn $\lambda(x, x) > 0$ für alle $x \in X$, $x \neq 0$.

Die Menge der halbeinfachen Jordan-Algebren zerfällt prinzipiell in die beiden Teilmengen der formalreellen und der nicht formalreellen - also lediglich halbeinfachen - Jordan-Algebren. Ziel dieser Arbeit ist es, alle relevanten Resultate unabhängig von dieser Unterteilung zu formulieren. Dennoch werden darüber hinaus eine Reihe von Besonderheiten dargestellt, die auf der Zugehörigkeit der betrachteten Jordan-Algebra zu einer der beiden Klassen beruhen. Nicht zuletzt werden hieraus auch die Schwierigkeiten ersichtlich, die durch die angestrebte gemeinsame Behandlung dieser doch sehr unterschiedlichen Klassen entstehen.

In den beiden folgenden Beispielen werden zwei Jordan-Algebren eingeführt, die als typische Vertreter für ihre Klasse angesehen werden können. Sie werden im Verlauf dieser Arbeit immer wieder herangezogen, um neue Begriffe und erreichte Resultate zu verdeutlichen.

Beispiel 1.1.8 Es sei $Mat(r; \mathbb{R})$ die halbeinfache reelle Jordan-Algebra der reellen $(r \times r)$-Matrizen mit dem Antikommutatorprodukt (1.1.4)

$$x \diamond y := \frac{1}{2}(xy + yx), x, y \in Mat(r; \mathbb{R}) \ .$$

Die Spurform ist durch $\lambda(x, y) = \mathrm{Tr}(xy)$ [FK, Example II.2.(1)] gegeben, wobei $\mathrm{Tr}(xy)$ die Spur des Endomorphismus $xy \in End(\mathbb{R}^r)$ ist. Für $x \in Mat(r; \mathbb{R})$ folgt mit $y := x^T$ aus $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ sofort $x = 0$ und λ zeigt sich als nicht ausgeartete Bilinearform auf $Mat(r; \mathbb{R})$. Hierbei sei $x \mapsto x^T, x \in X$, die *Transposition* von Matrizen. Sei exemplarisch $r := 2$ und

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(2; \mathbb{R}) \ .$$

Dann folgt wegen $\mathrm{Tr}(xx) = -2$, daß $Mat(r; \mathbb{R})$ nicht formalreell ist. Analog ist $Mat(r; \mathbb{C})$, der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen $(r \times r)$-Matrizen, eine komplexe halbeinfache nicht formalreelle Jordan-Algebra.

---

[1] Üblicherweise wird die Halbeinfachheit einer Algebra über das Verschwinden eines bestimmten Radikals von X definiert. Da diese Begriffsbildung für die vorliegende Arbeit keine Rolle spielt und mittels [BK, Satz III.8.6.] äquivalent zur benutzten Definition ist, wird hier auf sie verzichtet.

Beispiel 1.1.9 $Sym(r;\mathbb{R}) := \{x \in Mat(r;\mathbb{R}) :\ x^T = x\}$ ist eine Jordan-Unteralgebra von $Mat(r;\mathbb{R})$, auf der die Spurform λ aus Beispiel 1.1.8 positiv definit ist. Es gilt sogar, daß

$$Sym(r;\mathbb{R}) \times Sym(r;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R};\ (x,y) \longmapsto \mathrm{Tr}(xy^T) = \mathrm{Tr}(xy)$$

ein Skalarprodukt auf $Sym(r;\mathbb{R})$ definiert.

Äquivalent zur positiven Definitheit von λ ist die Bedingung [FK, III.1 und Proposition VIII.4.2]

$$x, y \in X,\ x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0\ ,$$

welche namensgebend für die formalreellen Jordan-Algebren war. Für alle $x \neq 0$ aus einer komplexen Jordan-Algebra gilt allerdings

$$x^2 + (ix)^2 = 0\ .$$

Deshalb sind alle nicht trivialen komplexen Jordan-Algebren nicht formalreell.

Ein Element $c \in X$ heißt ein *Idempotent*, falls $c = c \diamond c$. Zwei verschiedene Idempotente c_1 und c_2 sind *orthogonal*, falls $c_1 \diamond c_2 = 0$. Wegen

$$\lambda(c_1, c_2) = \lambda(c_1 \diamond c_1, c_2) = \lambda(c_1, c_1 \diamond c_2)$$

sind zwei orthogonale Idempotente $c_1, c_2 \in X$ auch bezüglich der Bilinearform λ orthogonal, was die Bezeichnung orthogonal erklärt. Ein Idempotent $0 \neq c \in X$ heißt *primitiv*, wenn es nicht als Summe von zwei von Null verschiedenen Idempotenten geschrieben werden kann.

Definition 1.1.10 Es sei X eine Jordan-Algebra mit Einselement e. Dann heißt eine Menge $\{e_1, \ldots, e_r\}$ primitiver idempotenter Elemente aus X *Jordan-Rahmen*, falls

$$e_i \diamond e_j = 0 \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq r$$

und

$$e_1 + \ldots + e_r = e\ .$$

Jede halbeinfache Jordan-Algebra besitzt ein Einselement e [FK, Seite 146] und jeder Jordan-Rahmen hat die gleiche Länge r aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ [BK, Satz II.4.7]. Die Länge der Jordan-Rahmen heißt der *Rang der Jordan-Algebra X*.

Konvention 1.1.11 Von nun an sei X stets eine halbeinfache Jordan-Algebra mit $\mathrm{Rang}(X) = r$ und $r \in \mathbb{N}$.

Bezüglich jedes Jordan-Rahmens von X existiert die *Peirce-Zerlegung*

$$X = \sum_{1 \leq i \leq j \leq r}^{\oplus} X_{ij} \tag{1.1.12}$$

in die *Peirce-Komponenten* X_{ij}, so daß für alle $1 \leq i, j, l, o \leq r$ gilt [BK, VIII.2.2.]:

(PZ1) $\qquad X_{ij} \diamond X_{lo} = \{0\}$ für alle $\{i,j\} \cap \{l,o\} = \emptyset$,

(PZ2) $\qquad X_{ij} \diamond X_{il} \subset X_{jl}$ für alle $j \neq l$,

(PZ3) $\qquad X_{ij} \diamond X_{ij} \subset X_{ii} + X_{jj}$.

Jedes e_j, $j = 1, \ldots, r$, ist primitiv und X halbeinfach. Deshalb ist X_{jj} ein Jordan-Körper, das heißt $(X_{jj})_{reg} = X_{jj} \setminus \{0\}$ [BK, VIII.2.6]. Mit [BK, Satz IV.5.12, XI.2.1] folgt für die *diagonalen Peirce-Komponenten*

$$X_{jj} = \mathbb{K} \cdot e_j \tag{1.1.13}$$

für alle $j = 1, \ldots, r$.

Beispiel 1.1.14 Für $Mat(r;\mathbb{R})$ und $Sym(r;\mathbb{R})$ gibt es einen gemeinsamen Jordan-Rahmen $\{e_1, \ldots, e_r\} \subset Sym(r;\mathbb{R})$. Dieser ist gegeben durch die primitiven Idempotenten $\{id_{11}, \ldots, id_{rr}\}$, wobei id_{jj} die Matrix ist, die außer einer eins in der Stelle mit Index (j,j) nur nullen enthält. Also ist Rang $(Mat(r;\mathbb{R})) =$ Rang $(Sym(r;\mathbb{R})) = r$. Für die Peirce-Zerlegung von $Sym(r;\mathbb{R})$ und $Mat(r;\mathbb{R})$ bezüglich des Jordan-Rahmens $\{id_{11}, \ldots, id_{rr}\}$ ergibt sich übereinstimmend mit (1.1.13)

$$X_{jj} = \mathbb{R} \cdot id_{jj}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Für die außerdiagonalen Komponenten $1 \leq i < j \leq r$ gilt in $Sym(r;\mathbb{R})$

$$Sym(r;\mathbb{R})_{ij} = \mathbb{R}(id_{ij} + id_{ji})$$

und in $Mat(r;\mathbb{R})$

$$Mat(r;\mathbb{R})_{ij} = \mathbb{R} \cdot id_{ij} \oplus \mathbb{R} \cdot id_{ji} \ .$$

Hierbei sei id_{ij} die Matrix, die außer einer eins an der Stelle mit dem Index (i,j) nur nullen enthält.

Das Beispiel zeigt, daß die *außerdiagonalen* Peirce-Komponenten X_{ij}, $i \neq j$, nicht eindimensional sein müssen. Dies ist allerdings kein Charakteristikum der nicht formalreellen Jordan-Algebren.

Beispiel 1.1.15 Der reelle Spinfaktor $X = \mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}$ ist formalreell, da die Spurform [FK, II.2.(2)]

$$\lambda(x, y) = 2\left(x_1 y_1 - \sum_{j=2}^{m} x_j y_j\right)$$

positiv definit ist. Hierbei sind $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ beliebig aus $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}$; man beachte, daß $x_j, y_j \in i\mathbb{R}$ für $j = 2, \ldots, m$. Dann sind

$$e_1 := \frac{1}{2}(1, i, 0, \ldots, 0), \quad e_2 := \frac{1}{2}(1, -i, 0, \ldots, 0)$$

primitive orthogonale idempotente Elemente in X mit $e_1 + e_2 = (1, 0, \ldots, 0) = e$. Der Rang von X ist damit zwei. Für die Peirce-Zerlegung bezüglich $\{e_1, e_2\}$ ergibt sich

$$X_{jj} = \mathbb{R} \cdot e_j, \; j = 1, 2 \; ,$$

und

$$X_{12} = X_{21} = \{(0, 0, x_3, \ldots, x_m) : \; x_j \in i\mathbb{R}, \; j = 3, \ldots, m\} \; .$$

Wegen der Orthogonalität der Idempotenten des Jordan-Rahmens kommutieren die zugehörigen Multiplikationsoperatoren miteinander, also gilt

$$[M_{e_i}, M_{e_j}] = 0$$

für alle $1 \leq i \leq j \leq r$, wobei mit $[T, T'] := TT' - T'T$ der *Kommutator* zweier Vektorraumendomorphismen von X bezeichnet wird. Damit bildet die *Diagonale in* X

$$\Theta := \sum_{j=1}^{r} X_{jj}$$

eine reelle Jordan-Unteralgebra von X, beziehungsweise

$$M_\Theta := \{M_\theta : \; \theta \in \Theta\}$$

eine kommutative Unteralgebra von $End(X)$.

Ein Element $x \in X$ nennt man *regulär*, falls es in X invertierbar ist und

$$X_{reg} := \{x \in X : \; x^{-1} \text{ existiert in } X\}$$

heißt der *reguläre Bereich* in X. Mit [FK, Proposition II.2.4] gibt es ein homogenes Polynom auf X, die *Jordan-Determinante*[2] *det*, so daß $x \in X$ genau dann regulär

[2]Durch die Schreibweise *det* wird die Jordan-Determinate ausdrücklich von der Determinante *Det* in $End(X)$ unterschieden.

ist, wenn det an der Stelle x nicht verschwindet. Da det als Polynom stetig ist, ist X_{reg} eine offene und dichte Teilmenge in X. Entsprechend sei

$$X_{sing} := \{x \in X : \ \det(x) = 0\} \tag{1.1.16}$$

der *singuläre Bereich* von X.

Beispiel 1.1.17 Für die Matrizenalgebren $Mat(r;\mathbb{R})$ und $Mat(r;\mathbb{C})$ ist det = Det, also die übliche Determinante. Für den reellen Spinfaktor $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}$ ergibt sich

$$\det(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$$

für alle $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}$. Es wird sich später zeigen (Lemma 1.3.1), daß auch diese Jordan-Determinante als Determinante von Matrizen interpretiert werden kann. Für beliebige Jordan-Algebren ist dies allerdings nicht möglich.

Ist X eine komplexe Jordan-Algebra, dann ist das $\mathbb{C}$-bilineare Produkt in X natürlich auch $\mathbb{R}$-bilinear. Da die Bedingungen aus Definition 1.1.2 von dieser Betrachtung unabhängig sind, ist jede komplexe Jordan-Algebra X auf natürliche Weise auch eine reelle Jordan-Algebra $X_{\mathbb{R}}$. Für $z \in X$ seien $\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(M_z)$, beziehungsweise $\mathrm{Tr}(M_z)$, die Spur von M_x als Endomorphismus des reellen, beziehungsweise komplexen Vektorraums X. Da für alle $z = (x+iy), z' = (x'+iy') \in X$

$$\begin{aligned}(z \diamond z') &= (x+iy) \diamond (x'+iy') \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + yx')\end{aligned}$$

gilt, folgt

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(M_z) = 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}(M_z)\Big) \tag{1.1.18}$$

und

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(M_{iz}) = -2\,\mathrm{Im}\Big(\mathrm{Tr}(M_z)\Big)$$

für alle $z \in X$. Mit

$$\lambda_{\mathbb{R}} : X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}; \ (z, z') \longmapsto \lambda_{\mathbb{R}}(z, z') = \mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(M_{z \diamond z'})$$

gilt

$$\lambda_{\mathbb{R}}(z, z') = 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}(M_{z\diamond z'})\Big) = 2\,\mathrm{Re}\Big(\lambda(z, z')\Big)$$

und

$$\lambda_{\mathbb{R}}(z, iz') = 2\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}(M_{z\diamond iz'})\Big) = -2\,\mathrm{Im}\Big(\lambda(z, z')\Big)$$

für alle $z, z' \in X$. Deshalb ist $\lambda_{\mathbb{R}}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf $X_{\mathbb{R}}$ und die reelle Jordan-Algebra $X_{\mathbb{R}}$ ist ebenfalls halbeinfach.

Da das Produkt nicht verändert wurde, ist der Jordan-Rahmen $\{e_1, \ldots, e_r\} \subset X$ auch in der reellen Jordan-Algebra $X_{\mathbb{R}}$ ein Jordan-Rahmen und der Rang von $X_{\mathbb{R}}$ ist gleich dem Rang von X.

Analog folgt für die regulären Bereiche

$$X_{reg} = (X_{\mathbb{R}})_{reg} \ . \tag{1.1.19}$$

Deshalb gilt für die Jordan-Determinanten $det_{\mathbb{R}}$ auf $X_{\mathbb{R}}$ und det auf X:

$$\{x \in X : \ \det{}_{\mathbb{R}}(x) \neq 0\} = \{x \in X : \ \det(x) \neq 0\} \ . \tag{1.1.20}$$

Konvention 1.1.21 Von nun an werden alle komplexen Jordan-Algebren als reelle Jordan-Algebren betrachtet. Deshalb bezeichne X stets eine reelle halbeinfache Jordan-Algebra der reellen Dimension m mit $\mathrm{Rang}(X) = r$.

1.2 Die Spektralgruppe einer halbeinfachen Jordan-Algebra

Für $\gamma \in GL(X)$, der Gruppe der *linearen Automorphismen* von X, definiert die Bedingung

$$\lambda(\gamma x, y) = \lambda(x, \gamma^{\lambda} y) \text{ für alle } x, y \in X \tag{1.2.1}$$

eindeutig ein $\gamma^{\lambda} \in GL(X)$, die zu γ bezüglich λ *adjungierte* Abbildung. Die *quadratische Darstellung* der halbeinfachen Jordan-Algebra X ist gegeben durch die Abbildung

$$P : X \longrightarrow End(X); \ x \longmapsto 2M_x^2 - M_{x^2} \ . \tag{1.2.2}$$

Im Falle des Beispiels 1.1.3 ergibt sich $P(x)(y) = x\,y\,x$ und $P(x\,y\,x) = P(x)P(y)P(x)$ für alle $x, y \in X$, was den Namen quadratische Darstellung erklärt. Die *Strukturgruppe* von X ist dann definiert als

$$\Gamma(X) := \{\gamma \in GL(X) : \ P(\gamma x) = \gamma P(x) \gamma^{\lambda} \text{ für alle } x \in X\} \ ,$$

die Zusammenhangskomponente des Einselementes in $\Gamma(X)$ sei mit $G := \Gamma(X)^0$ bezeichnet. G und $\Gamma(X)$ sind mit [U2, Corollary 22.15] abgeschlossene Lie-Untergruppen von $GL(X)$. Da mit [FK, Proposition VIII.2.5] für alle $\gamma \in G, \ x \in X$,

$$(\gamma x)^{-1} = (\gamma^{\lambda})^{-1} x^{-1}$$

gilt, ist insbesondere $\gamma x \in X_{reg}$ für alle $\gamma \in G, \ x \in X_{reg}$.

Die Gruppe der *Jordan-Algebraautomorphismen*

$$Aut(X) := \{\gamma \in GL(X) : \ \gamma x \diamond \gamma y = \gamma(x \diamond y) \text{ für alle } x, y \in X\}$$

ist eine reelle Lie-Gruppe. Ihre Lie-Algebra [U2, Seite 383]

$$aut(X) := \{D \in Lie(GL(X)); \ D(x \diamond y) = (Dx) \diamond y + x \diamond Dy \text{ für alle } x, y \in X\}$$

ist identisch mit der Lie-Algebra $\mathcal{D}(X)$, bestehend aus den *Derivationen* von X. Mit [U2, Proposition 22.23] ist $Aut(X)$ eine abgeschlossene analytische Untergruppe von $\Gamma(X)$, die durch die Eigenschaft charakterisiert ist, daß sie das Einselement $e \in X$ invariant läßt:

$$Aut(X) = \{\gamma \in \Gamma(X) : \ \gamma e = e\} \ .$$

Für die Lie-Algebra $\mathfrak{G}$ von G existiert nach [BK, Sätze IX.5.1. und II.5.3.] die multiplikative Graduierung

$$\mathfrak{G} = aut(X) + \{M_x : \ x \in X\} \ . \tag{1.2.3}$$

Die *inneren Derivationen* von X

$$int(X) := \Big\langle [M_x, M_y] : \ x, y \in X \Big\rangle_{\mathbb{R}} \tag{1.2.4}$$

bilden im allgemeinen ein Ideal in $aut(X)$ [U2, Proposition 22.25]. Im vorliegenden Fall einer halbeinfachen Jordan-Algebra, sind alle Derivationen von X innere Derivationen [L3, Corollary 8.9] und es gilt

$$int(X) = aut(X) \ .$$

Beispiel 1.2.5 Die Zusammenhangskomponente des Einselementes der Strukturgruppe von $Sym(r; \mathbb{R})$ ist $GL(r; \mathbb{R})^0 := \{\gamma \in GL(r; \mathbb{R}) : \ \operatorname{Det}(\gamma) > 0\}$ mit der Operation

$$GL(r; \mathbb{R})^0 \times Sym(r; \mathbb{R}) \longrightarrow Sym(r; \mathbb{R}); \ (\gamma, x) \longmapsto \gamma \, x \, \gamma^T \ .$$

Aus $\gamma x \gamma^T = e$ folgt $\gamma^T = \gamma^{-1}$ und es ergibt sich

$$Aut\Big(Sym(r; \mathbb{R})\Big)^0 = SO(r; \mathbb{R}) \ .$$

Für $Mat(r; \mathbb{R})$ gilt $G = \Gamma\left(Mat(r; \mathbb{R})\right)^0 = GL(r; \mathbb{R})^0 \times GL(r; \mathbb{R})^0$ mit der Operation

$$G \times Mat(r; \mathbb{R}) \longrightarrow Mat(r; \mathbb{R}); \ \Big((\gamma_1, \gamma_2), x\Big) \longmapsto \gamma_1 \, x \gamma_2^{-1} \ .$$

Damit ergibt sich die Gruppe der Jordan-Algebraautomorphismen zu

$$Aut\Big(Mat(r; \mathbb{R})\Big)^0 = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in G : \ \gamma_1 = \gamma_2\} \cong GL(r; \mathbb{R})^0 \ .$$

Im Gegensatz zu $Aut(Sym(r;\mathbb{R}))$ ist $Aut(Mat(r;\mathbb{R}))$ nicht kompakt. Dies ist ein erster entscheidender Unterschied zwischen halbeinfachen und formalreellen Jordan-Algebren, deren Automorphismengruppen immer kompakt sind. Der Grund dafür ist, daß $Aut(X)$ die im formalreellen Fall positiv definite Spurform λ invariant läßt. Dies wird später gezeigt. Für formalreelle Jordan-Algebren gilt außerdem der *Spektralsatz* [FK, Theorem III.1.2]

$$Aut(X)^0 \cdot \Theta = X \ . \tag{1.2.6}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit ist es essentiell, daß ein Spektralsatz der Form (1.2.6) bezüglich einer kompakten Untergruppe von G gilt. Deshalb ist für eine nicht formalreelle Jordan-Algebra X die Gruppe $Aut(X)$ aus zwei Gründen für weitere Untersuchungen nicht geeignet: Zum einen ist sie wegen der Indefinitheit der Spurform λ nicht kompakt, zum anderen ist für $Aut(X)$ kein allgemeiner Spektralsatz bekannt. Also muß eine „neue“ und im obigen Sinne „bessere“ Gruppe gefunden werden. Dies leistet das nun folgende Verfahren.

Ist α ein beliebiger involutorischer Automorphismus von X, so ist die durch α induzierte *Modifikation* X_α von X gegeben durch das Jordan-Algebraprodukt [H4, §1]

$$\begin{array}{rccl} \diamond_\alpha : & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\Big(x \diamond y + (\alpha x) \diamond y + x \diamond (\alpha y) - \alpha(x \diamond y)\Big) \ . \end{array}$$

Da $\alpha \in Aut(X)$, gilt $\alpha(e) = e$ und es folgt für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} e \diamond_\alpha x &= \frac{1}{2}\Big(e \diamond x + (\alpha e) \diamond x + e \diamond (\alpha x) - \alpha(e \diamond x)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(x + e \diamond x + e \diamond (\alpha x) - e \diamond (\alpha x)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(x + x) = x \ . \end{aligned}$$

Deshalb ist e auch in X_α das Einselement.

Laut [H4, Satz 5.2] existiert für jede reelle halbeinfache Jordan-Algebra eine geeignete *Helwig-Involution* α, so daß X_α eine formalreelle Jordan-Algebra ist. α induziert die kanonische Zerlegung

$$X = X_+ \oplus X_- \tag{1.2.7}$$

in die beiden Eigenräume

$$X_\pm := \{x \in X : \ \alpha x = \pm x\}$$

bezüglich α. Es gilt die Graduierungseigenschaft:

$$\begin{aligned} X_+ \diamond X_+ &\subset X_+ \ , \\ X_- \diamond X_- &\subset X_+ \ , \\ X_+ \diamond X_- &\subset X_- \ . \end{aligned}$$

X_+ ist eine maximale formalreelle Jordan-Unteralgebra von X mit $\mathrm{Rang}(X_+) = \mathrm{Rang}(X)$ [H4, Korollar 8.2]. Wegen $\alpha(x \diamond (\alpha x)) = \alpha x \diamond x = x \diamond \alpha x$ folgt für alle $x \in X$:

$$x \diamond (\alpha x) \in X_+ \ . \tag{1.2.8}$$

Ist $\{e_1, \ldots, e_r\}$ ein beliebiger Jordan-Rahmen in X, dann kann α darüber hinaus so gewählt werden, daß $\{e_1, \ldots, e_r\} \subset X_+$, also gilt für alle $i = 1, \ldots, r$

$$\alpha(e_i) = e_i \ . \tag{1.2.9}$$

Die Modifikation X_α ist genau dann formalreell, wenn die Spurform λ_α von X_α positiv definit ist [H4, Satz 5.2]. Für diese gilt mit [H4, Lemma 3.1]

$$\lambda_\alpha = \lambda \circ (id_X \times \alpha) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R};\ (x, y) \longmapsto \lambda(x, \alpha y) \ .$$

Im formalreellen Fall kann also einfach $\alpha = id_X$ gewählt werden.

Beispiel 1.2.10 Für $Mat(r; \mathbb{R})$ wählt man

$$\alpha : Mat(r; \mathbb{R}) \longrightarrow Mat(r; \mathbb{R});\ x \longmapsto x^T \ .$$

Dann gilt für alle $x, y \in X$

$$\lambda_\alpha(x, y) = \lambda(x, \alpha y) = \mathrm{Tr}\left(xy^T\right) \ ,$$

und λ_α ist eine positiv definite Bilinearform auf $Mat(r; \mathbb{R})$. Damit ist $Mat(r; \mathbb{R})_\alpha$ eine formalreelle Modifikation von $Mat(r; \mathbb{R})$. Es ergibt sich die Zerlegung (1.2.7) $Mat(r; \mathbb{R}) = X_+ \oplus X_-$, wobei

$$X_+ = \left\{x \in X :\ x^T = x\right\} = Sym(r; \mathbb{R})$$

die maximale formalreelle Jordan-Unteralgebra von X mit Rang r ist, und

$$X_- = \left\{x \in X :\ x^T = -x\right\} =: Alt(r; \mathbb{R}) \ ,$$

der Vektorraum der antisymmetrischen reellen $r \times r$ Matrizen. X_- ist der „nicht formalreelle Anteil" von X. Die Idempotenten $e_j = id_{jj},\ j \in \{1, \ldots, r\}$, aus Beispiel 1.1.14 bilden einen Jordan-Rahmen in $Mat(r; \mathbb{R})$, der invariant unter α ist.

Beispiel 1.2.11 Ist X die als reelle Jordan-Algebra aufgefaßte komplexe Jordan-Algebra $Sym(r;\mathbb{C})$, dann gilt wegen (1.1.18) und [FK, Example II.2.(1)]

$$\lambda(x,y) = 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}(xy)\right)$$

für alle $x, y \in Sym(r;\mathbb{C})$. Mit $\cdot^* : \mu_1 + i\mu_2 \longmapsto \mu_1 - i\mu_2$ ist die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$ bezeichnet und für $x = (x_{ij})_{i,j=1,\ldots,r} \in Sym(r;\mathbb{C})$ sei $x^* := (x_{ji})_{i,j=1,\ldots,r}$. Nun wählt man $\alpha(x) := x^*$ für alle $x \in X$. Dann gilt für alle $x = (x_{ij})_{i,j=1,\ldots,r} \in Sym(r;\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha(x,x) &= \lambda(x,x^*) \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}(xx^*)\right) \\ &= 2\sum_{j=1}^{r}\sum_{j_1}^{r} |x_{ij}|^2 \end{aligned}$$

und λ_α erweist sich als positiv definit. Es ergibt sich die formalreelle Jordan-Unteralgebra

$$\begin{aligned} Sym(r;\mathbb{C})_+ &= \{x \in Sym(r;\mathbb{C}) :\ x^* = x\} \\ &= \left\{x \in Mat(r;\mathbb{C}) :\ x^* = x = x^T\right\} \\ &= Sym(r;\mathbb{R})\ , \end{aligned}$$

beziehungsweise der nicht formalreelle Anteil von X

$$Sym(r;\mathbb{C})_- = \left\{x \in Mat(r;\mathbb{C}) :\ -x^* = x = x^T\right\} = Sym(r;i\mathbb{R})\ .$$

$Sym(r;\mathbb{R})$ ist zwar eine relle Jordan-Unteralgebra, aber kein komplexer Unterraum von $Sym(r;\mathbb{C})$. Es gilt sogar, daß $Sym(r;\mathbb{C})$ die Komplexifizierung von $Sym(r;\mathbb{R})$ ist.

Analog ergibt sich bezüglich der Fortsetzung von α auf $Mat(r;\mathbb{C})$

$$Mat(r;\mathbb{C})_+ = \{x \in Mat(r;\mathbb{C}) :\ x^* = x\} = Herm(r;\mathbb{C})\ .$$

Im allgemeinen kann man für jede komplexe Jordan-Algebra α so wählen, daß die formalreelle Unteralgebra X_+ gerade diejenige ist, deren Komplexifizierung wieder X ergibt. Eine solche *formalrelle Form* existiert für jede komplexe Jordan-Algebra [BK, Satz XI.5.6].

Konvention 1.2.12 Sei von nun an eine Helwig-Involution $\alpha \in Aut(X)$ fest gewählt, so daß X_α formalreell und $e_1, \ldots, e_r$ ein α-invarianter Jordan-Rahmen in X ist. Ist X schon formalreell, dann sei $\alpha := id_X$.

Definition 1.2.13 σ sei die Abbildung

$$\sigma : G \longrightarrow G;\ \gamma \longmapsto Ad(\alpha)(\gamma^{-1})^{\lambda} := \alpha \circ (\gamma^{-1})^{\lambda} \circ \alpha\ .$$

Korollar 1.2.14 *σ ist eine* Symmetrie *von G, das heißt ein Automorphismus von G mit $\sigma \circ \sigma = id_G$.*

Beweis: Mit [FK, Seite 147] ist $g \mapsto g^{\lambda}$ eine stetige Bijektion von $\Gamma(X)$ nach $\Gamma(X)$ und wegen $id_X^{\lambda} = id_X$ eine Bijektion von G auf sich. Da weiterhin $\alpha \in Aut(X) \subset G$ gilt auch $\sigma(G) = G$. Wegen

$$\lambda(x, (\gamma_1\gamma_2)^{\lambda} y) = \lambda(\gamma_1\gamma_2 x, y) = \lambda(\gamma_2 x, \gamma_1^{\lambda} y) = \lambda(x, \gamma_2^{\lambda}\gamma_1^{\lambda} y)$$

folgt

$$(\gamma_1\gamma_2)\lambda = \gamma_2^{\lambda}\gamma_1^{\lambda}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma_1\gamma_2) &= \alpha \circ \Big((\gamma_1\gamma_2)^{-1}\Big)^{\lambda} \circ \alpha \\
&= \alpha \circ (\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1})^{\lambda} \circ \alpha \\
&= \alpha \circ (\gamma_1^{-1})^{\lambda}(\gamma_2^{-1})^{\lambda} \circ \alpha \\
&= Ad(\alpha)(\gamma_1^{-1})^{\lambda} Ad(\alpha)(\gamma_2^{-1})^{\lambda} \\
&= \sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)\ .
\end{aligned}$$

Damit ist σ ein Automorphismus von G und da $\sigma \circ \sigma = id_G$, folgt die Behauptung. □

Korollar 1.2.15 *Für alle $\gamma \in GL(X)$ gilt:*

$$Ad(\alpha)\gamma^{\lambda} = \gamma^{\lambda_\alpha}\ .$$

Beweis: Seien $x, y \in X$ und $\gamma \in GL(X)$ beliebig. Dann gilt

$$\lambda_\alpha(\gamma x, y) = \lambda(\gamma x, \alpha y) = \lambda\Big(x, \gamma(\alpha y)\Big) = \lambda\Big(x, \alpha^2 \circ \gamma \circ \alpha(y)\Big) = \lambda_\alpha\Big(x, Ad(\alpha)\gamma(y)\Big)\ ,$$

und aufgrund der Definition der adjungierten Abbildung (1.2.1) folgt die Behauptung. □

Definition 1.2.16 Die *Spektralgruppe* von X sei definiert als die Zusammenhangskomponente des Einselementes der Fixpunktgruppe unter σ:

$$K^\sigma := \{\gamma \in G : \ \sigma(\gamma) = \gamma\}^0 \ .$$

Korollar 1.2.17 *K^σ ist eine kompakte und zusammenhängende Lie-Untergruppe von G.*

Beweis: Als Fixpunktgruppe der Involution σ ist K^σ eine abgeschlossene Untergruppe von G, also eine Lie-Untergruppe. K^σ ist zusammenhängend definiert und so bleibt die Kompaktheit zu zeigen. Seien dazu $k \in K^\sigma$ und $x, y \in X$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha(kx, ky) &= \lambda\Big(kx, \alpha(ky)\Big) \\
&= \lambda\Big(kx, \alpha \circ k \circ \alpha^2(y)\Big) \\
&= \lambda\Big(kx, (Ad(\alpha)k)(\alpha y)\Big) \\
&= \lambda\Big(kx, (k^{-1})^\lambda(\alpha y)\Big) \ ,
\end{aligned}$$

denn wegen Definition 1.2.16 ist $Ad(\alpha)(k^{-1})^\lambda = k$. Per Definition der adjungierten Abbildung (1.2.1) folgt

$$\lambda\Big(kx, (k^{-1})^\lambda(\alpha y)\Big) = \lambda(x, \alpha y) = \lambda_\alpha(x, y) \ .$$

Damit läßt jedes $k \in K^\sigma$ die positiv definite Bilinearform λ_α invariant und K^σ ist eine kompakte Untergruppe von G. $\square$

Beispiel 1.2.18 Im Beispiel 1.2.10 wurde für $Mat(r;\mathbb{R})$ als Automorphismus α die Transposition gewählt. Seien $(\gamma_1, \gamma_2) \in G = GL(r;\mathbb{R})^0 \times GL(r;\mathbb{R})^0$, dann ergibt sich für alle $x, y \in Mat(r;\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\lambda\Big((\gamma_1, \gamma_2)(x), y\Big) &= \mathrm{Tr}(\gamma_1 x \gamma_2^{-1} y) \\
&= \mathrm{Tr}(x \gamma_2^{-1} y \gamma_1) \\
&= \lambda\Big(x, (\gamma_2^{-1}, \gamma_1^{-1}) y\Big) \\
&= \lambda\Big(x, (\gamma_2, \gamma_1)^{-1} y\Big) \ ,
\end{aligned}$$

und damit

$$\Big((\gamma_1, \gamma_2)^{-1}\Big)^\lambda = (\gamma_2, \gamma_1) \ . \qquad (1.2.19)$$

$Ad(\alpha)(\gamma_1, \gamma_2)$ errechnet sich mit

$$(\alpha \circ (\gamma_1, \gamma_2) \circ \alpha)(x) = \Big((\gamma_1, \gamma_2)(x^T) \Big)^T = \Big(\gamma_1(x^T)\gamma_2^{-1} \Big)^T = (\gamma_2^{-1})^T x \gamma_1^T \qquad (1.2.20)$$

zu

$$Ad(\alpha)(\gamma_1, \gamma_2) = \Big((\gamma_2^{-1})^T, (\gamma_1^{-1})^T \Big) \ . \qquad (1.2.21)$$

Insgesamt ergibt sich für σ

$$\sigma(\gamma_1, \gamma_2) = Ad(\alpha) \Big((\gamma_1, \gamma_2)^{-1} \Big)^\lambda \overset{(1.2.19)}{=} Ad(\alpha)(\gamma_2, \gamma_1) \overset{(1.2.21)}{=} \Big((\gamma_1^{-1})^T, (\gamma_2^{-1})^T \Big) \ ,$$

und aus der Bedingung $\sigma(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_1, \gamma_2)$ folgt $\gamma_i^{-1} = \gamma_i^T, \ i = 1, 2$. Damit bestimmt sich K^σ zu

$$K^\sigma = SO(r; \mathbb{R}) \times SO(r; \mathbb{R}) \subset GL(r; \mathbb{R})^0 \times GL(r; \mathbb{R})^0 \ .$$

Beispiel 1.2.22 Im Beispiel 1.2.11 wurde für die als reelle Jordan-Algebra aufgefaßte komplexe Jordan-Algebra $Sym(r; \mathbb{C})$

$$\alpha : Sym(r; \mathbb{C}) \longrightarrow Sym(r; \mathbb{C}); \ x \longmapsto x^*$$

gewählt. Analog dem letzten Beispiel erhält man für $\gamma \in \Gamma(Sym(r; \mathbb{C}))^0 = GL(r; \mathbb{C})$ und $x, y \in Sym(r; \mathbb{C})$

$$\lambda(\gamma(y), y) = 2\mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}\left(\gamma y \gamma^T y \right) \Big) = 2\mathrm{Re}\Big(\mathrm{Tr}\left(x \gamma^T y \gamma \right) \Big) \ ,$$

was $\gamma^\lambda = \gamma^T$ impliziert. Weiter folgt

$$Ad(\alpha)(\gamma)(x) = (\gamma x^* \gamma^T)^* = (\gamma^T)^* x \gamma^* = (\gamma^T)^*(x) \ ,$$

woraus sich

$$\sigma(\gamma) = Ad(\alpha) \left(\gamma^{-1} \right)^T = \left(\gamma^{-1} \right)^*$$

ergibt. Aus der Bedingung $\sigma(\gamma) = \gamma$ folgt nun

$$K^\sigma = \left\{ \gamma \in GL(r; \mathbb{C}) : \ \gamma^* = \gamma^{-1} \right\} = U(r; \mathbb{C}) \ ,$$

die Gruppe der unitären $(r \times r)$-Matrizen.

Die in den beiden letzten Beispielen berechneten Gruppen K^σ lassen für alle $r \geq 2$ das Einselement in der jeweiligen Jordan-Algebra nicht mehr invariant. Damit enthalten sie Elemente, die nicht zu $Aut(X)$ gehören können. Da diese Elemente eine entscheidende Rolle im Beweis des angestrebten Spektralsatzes spielen, werden sie nun genauer bestimmt.

Definition 1.2.23 Die Menge der *α-Symmetrien in X* sei definiert als

$$Y^\alpha := \{y \in X : \ \alpha y = y^{-1}\}^0 .$$

Lemma 1.2.24 *Für alle $y \in Y^\alpha$ gilt:*

$$P(y) \in K^\sigma.$$

Beweis: Sei $y \in Y^\alpha$ beliebig. Wegen [FK, Proposition VIII.2.4] gilt zunächst $P(y) \in G$. [FK, Proposition II.3.1] besagt, daß $(P(y))^{-1} = P(y^{-1})$ und es folgt

$$\Big((P(y))^{-1}\Big)^\lambda = \Big(P(y^{-1})\Big)^\lambda = \Big(P(\alpha y)\Big)^\lambda \overset{(1.2.2)}{=} \left(2(M_{\alpha y})^2 - M_{(\alpha y)^2}\right)^\lambda .$$

Da $T \mapsto T^\lambda$ linear ist und die Eigenschaft $(TT')^\lambda = (T')^\lambda T^\lambda$ für alle $T, T' \in End(X)$ besitzt, ergibt sich wegen $(M_x)^\lambda = M_x$ für alle $x \in X$ [FK, Seite 147]:

$$\left(2(M_{\alpha y})^2 - M_{(\alpha y)^2}\right)^\lambda = 2(M_{\alpha y})^\lambda (M_{\alpha y})^\lambda - (M_{(\alpha y)^2})^\lambda = 2(M_{\alpha y})^2 - M_{(\alpha y)^2} .$$

Anwendung von $Ad(\alpha)$ impliziert für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} & Ad(\alpha)\left(2(M_{\alpha y})^2 - M_{(\alpha y)^2}\right)(x) \\ = \ & \alpha\Big(2(\alpha y) \diamond ((\alpha y) \diamond (\alpha x)) - ((\alpha y) \diamond (\alpha y)) \diamond (\alpha x)\Big) \\ = \ & 2y \diamond (y \diamond x) - (y \diamond y) \diamond x \\ = \ & (2M_y^2 - M_{y^2})(x) \\ = \ & P(y)(x) , \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.2.25 Sei wieder $X = Mat(r; \mathbb{R})$ und $r \geq 2$. Dann gilt mit den Resultaten aus Beispiel 1.2.10 und Beispiel 1.2.18

$$Y^\alpha = \left\{y \in X : \ y^T = y^{-1}\right\} = SO(r; \mathbb{R}) .$$

Da eine Matrizenalgebra vorliegt, gilt [FK, II.3]

$$P(y)(x) = yxy$$

für alle $y \in Y^\alpha$. Mittels der Einbettung

$$\begin{aligned} \iota : \ SO(r; \mathbb{R}) \ &\hookrightarrow \ K^\sigma ; \\ u \ &\longmapsto \ (u, u^{-1}) \end{aligned}$$

wird $P(Y^\alpha)$ als Untergruppe von K^σ realisiert, die für $r \geq 2$ das Einselement $e \in X$ nicht invariant läßt.

Dies führt zu folgendem Lemma:

Lemma 1.2.26 *Ist X halbeinfach und nicht formalreell, dann gilt:*

$$K^\sigma \not\subset Aut(X)^0 \ .$$

Beweis: Mit [FK, Proposition II.2.4] gibt es ein Polynom Q auf X, so daß

$$x^{-1} = \frac{Q(x)}{det(x)}$$

für alle $x \in X_{reg}$. Deshalb ist

$$Y^\alpha = \left\{ y \in X_{reg} : \ \alpha y = y^{-1} = \frac{Q(y)}{det(y)} \right\} \tag{1.2.27}$$

eine analytische Untermannigfaltigkeit von X. Ableiten der Bedingung (1.2.27) ergibt für den Tangentialraum von Y^α im Punkt e

$$T_e Y^\alpha = \{x \in X : \ \alpha x = -x\} = X_- \ . \tag{1.2.28}$$

Da X nicht formalreell ist, folgt $\alpha \neq id_X$ und damit $X_+ \neq X$, also $X_- \neq \{0\}$. Für ein beliebiges $0 \neq x_- \in X_-$ sei $y := \exp(x_-)$, wobei mit [FK, Seite 34]:

$$\exp : X_- \longrightarrow Y^\alpha ; \ x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \ .$$

Dann ist mit Lemma 1.2.24 der Endomorphismus $P(y)$ ein Element in K^σ. Für alle $x \in X$ gilt $P(\exp x) = \operatorname{Exp}(2M_x)$ [FK, Proposition II.3.4]. Da $x_- \neq 0$ ist $0 \neq 2x_- = 2x_- \circ e = 2M_{x_-}(e)$ und es folgt [FK, Proposition VIII.2.6]

$$2M_{x_-} \notin aut(X) = \{D \in \mathfrak{G}; \ D(e) = 0\} \ .$$

Damit ist aber auch $P(y) = \operatorname{Exp}(2M_{x_-}) \notin Aut(X)^0$, was die Behauptung des Lemmas zeigt.

□

Das Lemma zeigt, daß die Automorphismengruppe von X und K^σ im Sinne einer Enthaltensrelation „schief“ zueinander liegen. Sie haben jedoch eine gemeinsame Untergruppe, auf der ihre unterschiedlichen Definitionen übereinstimmen: Die Zusammenhangskomponente des Einselementes der Automorphismen der formalreellen Jordan-Unteralgebra X_+:

Lemma 1.2.29
$$Aut(X_+)^0 \subset K^\sigma \cap Aut(X)^0 \ .$$

Beweis: Mit (1.2.4) gilt für die Lie-Algebra von $Aut(X_+)^0$:

$$\begin{aligned} aut(X_+) &= int(X_+) \\ &= \Big\langle [M_x, M_y] : \ x, y \in X_+ \Big\rangle_{\mathbb{R}} \ . \end{aligned} \tag{1.2.30}$$

Da X_+ eine Jordan-Unteralgebra von X ist, bildet wegen (1.2.30) $int(X_+)$ eine Lie-Unteralgebra von $int(X)$, und weil $Aut(X_+)^0$ eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist, gibt es eine Einbettung

$$\iota : Aut(X_+)^0 \hookrightarrow Aut(X)^0$$

von $Aut(X_+)^0$ als abgeschlossene Untergruppe von $Aut(X)^0$.

Um zu zeigen, daß $Aut(X_+)^0$ auch in K^σ enthalten ist, muß zunächst die Lie-Algebra $\mathfrak{K}^\sigma \subset \mathfrak{G}$ von K^σ bestimmt werden. Das Einselement $id_X \in K^\sigma$ ist auch das Einselement von $\Gamma(X)$. Deshalb läßt die Symmetrie σ es invariant und es existiert die Tangentialabbildung $T_{id_X}\sigma : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}$. Da $g \mapsto g^{\lambda_\alpha}$ eine lineare Abbildung ist, folgt aus

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathrm{Exp}(tB)^{-1}\Big)^{\lambda_\alpha}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big(\mathrm{Exp}(-tB)\Big)^{\lambda_\alpha}\bigg|_{t=0} = -B^{\lambda_\alpha}$$

die Beziehung

$$T_{id_X}\sigma(B) = -B^{\lambda_\alpha} \tag{1.2.31}$$

für alle $B \in \mathfrak{G}$. Dies impliziert

$$\mathfrak{K}^\sigma = \big\{ B \in \mathfrak{G} : \ B = T_{id_X}\sigma(B) = -B^{\lambda_\alpha} \big\} \ .$$

Sei nun $D \in int(X_+)$ beliebig. Dann kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $D = [M_x, M_y]$, mit geeigneten $x, y \in X_+$, angenommen werden. Hieraus ergibt sich

$$D^{\lambda_\alpha} = [M_x, M_y]^{\lambda_\alpha} = (M_x M_y - M_y M_x)^{\lambda_\alpha} = M_y^{\lambda_\alpha} M_x^{\lambda_\alpha} - M_x^{\lambda_\alpha} M_y^{\lambda_\alpha} \ . \tag{1.2.32}$$

Aufgrund Korollar 1.2.15 gilt $M_{x'}^{\lambda_\alpha} = \alpha \circ M_{x'}^{\lambda} \circ \alpha$ und wegen [FK, Seite 147] folgt $M_{x'}^{\lambda_\alpha} = \alpha \circ M_{x'} \circ \alpha$ für alle $x' \in X$. Da $x, y \in X_+$, ergibt sich für alle $x' \in X$

$$\begin{aligned} \alpha \circ M_x \circ \alpha(x') &= \alpha\Big(x \diamond (\alpha x')\Big) \\ &= \alpha x \diamond x' \\ &= x \diamond x' \\ &= M_x(x') \ , \end{aligned}$$

also $M_x^{\lambda_\alpha} = M_x$ und analog $M_y^{\lambda_\alpha} = M_y$. Durch Einsetzen in (1.2.32) erhält man für D:

$$\begin{aligned} D^{\lambda_\alpha} &= M_y^{\lambda_\alpha} M_x^{\lambda_\alpha} - M_x^{\lambda_\alpha} M_y^{\lambda_\alpha} \\ &= M_y M_x - M_x M_y \\ &= -D \ . \end{aligned}$$

Es folgt $D \in \mathfrak{K}^\sigma$, also $int(X_+) \subset \mathfrak{K}^\sigma$. Weil $Aut(X_+)^0$ zusammenhängend ist, folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.2.33 Für $X = Mat(r;\mathbb{R})$ ergab sich im Beispiel 1.2.10 $X_+ = Sym(r;\mathbb{R})$. Damit ist $Aut(X_+)^0 = Aut(Sym(r;\mathbb{R}))^0 = SO(r;\mathbb{R})$ und mittels der Einbettung

$$\iota' : SO(r;\mathbb{R}) \hookrightarrow K^\sigma;\ k \longmapsto (k,k) \tag{1.2.34}$$

eine Untergruppe von K^σ . Tatsächlich gilt für alle $k \in SO(r;\mathbb{R})$:

$$(k,k)(id_{\mathbb{R}^r}) = k \cdot id_{\mathbb{R}^r} \cdot k^{-1} = id_{\mathbb{R}^r} \ ,$$

und damit ist $Aut(X_+)^0 \subset K^\sigma \cap Aut(X)^0$. In Beispiel 1.2.5 wurde $Aut(Mat(r;\mathbb{R}))^0$ als $\{(\gamma,\gamma) \in G :\ \gamma \in GL(r;\mathbb{R})^0\}$ bestimmt, was mit (1.2.34) noch einmal $Aut(X_+)^0 \subset Aut(X)^0$ zeigt.

Satz 1.2.35 (Spektralsatz für halbeinfache Jordan-Algebren) *Für alle $x \in X$ gibt es ein $k \in K^\sigma$ und ein $\theta \in \Theta$ mit*

$$k\theta = x \ .$$

Beweis: X_+ ist eine formalreelle Jordan-Algebra und mit Lemma 1.2.29 gilt

$$Aut(X_+) \subset K^\sigma \ .$$

Wegen $\Theta \subset X_+$ (Konvention 1.2.12) folgt mit dem Spektralsatz für formalreelle Jordan-Algebren [FK, Theorem III.1.2]

$$X_+ = Aut(X_+) \cdot \Theta \subset K^\sigma \cdot \Theta \ . \tag{1.2.36}$$

Nun betrachte man die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi :\ Y \times X_+ &\longrightarrow X \ ; \\ (y, x_+) &\longmapsto P(y)(x_+) \ . \end{aligned}$$

Der Tangentialraum $T_e Y^\alpha$ von Y^α im Punkt e ist nach (1.2.28) gerade X_-. Seien nun $x_- \in X_-$, $x_+ \in X_+$ und $\epsilon > 0$ geeignet. Dann definiert

$$f(t) := (\exp(tx_-), e + tx_+) =: (y^t, x_+^t), \ |t| < \epsilon ,$$

eine Kurve in $Y \times X_+$ mit $f(0) = (e, e)$ und Tangentialvektor

$$\frac{d}{dt}\Big(\exp(tx_-), e + tx_+\Big)\Big|_{t=0} = \Big(x_- \diamond \exp(tx_-), x_+\Big)\Big|_{t=0} = (x_-, x_+)$$

im Nullpunkt. Es ergibt sich für die Tangentialabbildung: $T_{(e,e)}\Phi : X_- \times X_+ \longrightarrow X$:

$$\begin{aligned}
&T_{(e,e)}\Phi(x_-, x_+) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(P(y^t)(x_+^t)\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\Big(2y^t \diamond (y^t \diamond x_+^t) - (y^t \diamond y^t) \diamond x_+^t\Big)\Big|_{t=0} \\
&= 2\left(\left(\frac{d}{dt}y^t\right) \diamond (y^t \diamond x_+^t) + y^t \diamond \left(\left(\frac{d}{dt}y^t\right) \diamond x_+^t\right) + y^t \diamond \left(y^t \diamond \frac{d}{dt}x_+^t\right)\right)\Big|_{t=0} \\
&\qquad - \left(\left(\frac{d}{dt}y^t\right) \diamond y^t\right) \diamond x_+^t - \left(y^t \diamond \left(\frac{d}{dt}y^t\right)\right) \diamond x_+^t - (y^t \diamond y^t) \diamond \frac{d}{dt}x_+^t\Big|_{t=0} \\
&= 2\Big(x_- \diamond (e \diamond e) + e \diamond (x_- \diamond e) + e \diamond (e \diamond x_+)\Big) \\
&\qquad -(x_- \diamond e) \diamond e - (e \diamond x_-) \diamond e - (e \diamond e) \diamond x_+ \\
&= 2x_- + x_+
\end{aligned}$$

für alle $(x_-, x_+) \in X_- \oplus X_+$. Da $X_+ + X_- = X$, ist $T_{(e,e)}\Phi$ surjektiv und wegen $\dim X_+ + \dim X_- = \dim X$ auch injektiv und somit invertierbar. Damit ist Φ lokal invertierbar, und es gibt offene Mengen $U \subset Y \times X_+$ und $U' \subset X$, so daß $\Phi|_U : U \longrightarrow U'$ bijektiv. Ohne Einschränkung kann $U = U_Y \times U_+ \subset Y \times X_+$ gewählt werden. Da Φ in der zweiten Komponente linear ist, folgt aus der Surjektivität von $\Phi|_{U_Y \times U_+} : U_Y \times U_+ \longrightarrow U'$ direkt die Surjektivität von

$$\Phi|_{U_Y \times \mathbb{R}\cdot U_+} : U_Y \times \mathbb{R} \cdot U_+ = U_Y \times X_+ \longrightarrow \mathbb{R} \cdot U' = X \ .$$

Wegen Lemma 1.2.24 ist $\{P(y) : \ y \in Y\}$ eine Teilmenge in K^σ. Zusammen mit (1.2.36) ergibt sich

$$X \subset \Phi(Y \times X_+) \subset K^\sigma \cdot X_+ = K^\sigma \cdot (K^\sigma \cdot \Theta) = K^\sigma \cdot \Theta \ ,$$

also die behauptete Spektralzerlegung von X bezüglich der Operation von K^σ. $\square$

Das folgende Resultat zeigt, daß die Definition der Spektralgruppe tatsächlich eine Art Verallgemeinerung der Definition der Automorphismengruppe ist.

Lemma 1.2.37 *Ist X eine formalreelle Jordan-Algebra, dann gilt:*

$$K^\sigma = Aut(X)^0 \ .$$

Insbesondere ist $Aut(X)^0$ eine kompakte Lie-Gruppe.

Beweis: Da K^σ und $Aut(X)^0$ zusammenhängende kompakte Lie-Untergruppen von G sind, genügt es

$$\mathfrak{K}^\sigma = aut(X)$$

zu zeigen. X ist formalreell, deshalb gilt $\alpha = id_X$. In Lemma 1.2.29 wurde gezeigt, daß

$$\mathfrak{K}^\sigma = \left\{ B \in \mathfrak{G} : \ B = T_{id_X}\sigma(B) = -B^\lambda \right\} \ .$$

Völlig analog dem Beweis des Lemmas 1.2.29 folgt für alle $D \in int(X)$:

$$D^\lambda = -D \ ,$$

und damit

$$aut(X_+) = int(X_+) \subset \mathfrak{K}^\sigma \ . \tag{1.2.38}$$

Sei nun $B \in \mathfrak{K}^\sigma$ beliebig. Da

$$\mathfrak{K}^\sigma \subset \mathfrak{G} = aut(X) + M_X \ ,$$

gibt es ein $D \in aut(X)$ und ein $x \in X$, so daß

$$B = D + M_x \ .$$

Da $aut(X) \subset \mathfrak{K}^\sigma$, ist $T_{id_X}\sigma(D) = D$. Für den Multiplikationsoperator M_x gilt mit [FK, Seite 147] $M_x = (M_x)^\lambda$ und es folgt

$$T_{id_X}\sigma(B) = D + (-M_x) \ .$$

Ein unter $T_{id_X}\sigma$ invariantes Element aus $\mathfrak{G}$ muß also einen trivialen Anteil in M_X haben. Es folgt daher $\mathfrak{K}^\sigma \subset aut(X)$ und zusammen mit (1.2.38)

$$\mathfrak{K}^\sigma = aut(X) \ .$$

Der Zusatz ergibt sich nun direkt aus Korollar 1.2.17. □

Bemerkung 1.2.39 Analog Lemma 1.2.37 zeigt man für eine beliebige halbeinfache Jordan-Algebra X:

$$Aut(X)^0 = \{\gamma \in G : \ (\gamma^{-1})^\lambda = \gamma\}^0 \ ,$$

und analog Korollar 1.2.17 folgt für alle $x, y \in X, k \in Aut(X)^0$:

$$\lambda(kx, ky) = \lambda(x, y) \ .$$

Damit läßt $Aut(X)^0$ zwar die Bilinearform λ invariant, aber falls X nicht formalreell ist, dann ist λ nicht positiv definit und deshalb $Aut(X)^0$ auch nicht kompakt.

Da K^σ die Fixpunktgruppe der Symmetrie σ ist, sind G und K^σ ein symmetrisches Paar mit symmetrischem Quotientenraum G/K^σ.

Die Strukturgruppe G ist eine *reduktive* Lie-Gruppe. Sei $\mathfrak{C}$ die Lie-Algebra von $Lie(Zentrum(G)) := \{\gamma \in G : \ [\gamma, \gamma'] = 0 \text{ für alle } \gamma' \in G\}$. Dann gilt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{C} + [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] \ ,$$

wobei $\mathfrak{C} \cap [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}] = \{0\}$ und $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ eine *halbeinfache* Lie-Algebra ist [W2, Proposition 1.1.5.1]. Sei X nun formalreell. Wegen Lemma 1.2.37 und [S2, Section 6] ist K^σ maximal kompakt in G und es existiert die *Iwasawa-Zerlegung*

$$G = K^\sigma \cdot A \cdot N$$

von G in die kompakte Gruppe K^σ, die maximale abelsche Gruppe A und die maximale Gruppe der Unipotenten N. Sie ist im vorliegenden Fall gegeben durch [FS, 1.2]

$$\mathfrak{A} := Lie(A) = M_\Theta \tag{1.2.40}$$

und

$$\mathfrak{N} := Lie(N) = \left\{ \sum_{i<j} M_{e_i \diamond x_{ij}} + [M_{e_i}, M_{x_{ij}}] : \ x = \sum_{1 \le i < j \le r} x_{ij} \in \sum_{1 \le i < j \le r}^{\oplus} X_{ij} \right\} \ .$$

Mittels der adjungierten Darstellung operiert K^σ auf $\mathfrak{G}$. Der *Zentralisator* von M_Θ in K^σ

$$Zent(M_\Theta) := \{k \in K^\sigma : \ Ad(k)(M_\theta) = M_\theta \text{ für alle } \theta \in \Theta\}$$

und der *Normalisator* von M_Θ in K^σ

$$Norm(M_\Theta) := \{k \in K^\sigma : \ Ad(k)(M_\Theta) \subset M_\Theta\}$$

sind abgeschlossene Untergruppen von K^σ, so daß $Zent(M_\Theta)$ ein Normalteiler in $Norm(M_\Theta)$ ist. Die Quotientengruppe

$$W(M_\Theta) := Norm(M_\Theta)/Zent(M_\Theta) \tag{1.2.41}$$

heißt die *Weyl-Gruppe* von (G, A). $W(M_\Theta)$ operiert auf M_Θ mittels der injektiven Einbettung $W(M_\Theta) \hookrightarrow GL(M_\Theta)$, gegeben durch $w(M_\theta) := Ad(k)(M_\theta)$ für alle $\theta \in \Theta$ und $k \in w \in W(M_\Theta) \subset K^\sigma$ [W1, 7.5.6 und 8.9]. Da X formalreell ist, gilt für alle $\theta \in \Theta, x \in X$ und $k \in K^\sigma = Aut(X)^0$:

$$\begin{aligned} Ad(k)(M_\theta)(x) &= \left(k\, M_\theta\, k^{-1}\right)(x) \\ &= k\left(M_\theta(k^{-1}x)\right) \\ &= k(\theta \diamond (k^{-1}x)) \qquad (1.2.42) \\ &= (k\theta) \diamond (kk^{-1}x) \\ &= M_{k\theta}(x)\ . \qquad (1.2.43) \end{aligned}$$

Damit ist die durch die adjungierte Darstellung definierte Operation von $W(M_\Theta)$ auf M_Θ äquivalent zur Operation von $W(M_\Theta)$ auf Θ als Untergruppe von $Aut(X)^0$.

Ist X nicht formalreell, dann kann in (1.2.42) nicht mehr die Homomorphismuseigenschaft von k angewendet werden. Deshalb definiert man:

Definition 1.2.44 Der *Normalisator* von Θ ist als

$$Norm(\Theta) := \{k \in K^\sigma :\ k(\Theta) \subset \Theta\}\ ,$$

der *Zentralisator* von Θ als

$$Zent(\Theta) := \{k \in K^\sigma :\ k(\theta) = \theta \text{ für alle } \theta \in \Theta\}$$

und die *Diagonalgruppe von* Θ als

$$W(\Theta) := Norm(\Theta)/Zent(\Theta) \hookrightarrow GL(\Theta)$$

definiert.

Die Rechnung (1.2.43) zeigt:

Korollar 1.2.45 *Ist X formalreell, dann sind Diagonalgruppe und Weyl-Gruppe identisch.*

Sei X_+ die durch α definierte maximale formalreelle Jordan-Unteralgebra von X und $G_+ := \Gamma(X_+)^0$. Dann ist wegen (1.2.9) $\Theta \subset X_+$ und $A \subset G_+$. $Aut(X_+)^0$ ist maximal kompakt in G_+ [S2, Section 6] und die Weyl-Gruppe $W_+(\Theta)$ von (G_+, A)

enthält mit [W1, Section 8.9] die Vertauschungen w_{ij}, für deren Einschränkung auf den Jordan-Rahmen

$$w_{ij} : \{e_1, \ldots, e_r\} \longrightarrow \{e_1, \ldots, e_r\};\ e_l \longmapsto \begin{cases} e_i\ , & \text{falls } l = j\ , \\ e_j\ , & \text{falls } l = i\ , \\ e_l\ , & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.2.46}$$

gilt. Damit enthält $W_+(\Theta)$ alle Permutationen der Elemente des Jordan-Rahmens. Wegen Lemma 1.2.29 gilt $Aut(X_+) \subset K^\sigma$ und auch K^σ enthält alle Permutationen von $\{e_1, \ldots, e_r\}$.

Beispiel 1.2.47 Im Fall $X = Mat(2;\mathbb{R})$ ist

$$k_0 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \in K^\sigma = SO(2;\mathbb{R}) \times SO(2;\mathbb{R})$$

und es gilt

$$k_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{22} & 0 \\ 0 & -x_{11} \end{pmatrix}\ , \tag{1.2.48}$$

also $k_0 \in W(\Theta)$. $k_0|_\Theta$ ist der durch

$$w_{12}^- := \begin{cases} e_1 & \longmapsto & -e_2\ , \\ e_2 & \longmapsto & -e_1 \end{cases}$$

eindeutig definierte Endomorphismus von Θ.

Für formalreelles X ist im Gegensatz zu diesem Beispiel $w_{ij}^- \notin W(\Theta)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}, i \neq j$, denn alle $k \in K^\sigma = Aut(X)^0$ müssen $e = e_1 + \ldots + e_r$ invariant lassen. Dies ist der tiefere Grund für die später bestimmte Kegelzahl von $r + 1$ im formalreellen Fall (vergleiche Satz 2.2.5).

Definition 1.2.49 Die Jordan-Algebra X heißt einfach, falls sie außer $\{0\}$ und sich selbst keine weiteren Ideale enthält.

Ist X eine einfache Jordan-Algebra, dann ist N weiterhin eine unipotente [S2, Lemma 2] und A eine maximale abelsche Gruppe in G [S2, Seite 149] und es gilt

$$K^\sigma \cdot A \cdot N \subset G\ . \tag{1.2.50}$$

Die Gruppen A und N sind im weiteren Verlauf von Bedeutung, obwohl im nicht formalreellen Fall nicht klar ist, ob (1.2.50) eine Iwasawa-Zerlegung von G definiert.

1.3 Klassifikation

Es gibt genau vier unitale Divisionsalgebren $\mathbb{D}$ über $\mathbb{R}$. Dies sind die Körper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, der Schiefkörper $\mathbb{H}$ und die nicht assoziative Divisionsalgebra der *Oktaven* $\mathbb{O}$. Alle diese Algebren tragen eine natürliche Involution $\cdot^*$, die allein die reellen Zahlen invariant läßt. Analog Beispiel 1.2.11 überträgt man $\cdot^*$ auf die $(r \times r)$-Matrizen über $\mathbb{D}$ mittels $x^* := (x_{ji})_{i,j=1,\ldots,r}$ für alle $x = (x_{ij})_{i,j=1,\ldots,r} \in Mat(r;\mathbb{D})$. Ist $\mathbb{E}$ ein reeller Hilbertraum der Dimension $m' \geq 1$, dann sei $x^* := x^T$ die durch $x \in \mathbb{E}$ definierte Linearform auf $\mathbb{E}$. Unter der Fixpunktmenge $\{x \in \mathbb{E} : \ x^T = x\}$ sind in diesem Fall die reellen Zahlen selbst zu verstehen.

Lemma 1.3.1 *Alle einfachen formalreellen Jordan-Algebren lassen sich in der Form*

$$Herm(r;\mathbb{E}) := \{x \in \mathbb{E}^{r \times r} \ : \ x^* = x\} \tag{1.3.2}$$

schreiben, wobei $\mathbb{E} \in \{\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H},\ \mathbb{O}\}$ *oder* $\mathbb{E}$ *ein reeller Hilbertraum der Dimension* $m' \geq 1$ *ist. Abhängig vom Rang* r *der Algebra können folgende Fälle auftreten:*

$r \geq 4$*:* $\mathbb{E} \in \{\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}\}$.

$r = 3$*:* $\mathbb{E} \in \{\mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}\ \mathbb{O}\}$*. Ist* $\mathbb{E} = \mathbb{O}$ *so entsteht die Ausnahme Jordan-Algebra der Dimension* 27*.*

$r = 2$*:* $\mathbb{E}$ *ist ein beliebiger reeller Hilbertraum der Dimension* $m - 2 \geq 2$*. Dann gilt die Darstellung*

$$Herm(2;\mathbb{E}) := \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ z^* & y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^{m-2} \right\}.$$

$r = 1$*:* $\mathbb{E} = \mathbb{R}$*.*

Beweis: Für x aus dem reellen Spinfaktor sei $x_{11} := x_1 + x_2$ und $x_{22} := x_1 - x_2$. Dann ist die Abbildung

$$(x_1, x') \longmapsto \begin{pmatrix} x_{11} & (x_3, \ldots, x_{d+2}) \\ (x_3, \ldots, x_{d+2}) & x_{22} \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Algebraisomorphismus von $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}$ nach $Herm(2, \mathbb{R}^{m-2})$. Ansonsten ist die Darstellung der übrigen formalreellen Jordan-Algebren wohlbekannt, und ergibt sich zum Beispiel aus [BK, XI.5.3] oder [FK, Theorem V.3.7]. $\square$

Darüber hinaus gibt es weitere halbeinfache Jordan-Algebren, die jedoch nicht formalreell sind. Die folgende Liste gründet sich auf die Klassifikation der einfachen *Jordan-Tripelsysteme* [N2, N3].

Satz 1.3.3 (Klassifikation) *Ist X eine einfache Jordan-Algebra vom Rang r, dann ist X isomorph zu einer der einfachen formalreellen Jordan-Algebren:*

I) $Sym(r;\mathbb{R}) = \{x \in Mat(r;\mathbb{R}) : \; x^T = x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Sym(r;\mathbb{R})) = r$;

II) $Herm(r;\mathbb{C}) = \{x \in Mat(r;\mathbb{C}) : \; x^* = x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Herm(r;\mathbb{C})) = r$;

III) $Herm(r;\mathbb{H}) = \{x \in Mat(r;\mathbb{H}) : \; x^* = x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Herm(r;\mathbb{H})) = r$;

IV) $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}$, *mit* $\mathrm{Rang}(\mathbb{R} \times i\mathbb{R}^{m-1}) = 2$;

V) $Herm(3;\mathbb{O}) = \{x \in Mat(3;\mathbb{O}) : \; x^* = x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Herm(3;\mathbb{O})) = 3$,

oder zu einer der einfachen reellen Jorden-Algebren:

VI) $Mat(r;\mathbb{R})$, *mit* $\mathrm{Rang}(Mat(r;\mathbb{R})) = r$;

VII) $\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}$, $q \geq 2$, *mit* $\mathrm{Rang}(\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}) = 2$;

VIII) $Alt(2r;\mathbb{R}) := \{x \in Mat(2r;\mathbb{R}) : \; x^T = -x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Alt(2r;\mathbb{R})) = r$;

IX) $Herm(3;\mathbb{O}') = \{x \in Mat(3;\mathbb{O}') : \; x^* = x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Herm(3;\mathbb{O}')) = 3$. *Hierbei ist $\mathbb{O}'$ eine nicht nullteilerfreie reelle Cayley-Algebra;*

X) $\mathbb{R}^m$, *mit* $\mathrm{Rang}(\mathbb{R}^m) = 2$;

XI) $Sym(r;\mathbb{H}) := \{x \in Mat(r;\mathbb{H}) : \; x^T = x\}$, *welche als reelle Unteralgebra von $Mat(2r;\mathbb{C})$ realisiert und durch die dortige Transposition bestimmt wird. Es gilt* $\dim(Sym(r;\mathbb{H})) = 2r^2 + r$ *und* $\mathrm{Rang}(Sym(r;\mathbb{H})) = r$;

XII) $Mat(r;\mathbb{H})$, *mit* $\mathrm{Rang}(Mat(r;\mathbb{H})) = r$,

oder zu einer der einfachen komplexen Jorden-Algebren:

XIII) $Sym(r;\mathbb{C}) := \{x \in Mat(r;\mathbb{C}) : \; x^T = x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Sym(r;\mathbb{C})) = r$;

XIV) $Mat(r;\mathbb{C})$, *mit* $\mathrm{Rang}(Mat(r;\mathbb{C})) = r$;

XV) $Alt(2r;\mathbb{C}) := \{x \in Mat(2r;\mathbb{C}) : \; x^T = -x\}$, *mit* $\mathrm{Rang}(Alt(2r;\mathbb{C})) = r$;

XVI) $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m'-1}$, *mit* $2m' = m$ *und* $\mathrm{Rang}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m'-1}) = 2$;

XVII) $Herm(3;\mathbb{O})^{\mathbb{C}} = Herm(3;\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C}$, *die Komplexifizierung der reellen Jordan-Algebra $Herm(3;\mathbb{O})$. Es gilt* $\mathrm{Rang}(Herm(3;\mathbb{O}) \otimes \mathbb{C}) = 3$.

Für spezielle Wahl von r können zueinander isomorphe Jordan-Algebren in verschiedenen der Fälle $I - XVII$ vorkommen.

Die Jordan-Algebren der Klassen XIII-XVII gehen durch Komplexifizierung aus den entsprechenden Algebren der Klassen I-V hervor, welche gerade die formalreellen Formen der entsprechenden komplexen Jordan-Algebren sind [FK, VIII.5]. Es gilt aber auch:

$$\begin{aligned}
Mat(r;\mathbb{R})^{\mathbb{C}} &\cong Mat(r;\mathbb{C}) \ , \\
Mat(r;\mathbb{H})^{\mathbb{C}} &\cong Mat(2r;\mathbb{C}) \ , \\
Sym(r;\mathbb{R})^{\mathbb{C}} &\cong Sym(r;\mathbb{C}) \ , \\
Alt(2r;\mathbb{R})^{\mathbb{C}} &\cong Alt(2r;\mathbb{C}) \ , \\
\left(\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}\right)^{\mathbb{C}} &\cong \mathbb{C}^m \ , \\
\left(\mathbb{R}^m\right)^{\mathbb{C}} &\cong \mathbb{C}^m \ , \\
Herm(3;\mathbb{O}')^{\mathbb{C}} &\cong Herm(3;\mathbb{O})^{\mathbb{C}} \ ,
\end{aligned}$$

was zeigt, daß nicht jede reelle Form einer komplexen Jordan-Algebra formalreell ist.

Die Jordan-Struktur der in Satz 1.3.3 genannten Matrizenalgebren wird durch das Antikommutatorprodukt 1.1.3 definiert. Dies gilt auch im Fall der Matrizenalgebren über den nicht assoziativen Algebren $\mathbb{O}$ und $\mathbb{O}'$. Bisher noch nicht erklärt wurden die folgenden Verknüpfungen:

Fall VII)

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}) \times (\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}) &\longrightarrow (\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}) \ ; \\
(x,y) &\longmapsto \left(x_1y_1 - \sum_{j=2}^{m} x_jy_j \ , \ x_1y' + y_1x'\right) \ ,
\end{aligned}$$

mit $x' = (x_2, \ldots, x_m), y' = (y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{q-1} \times i\mathbb{R}^{m-q}$.

Fall X)

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \ ; \\
(x,y) &\longmapsto \left(x_1y_1 - \sum_{j=2}^{m} x_jy_j \ , \ x_1y' + y_1x'\right) \ ,
\end{aligned}$$

mit $x' = (x_2, \ldots, x_m), y' = (y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Fall XVI)

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{m'} \times \mathbb{C}^{m'} &\longrightarrow \mathbb{C}^{m'} \ ; \\
(v,z) &\longmapsto \left(\sum_{j=1}^{m'} v_jz_j \ , \ v_1z' + z_1v'\right) \ ,
\end{aligned}$$

mit $v' = (v_2, \ldots, v_{m'}), z' = (z_2, \ldots, z_{m'}) \in \mathbb{C}^{m'-1}$.

Mit [BK, I.8.3] läßt sich jede halbeinfache Jordan-Algebra X - bis auf Reihenfolge - eindeutig als direkte Summe von einfachen Idealen in X darstellen. Deshalb genügt es, die folgenden Untersuchungen auf die einfachen Summanden von X einzuschränken.

Konvention 1.3.4 Von nun an sei X stets eine einfache Jordan-Algebra.

Kapitel 2

Nicht-konvexe Kegel

Die grundlegende und definierende Eigenschaft eines *Kegels* Λ in einem Vektorraum V ist

$$\text{(K1)} \qquad \mu \cdot x \in \Lambda \text{ für alle } \mu \in \mathbb{R}_+, x \in \Lambda\ .$$

Hierbei ist $\mathbb{R}_+$ der *offene* Kegel der positiven Zahlen in $\mathbb{R}$. Im Rahmen der in dieser Arbeit behandelten Problemstellungen wurden in der Literatur [FK, HN, MR, U6] bisher stets *konvexe* Kegel in formalreellen Jordan-Algebren betrachtet. Diese zeichnen sich durch die weitere Eigenschaft

$$\text{(K2)} \qquad x + y \in \Lambda \text{ für alle } x, y \in \Lambda$$

aus.

Eine Vielzahl der „üblichen" Beweise im Rahmen der Strukturtheorie für Hardy-Toeplitz C*-Algebren brechen ohne diese Konvexitätsbedingung zusammen. Trotzdem zeigt es sich, daß $(K2)$ nicht zwingend ist, um die angestrebten Resultate (vergleiche Theorem 7.2.14) beweisen zu können.

In dieser Arbeit wird die Eigenschaft $(K2)$ aufgegeben. Im folgenden Kapitel werden statt dessen spezielle nicht konvexe Kegel in einfachen Jordan-Algebren definiert. Diese schließen jedoch die in [K1] eingeführten und dort rein geometrisch betrachteten *Satellitenkegel* mit ein. Die offenen unter diesen Kegel werden als Zusammenhangskomponenten des regulären Bereiches von X identifiziert, und erste Aussagen über Anzahl und Struktur dieser Zerlegung bewiesen.

Im zweiten Abschnitt wird zunächst die charakteristische Signaturzahl p_s eingeführt. Als Hauptresultat des Kapitels wird gezeigt, daß p_s für fast alle regulären Elemente von x die Zugehörigkeit zu einem der offenen Kegel eindeutig festlegt.

Mit Hilfe der operierenden Gruppe K^σ können auch für nicht-konvexe Kegel die Begriffe Dualität und Symmetrie sinnvoll definiert werden. Dies geschieht im abschließenden dritten Abschnitt und es zeigt sich, daß alle hier behandelten Kegel symmetrisch sind; ein wichtiger Aspekt für eine mögliche geometrische Realisation der im dritten Kapitel definierten Hardy-Räume.

2.1 Kegelstruktur des regulären Bereiches

Definition 2.1.1

1. Ein *streng polyedrischer Kegel* in $\Theta \cong \mathbb{R}^r$ ist eine Menge $\Theta_> \subset \Theta$, für die endlich viele Vektoren $\theta_1, \ldots, \theta_l \in \Theta$ existieren, so daß

   (PK1) $\quad \Theta_> = \langle \theta_1, \ldots, \theta_l \rangle_{\mathbb{R}_+}$,

   (PK2) $\quad \Theta_> \cap (-\Theta_>) = \{\theta \in \Theta_> : \ -\theta \in \Theta_>\} = \emptyset$.

2. Die *Dimension* des Kegels $\Theta_>$ ist die Dimension des von $\Theta_>$ erzeugten reellen Untervektorraumes in Θ, also
$$\dim \Theta_> := \dim \Big(\Theta_> + (-\Theta_>) \Big) \ .$$

3. Ein streng polyedrischer Kegel $\Theta_> \subset \Theta \cong \mathbb{R}^r$ wird mit *Orthant* bezeichnet, falls es ein $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$ gibt, so daß
$$\Theta_> = \langle \varepsilon_1 e_1, \ldots, \varepsilon_r e_r \rangle_{\mathbb{R}_+} =: \Theta_\varepsilon \ .$$

Wegen (1.2.40) gilt für einen Orthanten
$$\Theta_\varepsilon = \langle \varepsilon_1 e_1, \ldots, \varepsilon_r e_r \rangle_{\mathbb{R}_+} = A \cdot (\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_r e_r) = A \cdot \vec{e_\varepsilon} \ ,$$
wobei $\vec{e_\varepsilon} := \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_r e_r$ für alle $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$. Außerdem ist klar, daß Orthanten immer offen in Θ sind.

Definition 2.1.2

1. Es sei $\Theta_>$ ein beliebiger streng polyedrischer Kegel in $\Theta \subset X$. Dann ist der *durch* $\Theta_>$ *erzeugte Kegel* $\Lambda_{\Theta_>} \subset X$ definiert als
$$\Lambda_{\Theta_>} := K^\sigma \cdot \Theta_> \ .$$

2. Ein beliebiger Kegel $\Lambda \subset X$ heißt *polyedrisch erzeugt*, falls es einen streng polyedrischen Kegel $\Theta_> \subset X$ gibt, so daß $\Lambda = K^\sigma \cdot \Theta_>$.

3. Es sei Θ_ε, $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$, ein Orthant. Dann heißt
$$\Lambda_{\Theta_\varepsilon} = K^\sigma \cdot \Theta_\varepsilon =: \Lambda_\varepsilon$$
ein *Orthantenkegel* in X.

Da die Operation von K^σ lokal surjektiv ist (Satz 1.2.35), ist $\Lambda_{\Theta_>}$ offen in X falls $\dim \Theta_> = r$. Die Kegel $\Lambda_{\Theta_>}$ werden im folgenden stets *nicht-konvex* genannt, obwohl sie nicht notwendigerweise nicht konvex sind.

Beispiel 2.1.3 Für $Sym(r;\mathbb{R})$ ergeben sich im Fall $r = 2$ die in $\Theta = \mathbb{R}^r$ offenen Orthanten

$$\begin{aligned}
\Theta_{++} &:= \mathbb{R}_+ \cdot e_1 + \mathbb{R}_+ \cdot e_2 \ , \\
\Theta_{-+} &:= \mathbb{R}_+ \cdot (-e_1) + \mathbb{R}_+ \cdot e_2 \ , \\
\Theta_{+-} &:= \mathbb{R}_+ \cdot e_1 + \mathbb{R}_+ \cdot (-e_2) \ , \\
\Theta_{--} &:= \mathbb{R}_+ \cdot (-e_1) + \mathbb{R}_+ \cdot (-e_2) \ ,
\end{aligned}$$

welche in Abbildung 2.1.4 dargestellt werden.

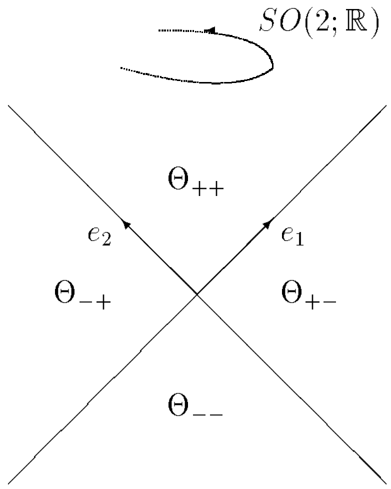

Abbildung 2.1.4: Orthanten in $\Theta \subset Sym(2;\mathbb{R})$ und Wirkung von $SO(2;\mathbb{R})$.

Mit der Wirkung von $K^\sigma = SO(2;\mathbb{R})$ als Drehgruppe um die vertikale Achse $\mathbb{R} \cdot (e_1 + e_2)$ ergeben sich

$$\begin{aligned}
\Lambda_{++} &:= \{x \in Sym(2;\mathbb{R}) : \ x \text{ ist positiv definit}\} \ , \\
\Lambda_{+-} = \Lambda_{-+} &:= \{x \in Sym(2;\mathbb{R}) : \ x \text{ ist indefinit}\} \ , \\
\Lambda_{--} &:= \{x \in Sym(2;\mathbb{R}) : \ x \text{ ist negativ definit}\}
\end{aligned}$$

als offene Orthantenkegel in $Sym(r;\mathbb{R})$. Da

$$k_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO(2;\mathbb{R})$$

gilt mit Beispiel 1.2.5

$$k_1(e_1 - e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die beiden Orthanten Θ_{+-} und Θ_{-+} erzeugen denselben Orthantenkegel Λ_{+-} (vergleiche Abbildung 2.1.5).

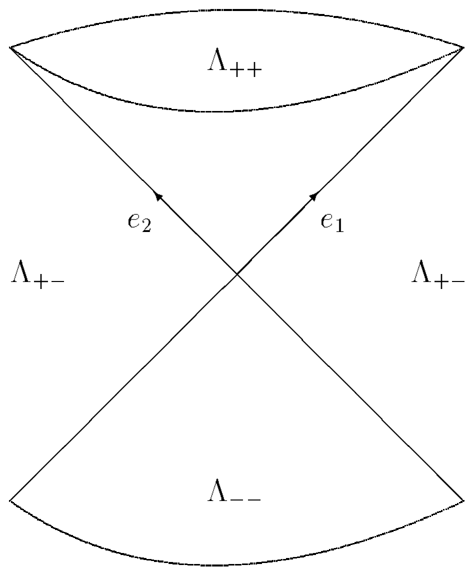

Abbildung 2.1.5: Orthantenkegel in $Sym(2;\mathbb{R})$.

Λ_{++} und Λ_{--} sind konvex und werden *Vorwärts-* und *Rückwärtslichtkegel* genannt. Dem gegenüber ist Λ_{+-} ein nicht konvexer Kegel. Es fällt auf, daß es genau $3 = r+1$ verschiedene Orthantenkegel gibt, die eine Zerlegung

$$Sym(2;\mathbb{R})_{reg} = \Lambda_{++} \,\dot{\cup}\, \Lambda_{+-} \,\dot{\cup}\, \Lambda_{--}$$

definieren. Der Spektralsatz für reelle symmetrische $(r \times r)$-Matrizen zeigt, daß für alle $r \in \mathbb{N}$

$$Sym(r;\mathbb{R})_{reg} = \Lambda_1' \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Lambda_r' \tag{2.1.6}$$

gilt, wobei

$$\Lambda_p{}' := \{x \in Sym(r;\mathbb{R}) : \ x \text{ hat genau } p \text{ negative Eigenwerte}\} \ . \tag{2.1.7}$$

Beispiel 2.1.8 Für $Mat(2;\mathbb{R})$ ergeben sich die gleichen Orthanten wie für $Sym(2;\mathbb{R})$ in Beispiel 2.1.3. Allerdings beinhaltet die größere Gruppe

$$K^\sigma = SO(2;\mathbb{R}) \times SO(2;\mathbb{R}) \supset Aut\Big(Mat(2;\mathbb{R})_+\Big)^0 = Aut\Big(Sym(2;\mathbb{R})\Big)^0$$

auch die Spiegelung $k_0 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ an der horizontalen Achse $\mathbb{R} \cdot (e_1 - e_2)$. Damit kann insbesondere analog (1.2.48) $e_1 + e_2$ mittels k_0 auf $(-e_1 - e_2)$ abgebildet werden:

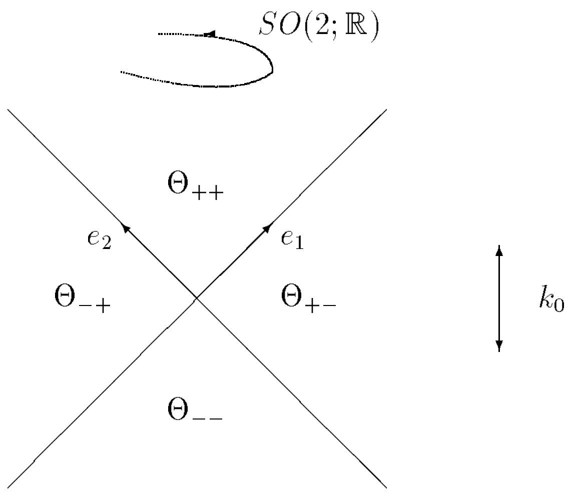

Abbildung 2.1.9: Wirkung von k_0 auf die Orthanten in $\Theta \subset Mat(2;\mathbb{R})$.

So ergeben sich nur zwei offene Orthantenkegel

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &:= \{x \in Mat(2;\mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) > 0\} \ , \\ \Lambda_- &:= \{x \in Mat(2;\mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) < 0\} \ , \end{aligned}$$

die beide nicht konvex sind. Für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ gibt es immer nur zwei Orthantenkegel

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &:= \{x \in Mat(r;\mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) > 0\} \ , \\ \Lambda_- &:= \{x \in Mat(r;\mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) < 0\} \end{aligned}$$

in $Mat(r;\mathbb{R})$, die analog (2.1.6) eine Zerlegung

$$Mat(r;\mathbb{R})_{reg} = \Lambda_+ \,\dot{\cup}\, \Lambda_- \tag{2.1.10}$$

definieren.

Im letzten Beispiel fällt zunächst auf, daß $Sym(r;\mathbb{R})_{reg}$ in konvexe und in nicht konvexe Kegel zerfällt. Für spätere Anwendungen (vergleiche Abschnitt 3.2) ist es wichtig, den von Gindikin in [G2] eingeführten *Konkavitätsgrad* d eines Kegels genau zu kennen.

Definition 2.1.11 Der *Konvexitätsgrad* $(m-d)$ von Λ_ε ist die maximale Dimension aller linearen Unterräume V von X, so daß eine der Zusammenhangskomponenten von $V \cap \Lambda_\varepsilon$ ein streng konvexer und in V offener Kegel ist. d heißt dann der *Konkavitätsgrad* von Λ_ε.

Das Idempotent $\vec{e_\varepsilon} \in \Lambda_\varepsilon$ definiert gemäß [BK, IV.(4.4)] eine *Mutation* $X_{\vec{e_\varepsilon}}$ von X mit Jordan-Algebraprodukt

$$x \diamond_{\vec{e_\varepsilon}} y := x \diamond (y \diamond \vec{e_\varepsilon}) + y \diamond (x \diamond \vec{e_\varepsilon}) - (x \diamond y) \diamond \vec{e_\varepsilon}$$

für alle $x, y \in X$. In $X_{\vec{e_\varepsilon}}$ ist $\vec{e_\varepsilon}$ das Einselement. Für die quadratische Darstellung $P_{\vec{e_\varepsilon}}$ von $X_{\vec{e_\varepsilon}}$ gilt [BK, Satz IV.4.2]

$$P_{\vec{e_\varepsilon}}(x) = P(x)\, P(\vec{e_\varepsilon})$$

für alle $x \in X$ und die Mutation $X_{\vec{e_\varepsilon}}$ erweist sich als Modifikation von X bezüglich $\alpha = P(\vec{e_\varepsilon})$ [H4, Satz 2.1]. Da die regulären Elemente einer Jordan-Algebra gerade diejenigen sind, deren quadratische Darstellung invertierbar ist [FK, Corollary II.3.2], folgt

$$X_{reg} = (X_{\vec{e_\varepsilon}})_{reg} \ .$$

Damit besteht $(X_{\vec{e_\varepsilon}})_{reg}$ aus denselben Zusammenhangskomponenten wie X_{reg}. Mit [H4, Satz 5.2] existiert auch für $X_{\vec{e_\varepsilon}}$ eine Involution $\alpha_{\vec{e_\varepsilon}}$, so daß die Modifikation $(X_{\vec{e_\varepsilon}})_{\alpha_{\vec{e_\varepsilon}}}$ formalreell ist und $\alpha_{\vec{e_\varepsilon}}(\vec{e_\varepsilon}) = \vec{e_\varepsilon}$ gilt.

Sei nun

$$X_{\vec{e_\varepsilon}} = (X_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \oplus (X_{\vec{e_\varepsilon}})_-$$

die durch $\alpha_{\vec{e_\varepsilon}}$ bestimmte Eigenraumzerlegung von $X_{\vec{e_\varepsilon}}$.

Lemma 2.1.12 *Für den Konkavitätsgrad von Λ_ε gilt:*

$$d = \dim(X_{\vec{e_\varepsilon}})_- \ .$$

Beweis: Da $\vec{e_\varepsilon}$ das Einselement in $(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ ist, definiert gemäß [FK, Kapitel III] die formalreelle Jordan-Algebra $(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ einen streng konvexen zusammenhängenden Kegel $(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ in $(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ mit $\dim(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+ = \dim(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ und $\vec{e_\varepsilon} \in (\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+$. Weil $(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ zusammenhängend ist folgt zunächst $(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \subset \Lambda_\varepsilon$ und dann $(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \subset \Lambda_\varepsilon \cap (X_{\vec{e_\varepsilon}})_+$. Die Definition $V := (X_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ impliziert nun

$$m - d \geq \dim(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \ . \tag{2.1.13}$$

Umgekehrt definiert jeder streng konvexe Kegel $(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \subset \Lambda_\varepsilon$ mit $\dim(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+ = m - d'$ eine formalreelle Jordan-Unteralgebra $X_{(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+} \subset X_{\vec{e_\varepsilon}}$ mit $\dim(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+ = \dim X_{(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+}$. Es folgt

$$\dim(\Lambda_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \leq \dim(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \ , \tag{2.1.14}$$

weil $\dim(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+$ die maximale Dimension aller formalreelen Jordan-Unteralgebren von $X_{\vec{e_\varepsilon}}$ ist. Da die Ungleichung (2.1.14) für alle streng konvexen Kegel in Λ_ε gilt, folgt

$$m - d \leq \dim(X_{\vec{e_\varepsilon}})_+ \ ,$$

was zusammen mit (2.1.13) die Behauptung zeigt. □

Beispiel 2.1.15 Für $\Lambda_+ \subset Mat(r;\mathbb{R})$ ergibt sich für $\vec{e_\varepsilon} := e$ die triviale Mutation $Mat(r;\mathbb{R})_e = Mat(r;\mathbb{R})$ und mit Beispiel 1.2.10 ist

$$Mat(r;\mathbb{R})_+ = Sym(r;\mathbb{R}) \ .$$

Somit ist mit Lemma 2.1.12 der Kegel Λ_+ konvex mit Grad $m - d = \dim Sym(r;\mathbb{R}) = \frac{1}{2}r(r+1)$ und konkav mit Grad

$$d = r^2 - \frac{1}{2}r(r+1) = \frac{1}{2}r(r-1) \ ,$$

was genau der Dimension von $SO(r;\mathbb{R})$ entspricht (vergleiche Beispiel 1.2.25). Der maximale Unterraum V von $Mat(r;\mathbb{R})$, welcher die im Beweis von Lemma 2.1.12 gestellten Bedingungen erfüllt, ist gerade $Sym(r;\mathbb{R})$, und

$$Sym(r;\mathbb{R}) \cap \Lambda_+ = \sum_{2p \leq r} \Lambda'_{2p} \ ,$$

wobei Λ'_{2p} der Kegel mit Index $2p$ in $Sym(r;\mathbb{R})$ ist (vergleiche 2.1.7). Λ'_0 ist eine Zusammenhangskomponente von $Sym(r;\mathbb{R}) \cap \Lambda_+$, die gleichzeitig ein offener und streng konvexer Kegel in $V = Sym(r;\mathbb{R})$ ist.

Beispiel 2.1.16 Für ${\Lambda_p}' \subset Sym(r;\mathbb{R})$ ist

$$V = \begin{pmatrix} Sym(p;\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & Sym(r-p;\mathbb{R}) \end{pmatrix} \subset Sym(r;\mathbb{R})$$

ein maximaler linearer Unterraum, dessen Schnitt mit ${\Lambda_p}'$ ein streng konvexer offener Kegel in V ist. Es gilt:

$$V \cap {\Lambda_p}' = \begin{cases} \sum_{j=0}^{p} \Lambda''_{p-j} \times \Lambda'''_j \ , & \text{falls } p \leq r-p \ , \\ \sum_{j=0}^{r-p} \Lambda''_{p-j} \times \Lambda'''_j \ , & \text{falls } p > r-p \ , \end{cases}$$

wobei Λ''_j, beziehungsweise Λ'''_j der Kegel mit Index j in $Sym(p;\mathbb{R})$, beziehungsweise in $Sym(r-p;\mathbb{R})$ ist. In beiden Fällen ist der streng konvexe und in V offene Kegel

$$\begin{pmatrix} {\Lambda_p}'' & 0 \\ 0 & \Lambda'''_0 \end{pmatrix} \subset V$$

eine Zusammenhangskomponente von $V \cap {\Lambda_p}'$. Der Konvexitätsgrad von ${\Lambda_p}'$ ist demnach $\frac{1}{2}p\,(p+1) + \frac{1}{2}(r-p)\,(r-p+1) = \frac{1}{2}r\,(r+1) - (r-p)\,p$ und der Konkavitätsgrad

$$d = (r-p)p = \dim Mat(p, r-p;\mathbb{R}) \ .$$

Im Fall $p \in \{0, r\}$ ergibt sich übereinstimmend mit der Konvexität von ${\Lambda_p}'$ der Konkavitätsgrad $d = 0$.

Die im Beispiel 2.1.8 beobachtete Unabhängigkeit der Anzahl der Orthantenkegel in nicht formalreellen Jordan-Algebren wird sich als ein wesentlicher Unterschied zu der mit dem Rang r wachsenden Anzahl von Orthantenkegeln in den formalreellen (vergleiche Beispiel 2.1.3) herausstellen. Die folgenden Untersuchungen führen zunächst zu einer Verallgemeinerung der Zerlegungseigenschaft (2.1.10) beziehungsweise (2.1.6). Im Abschnitt 2.2 wird darauf aufbauend eine Charakterisierung aller Orthantenkegel in X bewiesen, die grundlegend für die Konstruktion und Berechnung der Darstellungen im Abschnitt 4.2 ist.

Präposition 2.1.17 *Es seien $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}^r$ mit gleicher Anzahl negativer Einträge. Dann gilt:*

$$\Lambda_\varepsilon = \Lambda_{\varepsilon'} \ .$$

Beweis: Wie in Abschnitt 1.2 gezeigt wurde, sind die Vertauschungen w_{ij}, mit $1 \leq i, j \leq r$, enthalten in K^σ. Für

$$\varepsilon'' := (\varepsilon_1, \ldots, \underbrace{\varepsilon_j}_{i-te\ Stelle}, \ldots, \underbrace{\varepsilon_i}_{j-te\ Stelle}, \ldots, \varepsilon_r)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\Lambda_\varepsilon &= K^\sigma \cdot A \cdot (\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_r e_r) \\
&= K^\sigma \cdot A \cdot w_{ij} (\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_r e_r) \\
&= K^\sigma \cdot A \cdot (\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \underbrace{\varepsilon_j e_j}_{i-te\ Stelle} + \ldots + \underbrace{\varepsilon_i e_i}_{j-te\ Stelle} + \ldots + \varepsilon_r e_r) \\
&= \Lambda_{\varepsilon''}
\end{aligned}$$

und durch Kombination geeigneter Vertauschungen schließlich die Behauptung. □

Definition 2.1.18 Für $p \in \{0, \ldots, r\}$ seien speziell definiert durch

$$\vec{e_{rp}} := -e_1 - \ldots - e_p + e_{p+1} + \ldots + e_r \ ,$$

der *p-Orthant*

$$\Theta_{rp} := A \cdot \vec{e_{rp}}$$

und der *p-Orthantenkegel*

$$\Lambda_p := K^\sigma \cdot \Theta_{rp} \ .$$

Korollar 2.1.19 *Für jeden Orthantenkegel $\Lambda_\varepsilon \subset X_{reg}$ mit $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$ gibt es ein $p \in \{0, \ldots, r\}$, so daß $\Lambda_p = \Lambda_\varepsilon$. Insbesondere zerfällt X_{reg} in höchstens $r+1$ verschiedene Orthantenkegel.*

Beweis: Präposition 2.1.17 zeigt, daß

$$\Big\{\Lambda_\varepsilon : \ \varepsilon \in \{\pm 1\}^r\Big\} = \Big\{\Lambda_p ; p \in \{0, \ldots, r\}\Big\}$$

und die Behauptung folgt. □

Für einen beliebigen offenen Kegel $\Lambda \subset X$ ist die *Kegelautomorphismengruppe* $\Gamma(\Lambda)$ von Λ als Untergruppe von $GL(X)$ definiert durch:

$$\Gamma(\Lambda) := \{\gamma \in GL(X) : \ \gamma\Lambda = \Lambda\} \ .$$

Da für $\gamma \in GL(X)$ die Bedingung $\gamma\Lambda = \Lambda$ äquivalent ist zu $\gamma\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}$, ist $\Gamma(\Lambda)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(X)$ und damit eine Lie-Gruppe. Der Kegel Λ heißt *homogen*, falls $\Gamma(\Lambda)$ transitiv auf Λ operiert, also falls für alle $x \in \Lambda$:

$$\Gamma(\Lambda) \cdot x = \Lambda.$$

Satz 2.1.20 *Die Zusammenhangskomponenten von X_{reg} sind homogene Orthantenkegel in X und es existiert eine Menge $R'_c \subset \{0, \ldots, r\}$, so daß*

$$X_{reg} = \sum_{p \in R'_c} \Lambda_p \ .$$

Beweis: Satz 1.2.35 besagt, daß $X = K^\sigma \cdot \Theta$. Da $K^\sigma \cdot X_{reg} \subset X_{reg}$, folgt

$$K^\sigma \cdot \Theta_{reg} = X_{reg} \ ,$$

wobei $\Theta_{reg} := \{\theta \in \Theta : \ \det(\theta) \neq 0\}$. Wegen

$$\Theta_{reg} = \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^r} A \cdot (\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_r e_r) \ ,$$

folgt zunächst $X_{reg} = \bigcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^r} \Lambda_\varepsilon$ und dann mit Korollar 2.1.19

$$X_{reg} = \bigcup_{p=0}^{r} \Lambda_p \ . \tag{2.1.21}$$

Da wegen Satz 1.2.35 für jedes $p \in \{0, \ldots, r\}$ der Orthantenkegel Λ_p eine offene und zusammenhängende Menge in X_{reg} ist, muß er wegen (2.1.21) einer Zusammenhangskomponente von X_{reg} entsprechen. Deshalb gibt es eine Teilmenge $R'_c \in \{0, \ldots, r\}$, so daß

$$X_{reg} = \sum_{p \in R'_c} \Lambda_p \ ,$$

und jede Zusammenhangskomponente von X_{reg} ist ein Orthantenkegel. Da G zusammenhängend ist und $K^\sigma \cdot A \subset G$, folgt mit den gleichen Argumenten, daß $G \cdot \vec{e_{rp}}$ eine Zusammenhangskomponente von X_{reg} ist, und es gilt

$$\Lambda_p = G \cdot \vec{e_{rp}}$$

für alle $p \in \{0, \ldots, r\}$. Also operiert G transitiv auf Λ_p und es folgt für alle $\gamma \in G$:

$$\gamma \Lambda_p = \gamma G \cdot \vec{e_{rp}} = G \cdot \vec{e_{rp}} = \Lambda_p \ .$$

Damit ist $G \subset \Gamma(\Lambda_p)$ und Λ_p für alle $p \in \{0, \ldots, r\}$ ein homogener Kegel. □

Setzt man

$$G_{\vec{e_{rp}}} := \{\gamma \in G : \ \gamma \vec{e_{rp}} = \vec{e_{rp}}\},$$

so erhält man für alle $p \in \{0, \ldots, r\}$ die Darstellung

$$\Lambda_p = G / G_{\vec{e_{rp}}}$$

von Λ_p als homogenen Kegel. Die sich auf diese Weise ergebenden Darstellungen werden im Klassifikationssatz 2.2.9 mit aufgeführt.

Bemerkung 2.1.22 Da R_c' eine echte Teilmenge in $\{0,\dots,r\}$ sein kann, ist die Wahl von R_c' in Satz 2.1.20 zunächst nicht eindeutig. Da

$$p, p' \in \{0,\dots,r\}: \ p \sim p' :\Longleftrightarrow \Lambda_p = \Lambda_{p'} ,$$

eine Äquivalenzrelation auf $\{0,\dots,r\}$ definiert, existiert ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen in $\{0,\dots,r\}$, welches durch die Bedingung

$$p, p' \in \{0,\dots,r\}, \ p \sim p', p < p' \Longrightarrow p' \notin R_c \tag{2.1.23}$$

eindeutig bestimmt ist.

Definition 2.1.24

1. Die durch die Bedingung (2.1.23) eindeutig bestimmte Teilmenge in $\{0,\dots,r\}$ sei mit R_c bezeichnet.
2. Die Kardinalität r_c von R_c heißt die *Kegelzahl* von X.

2.2 Signaturen und Klassifikation

Für alle $l = 0,\dots,r$ ist

$$\vec{e_l} := e_1 + \dots + e_l$$

ein idempotentes Element von X. Die Projektionen

$$P_{1,\vec{e_l}}: \ X \longrightarrow P_{1,\vec{e_l}}(X) := \sum_{1\le i\le j\le l} X_{ij}$$

auf die zugehörigen *Peirce-1-Räume* (1.1.12) sind wohldefiniert [BK, IV.5.4]. Jeder dieser Peirce-1-Räume $P_{1,\vec{e_l}}(X) =: X_l$ ist wieder eine einfache Jordan-Algebra [BK, Satz VIII.3.5] mit *Jordan-Determinante* $\det_l$.

Definition 2.2.1 Ein Element $x \in X$ heißt *streng regulär*, falls

$$x_l := P_{1,\vec{e_l}}(x) \in \Big(P_{1,\vec{e_l}}(X)\Big)_{reg} = (X_l)_{reg}$$

für alle $l = 1,\dots,r$. Die Menge aller streng regulären Elemente von X wird mit X_{sreg} bezeichnet.

Wegen (1.1.16) gilt:

$$X_{sreg} = \bigcap_{l=1}^{r} \{x \in X : \ \det_l(x) \neq 0\} \ .$$

Dies zeigt, daß X_{sreg} eine offene und dichte Menge in X bildet.

Definition 2.2.2 Für $x \in X_{sreg}$ sei

$$\vec{\operatorname{sign}}(x) := \left(\operatorname{sign}\left(\frac{\det_1(x_1)}{1}\right), \operatorname{sign}\left(\frac{\det_2(x_2)}{\det_1(x_1)}\right), \ldots, \operatorname{sign}\left(\frac{\det_r(x_r)}{\det_{r-1}(x_{r-1})}\right)\right) \in \{\pm 1\}^r \ ,$$

die *Signatur* von x. Dabei ist die Signumfunktion *sign* auf $\mathbb{R}$ wie üblich definiert als

$$\operatorname{sign}(t) := \begin{cases} +1 \ , & \text{falls } t > 0 \ , \\ 0 \ , & \text{falls } t = 0 \ , \\ -1 \ , & \text{falls } t < 0 \ . \end{cases}$$

Für jedes $x \in X_{sreg}$ läßt sich $\vec{\operatorname{sign}}(x)$ mittels der Abbildung

$$\vec{\operatorname{sign}}(x) \longmapsto \sum_{j=1}^{r} \operatorname{sign}(x)_j \cdot e_j$$

einbetten in Θ. Hierbei bezeichnet $\operatorname{sign}(x)_j$ die j-te Komponente der Signatur. Die Operation der Diagonalgruppe $W(\Theta)$ erzeugt die *Signaturenmenge* $\mathcal{E}_x$ von x mit

$$\mathcal{E}_x := \left\{ w \, \vec{\operatorname{sign}}(x) : \ w \in W(\Theta) \right\} \ .$$

Definition 2.2.3 Für $x \in X_{sreg}$ sei die *charakteristische Signaturzahl* $p_s(x)$ die minimale Anzahl negativer Einträge aller Signaturen aus $\mathcal{E}_x$.

Korollar 2.2.4 *Für $p \in R_c$ gilt*

$$p_s(\vec{e_{rp}}) = p \ .$$

Beweis: Sei $p \in R_c$ und

$$\varepsilon := (\underbrace{-1, \ldots, -1}_{p \ mal}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{(r-p) \ mal}) \ .$$

Dann gilt

$$\det_l(\vec{e_{rp}}) = \prod_{j=1}^{l} \varepsilon_j$$

für alle $l = 1, \ldots, r$ und damit $\vec{\operatorname{sign}}(\vec{e_{rp}}) = \varepsilon$. Angenommen, es gibt ein $w \in W(\Theta)$, so daß $w(\varepsilon)$ genau p' negative Einträge besitzt mit $p' < p$. In Abschnitt 1.2 wurde gezeigt, daß $W(\Theta)$ alle Permutationen des Jordan-Rahmens $\{e_1, \ldots, e_r\}$ enthält. Also gibt es ein $w' \in M(M_\Theta) \subset K^\sigma$, so daß

$$w'(\varepsilon) = \vec{e_{rp'}} \ .$$

Es folgt

$$\Lambda_{p'} = K^\sigma \cdot A \cdot \vec{e_{rp'}} = K^\sigma \cdot A \cdot \vec{e_{rp}} = \Lambda_p \ ,$$

was der Minimalitätsbedingung (2.1.23) an $p \in R_c$ widerspricht. Damit erweist sich die Annahme als falsch und es folgt $p_s(\vec{e_{rp}}) = p$. □

Die charakteristische Signaturzahl charakterisiert tatsächlich die Kegelzugehörigkeit der streng regulären Elemente aus X. Dies zeigt der folgende

Satz 2.2.5 *Es sei X einfach, $x \in X_{sreg}$ ein beliebiges streng reguläres Element aus X und $p \in R_c$. Dann gilt $x \in \Lambda_p$ genau dann, wenn*

$$p_s(x) = p_s(\vec{e_{rp}}) = p. \tag{2.2.6}$$

Insbesondere gilt:

1. *Für formalreelles X ist $R_c = \{0, \ldots, r\}$ und x genau dann ein Element von Λ_p, wenn $\vec{\operatorname{sign}}(x)$ exakt p negative Einträge enthält.*

2. *Ist X eine einfache Jordan-Algebra über $\mathbb{C}$, die gemäß Konvention 1.1.21 als reelle Jordan-Algebra aufgefaßt wird, dann ist $R_c = \{0\}$ und $p_s(x) = 0$.*

Beweis: Aufgrund [S2, Proposition 2] gibt es ein $a \in A$, $n \in N$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$ geeignet, so daß

$$x = a\, n\, \vec{e_\varepsilon} \ .$$

Durch die Operation von A und der Gruppe der Unipotenten N auf $\vec{e_\varepsilon}$ kann keine der Jordan-Unterdeterminanten $\det_1, \ldots, \det_r$ trivial werden. Deshalb bleiben für alle $a \in A$, $n \in N$ die Vorzeichen von $\det_1(a\, n\, \vec{e_\varepsilon}), \ldots, \det_r(a\, n\, \vec{e_\varepsilon})$ unverändert und es folgt

$$\vec{\operatorname{sign}}(x) = \vec{\operatorname{sign}}(\vec{e_\varepsilon}) \ . \tag{2.2.7}$$

Da $x \in \Lambda_p$, gibt es ein geeignetes $k \in K^\sigma$, so daß

$$a\, n\, \vec{e_\varepsilon} = k\, \vec{e_{rp}} \ .$$

Damit ist $\vec{e_\varepsilon} = n^{-1}\, a^{-1}\, k\, \vec{e_{rp}}$ ein Element von Λ_p und es existieren $k' \in K^\sigma,\ a' \in A$ mit
$$k'\, a'\, \vec{e_\varepsilon} = \vec{e_{rp}}\ .$$
Wegen der Primitivität der Idempotenten $e_1, \ldots, e_r$ gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ ein $l_i \in \{1, \ldots, r\}$, so daß
$$k'\, a'\, \{\pm e_i\} = \{\pm e_{l_i}\}\ . \tag{2.2.8}$$
Da a' auf Θ wie eine Diagonalmatrix mit Hauptdiagonaleinträgen $a'_1, \ldots, a'_r \in \mathbb{R}_+$ wirkt (vergleiche 1.2.40), gilt
$$k'\, a'\, \{\pm e_i\} = a'_i\, k'\{\pm e_i\}$$
und mit den Gleichungen (2.2.8) und (1.2.40) folgt $a'_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, r$, weil K^σ die Bilinearform λ_α invariant läßt. Damit ist $k'\{\pm e_i\} = \{\pm e_{l_i}\}$ und k' erweist sich als ein Element der Diagonalgruppe $W(\Theta)$. Weiter folgt aus $k'\, \vec{e_\varepsilon} = \vec{e_{rp}}$ und (2.2.7), daß $k'\, \vec{\operatorname{sign}}(x) = \vec{\operatorname{sign}}(\vec{e_{rp}})$ und damit
$$p_s(x) = p_s(\vec{e_{rp}})\ .$$
Mit Korollar 2.2.4 ist $p_s(\vec{e_{rp}})$ gerade gleich p. Da $X_{reg} = \sum_{p \in R_c} \Lambda_p$ und $p \in R_c$ beliebig war, ist damit die Behauptung bewiesen.

Beweis der Zusätze:
1. Sei zunächst X formalreell und für $p \in \{0, \ldots, r\}$ sei
$$\mathcal{E}_p := \Big\{\varepsilon \in \{\pm 1\}^r :\ |\{1 \le j \le r :\ \varepsilon_j = -1\}| = p\Big\}\ ,$$
wobei der Betrag einer endlichen Menge die Anzahl ihrer Elemente ist. Für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathcal{E}_p$ betrachte man den Orbit (1.2.50)
$$\Omega_\varepsilon := A \cdot N \cdot \vec{e_\varepsilon}$$
von $\vec{e_\varepsilon}$ unter der zusammenhängenden Gruppe $A \cdot N$. Analog oben ist $\vec{\operatorname{sign}}$ auf Ω_ε konstant. Mit [FS, Lemma 1] bildet $\bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p} \Omega_\varepsilon$ eine in der Zariski-Topologie offene Menge in $\Lambda_p = K^\sigma \cdot \vec{e_p}$ und so gilt zunächst wieder
$$p_s(x) = p \text{ für alle } x \in \left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p} \Omega_\varepsilon\right) \cap X_{sreg} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p} \Omega_\varepsilon\ ,$$
was das behauptete Kriterium (2.2.6) noch einmal beweist. [FS, Lemma 1] besagt jedoch darüber hinaus, daß $\Omega_\varepsilon \cap \Omega_{\varepsilon'} = \emptyset$ für alle $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}^r$ mit $\varepsilon \neq \varepsilon'$. Deshalb gilt
$$\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}_p} \Omega_\varepsilon\right) \cap \left(\bigcup_{\varepsilon' \in \mathcal{E}_{p'}} \Omega_{\varepsilon'}\right) = \emptyset\ ,$$

also auch $\Lambda_p \cap \Lambda_{p'} = \emptyset$ für alle $p \neq p'$, $p, p' \in \{0, \ldots, r\}$ und es folgt $R_c = \{0, \ldots, r\}$. Insbesondere ist damit auch die Anzahl der negativen Einträge für alle Signaturen aus der Signaturenmenge von x konstant und gleich $p_s(x)$.

2. Ist X eine einfache komplexe Jordan-Algebra, dann besagt [S2, Proposition 5], daß $X_{sreg} = G \cdot e$ aus nur einer einzigen Zusammenhangskomponente besteht. Da der reguläre Bereich unabhängig davon ist, ob X als reelle oder als komplexe Jordan-Algebra aufgefaßt wird (1.1.19), besteht auch der reguläre Bereich der reellen Jordan-Algebra X aus einer einzigen Zusammenhangskomponente. Damit ist $\Lambda_p = \Lambda_0$ für alle $p \in \{0, \ldots, r\}$ und der zweite Zusatz folgt direkt. □

Wegen Satz 2.2.5 gilt für alle $p, p' \in \{0, \ldots, r\}$:

$$\Lambda_p = \Lambda_{p'} \Longleftrightarrow p_s(\vec{e_{rp}}) = p_s(\vec{e_{rp'}}) \ .$$

Außerdem zeigt der Satz, daß formalreelle und komplexe Jordan-Algebren als Extremfälle der Minimumsbildung zur Berechnung von p_s auf X_{sreg} aufgefaßt werden können. Im Fall des ersten Zusatzes ist die Minimumsbildung trivial, weil alle Elemente der Signaturenmenge die gleiche Anzahl negativer Einträge besitzen.

Im zweiten Fall ist sie „gegenteilig“ trivial, denn die Gruppe $W(\Theta)$ ist so groß, daß p_s auf ganz X_{sreg} den kleinsten möglichen Wert null annimmt. Dadurch findet eine Trennung der streng regulären Elemente aus X nicht mehr statt.

Aufgrund Beispiel 2.1.8 ist klar, daß für reelle nicht formalreelle Jordan-Algebren die Situation „irgendwo zwischen“ dem formalreellen und komplexen Fall liegen muß. Denn zumindest in diesem Beispiel ist R_c eine echte Teilmenge von $\{0, \ldots, r\}$, die nicht nur aus einem Element besteht. Dies bedeutet, daß für einige Paare $p \neq p'$ auch $\Lambda_p \neq \Lambda_{p'}$ gilt, für andere Paare wiederum nicht.

Die Funktion $p_s : X_{sreg} \longrightarrow \{0, \ldots, r\}$ beschreibt jedoch alle diese Fälle korrekt und charakterisiert damit eindeutig die Kegelzugehörigkeit der streng regulären Elemente aus X.

Die Gesamtsituation - insbesondere für die reellen einfachen Jordan-Algebren - wird durch das folgende Zitat [K2] der expliziten Formen der Zusammenhangskomponenten von X_{reg} geklärt.

Satz 2.2.9 *Für die Zusammenhangskomponenten des regulären Bereiches X_{reg} von X ergibt sich in den Fällen I-XVII:*

I)

$$\begin{aligned} Sym(r;\mathbb{R})_{reg} &= \{x \in Sym(r;\mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) \neq 0\} \\ &= \Lambda_0 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, \Lambda_r \ , \end{aligned}$$

wobei $\Lambda_p = \{x \in Sym(r;\mathbb{R}) :\ x$ *hat genau* p *negative Eigenwerte*$\}$ *für* $p \in \{0,\dots,r\}$*. Bis auf* Λ_0 *und* Λ_r *sind alle Kegel nicht konvex und es gilt die Darstellung*

$$\Lambda_p = GL(r;\mathbb{R})^0/SO(r-p,p;\mathbb{R}),\ p \in \{0,\dots,r\}\ .$$

II)

$$\begin{aligned} Herm(r;\mathbb{C})_{reg} &= \{x \in Herm(r;\mathbb{C}) :\ \mathrm{Det}(x) \neq 0\} \\ &= \Lambda_0 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, \Lambda_r\ , \end{aligned}$$

wobei $\Lambda_p = \{x \in Herm(r;\mathbb{C}) :\ x$ *hat genau* p *negative Eigenwerte*$\}$ *für* $p \in \{0,\dots,r\}$*. Bis auf* Λ_0 *und* Λ_r *sind alle Kegel nicht konvex und es gilt die Darstellung*

$$\Lambda_p = GL(r;\mathbb{C})/U(r-p,p;\mathbb{C}),\ p \in \{0,\dots,r\}\ .$$

III)

$$\begin{aligned} Herm(r;\mathbb{H})_{reg} &= \{x \in Herm(r;\mathbb{H}) :\ \det(x) \neq 0\} \\ &= \Lambda_0 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, \Lambda_r\ , \end{aligned}$$

wobei $\Lambda_p = \{x \in Herm(r;\mathbb{H}) :\ x$ *hat genau* p *negative Eigenwerte*$\}$ *für* $p \in \{0,\dots,r\}$*. Bis auf* Λ_0 *und* Λ_r *sind alle Kegel nicht konvex und es gilt die Darstellung*

$$\Lambda_p = GL(r;\mathbb{H})/Sp(r-p,p),\ p \in \{0,\dots,r\}\ .$$

IV)

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{R}\times i\mathbb{R}^{m-1}\right)_{reg} &= \left\{x \in \mathbb{R}\times i\mathbb{R}^{m-1} :\ \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}\times i\mathbb{R}^{m-1} :\ \sum_{j=1}^{m} x_j^2 > 0,\ x_1 > 0\right\} \\ &\quad\ \dot\cup \left\{x \in \mathbb{R}\times i\mathbb{R}^{m-1} :\ \sum_{j=1}^{m} x_j^2 < 0\right\} \\ &\quad\ \dot\cup \left\{x \in \mathbb{R}\times i\mathbb{R}^{m-1} :\ \sum_{j=1}^{m} x_j^2 > 0,\ x_1 < 0\right\} \\ &= \Lambda_0 \,\dot\cup\, \Lambda_1 \,\dot\cup\, \Lambda_2\ . \end{aligned}$$

Für den nicht konvexen Kegel Λ_1 *existiert die Darstellung*

$$\Lambda_1 = \mathbb{R}_+ \times SO(1, m-1; \mathbb{R})^0 / SO(1, m-2; \mathbb{R})^0 \ ,$$

und für die beiden konvexen Kegel Λ_0 *und* Λ_2 *gilt*

$$\Lambda_0 = \mathbb{R}_+ \times SO(1, m-1; \mathbb{R})^0 / SO(m-1; \mathbb{R}) = \Lambda_2 \ .$$

V)

$$\begin{aligned} Herm(3; \mathbb{O})_{reg} &= \{x \in Herm(3; \mathbb{O}) : \ \det(x) \neq 0\} \\ &= \Lambda_0 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, \Lambda_3 \ , \end{aligned}$$

wobei $\Lambda_p = \{x \in Herm(3; \mathbb{O}) :$ *x hat genau p negative Eigenwerte*$\}$ *für* $p \in \{0, \ldots, 3\}$. *Für die nicht konvexen Kegel* Λ_1 *und* Λ_2 *existiert die Darstellung*

$$\Lambda_1 = \mathbb{R}_+ \times E_{6(-26)} / F_{4(20)} = \Lambda_2 \ ,$$

für die konvexen Kegel Λ_0 *und* Λ_3 *gilt*

$$\Lambda_0 = \mathbb{R}_+ \times E_{6(-26)} / F_4 = \Lambda_3 \ .$$

VI)

$$\begin{aligned} Mat(r; \mathbb{R})_{reg} &= \{x \in Mat(r; \mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in Mat(r; \mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) > 0\} \\ &\quad\ \dot\cup\ \{x \in Mat(r; \mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) < 0\} \ . \end{aligned}$$

Beide Kegel sind nicht konvex und es existiert die Darstellung

$$GL(r; \mathbb{R})^0 \times GL(r; \mathbb{R})^0 / \{(\gamma, \gamma) : \ \gamma \in GL(r; \mathbb{R})\} \ .$$

VII)

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}\right)_{reg} &= \left\{x \in \mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q} : \ \sum_{j=1}^m x_j^2 \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q} : \ \sum_{j=1}^m x_j^2 > 0\right\} \\ &\quad\ \dot\cup\ \left\{x \in \mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q} : \ \sum_{j=1}^m x_j^2 < 0\right\} \\ &= \Lambda_0 \,\dot\cup\, \Lambda_1 \ . \end{aligned}$$

Beide Kegel sind nicht konvex und es existieren die Darstellungen

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \mathbb{R}_+ \times SO(q, m-q; \mathbb{R})^0 / SO(q-1, m-q; \mathbb{R})^0 \ , \\ \Lambda_1 &= \mathbb{R}_+ \times SO(q, m-q; \mathbb{R})^0 / SO(q, m-q-1; \mathbb{R})^0 \ . \end{aligned}$$

VIII)

$$\begin{aligned} Alt(2r;\mathbb{R})_{reg} &= \{x \in Alt(2r;\mathbb{R}): \ \mathrm{Pff}(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in Alt(2r;\mathbb{R}): \ \mathrm{Pff}(x) > 0\} \\ &\qquad \dot\cup \ \{x \in Alt(2r;\mathbb{R}): \ \mathrm{Pff}(x) < 0\} \ . \end{aligned}$$

Beide Kegel sind nicht konvex und es existieren die Darstellungen

$$GL(r;\mathbb{R})^0/Sp(r;\mathbb{R}) \ .$$

IX)

$$\begin{aligned} Herm(3;\mathbb{O}')_{reg} &= \{x \in Herm(3;\mathbb{O}'): \ \det(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in Herm(3;\mathbb{O}'): \ \det(x) > 0\} \\ &\qquad \dot\cup \ \{x \in Herm(3;\mathbb{O}'): \ \det(x) < 0\} \ . \end{aligned}$$

Beide Kegel sind nicht konvex und es existieren die Darstellungen

$$\mathbb{R}_+ \times E_{6(6)}/F_{4(4)} \ .$$

X)

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^m)_{reg} &= \left\{x \in \mathbb{R}^m : \ \sum_{j=1}^m x_j^2 \neq 0\right\} \\ &= \mathbb{R}_+ \times SO(m;\mathbb{R})/SO(m-1;\mathbb{R}) \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel.

XI)

$$\begin{aligned} Sym(r;\mathbb{H})_{reg} &= \{x \in Sym(r;\mathbb{H}): \ \det(x) \neq 0\} \\ &= GL(r;\mathbb{H})/SO^*(2r;\mathbb{R}) \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel.

XII)

$$\begin{aligned} Mat(r;\mathbb{H})_{reg} &= \{x \in Mat(r;\mathbb{H}): \ \det(x) \neq 0\} \\ &= GL(r;\mathbb{H}) \times GL(r;\mathbb{H})/\{(\gamma,\gamma): \ \gamma \in GL(r;\mathbb{H})\} \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel.

XIII)

$$\begin{aligned} Sym(r;\mathbb{C})_{reg} &= \{x \in Sym(r;\mathbb{C}) : \ \mathrm{Det}(x) \neq 0\} \\ &= GL(r;\mathbb{C})/SO(r;\mathbb{C}) \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel.

XIV)

$$\begin{aligned} Mat(r;\mathbb{C})_{reg} &= \{x \in Mat(r;\mathbb{C}) : \ \mathrm{Det}(x) \neq 0\} \\ &= GL(r;\mathbb{C}) \times GL(r;\mathbb{C})/\{(\gamma,\gamma) : \ \gamma \in GL(r;\mathbb{C})\} \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel.

XV)

$$\begin{aligned} Alt(2r;\mathbb{C})_{reg} &= \{x \in Alt(2r;\mathbb{C}) : \ \mathrm{Pff}(x) \neq 0\} \\ &= GL(2r;\mathbb{C})/Sp(r;\mathbb{C}) \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel.

XVI)

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{m'-1}\right)_{reg} &= \left\{ z \in \mathbb{C}^{m'} : \ \sum_{j=1}^{m'} z_j^2 \neq 0 \right\} \\ &= \overset{\times}{\mathbb{C}} \times SO(m';\mathbb{C})/SO(m'-1;\mathbb{C}) \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel. Hierbei ist $\overset{\times}{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *und* $2m' = m$.

XVII)

$$\begin{aligned} \left(Herm(3;\mathbb{O})^{\mathbb{C}}\right)_{reg} &= \{x \in Herm(3;\mathbb{O})^{\mathbb{C}} : \ \det(x) \neq 0\} \\ &= \overset{\times}{\mathbb{C}} \times E_6^{\mathbb{C}}/F_4^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

besteht aus einem nicht konvexen Kegel.

□

In den Fällen *I-V* der Klassifikation in Satz 1.3.3, also im Fall einer formalreellen Jordan-Algebra, gibt es immer zwei Kegel Λ_0 und Λ_r, die konvex sind. Alle anderen Kegel $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{r-1}$ sind zwar nicht konvex, allerdings im Sinne von [K1] *Satelliten* der beiden konvexen Kegel.

Dies liegt an dem in [FK, Theorem III.3.1.] gezeigten Faktum, daß jeder abgeschlossene konvexe Kegel Λ mit nichtleerem Inneren, der eine zusätzliche Symmetrieeigenschaft[1] besitzt, eine formalreelle Jordan-Struktur auf X definiert. Bezüglich dieser ist Λ identisch mit $\{x^2 : \ x \in X\}$, dem Kegel der Quadrate in X. Umgekehrt ist der Kegel der Quadrate in jeder formalreellen Jordan-Algebra ein symmetrischer konvexer Kegel mit nichtleerem Inneren [FK, Theorem III.2.1].

Ist X lediglich einfach und nicht formalreell, dann gilt $r_c \in \{1, 2\}$ und alle Kegel sind nicht konvex. Daher sind sie auch keine Satellitenkegel eines konvexen Kegels. Im Fall $r_c = 2$ besitzt X keine komplexe Jordan-Struktur, was auch schon in Satz 2.2.5 gezeigt wurde, und beide Kegel sind durch das Vorzeichen der Jordan-Determinante charakterisiert. Der Beweis von Satz 2.2.5 zeigt damit, daß $x \in \{x' \in X : \ \det(x') > 0\}$ genau dann, wenn $\vec{\text{sign}}(x)$ eine gerade Anzahl von negativen Einträgen enthält. Entsprechend gilt $x \in \{x' \in X : \ \det(x') < 0\}$ genau dann, wenn $\vec{\text{sign}}(x)$ eine ungerade Anzahl von negativen Einträgen enthält. Die Resultate aus Satz 2.2.5 lassen sich also umformulieren zu

Korollar 2.2.10 *Es sei X eine einfache reelle Jordan-Algebra und $x \in X_{sreg}$ mit p' negativen Einträgen in $\vec{\text{sign}}(x)$. Dann gilt für alle $p \in R_c$:*

$$x \in \Lambda_p \Longleftrightarrow p \equiv p' \ \textit{modulo} \ r_c \ .$$

2.3 Duale Kegel und Symmetrie

Es sei V ein reeller Vektorraum,

$$V^{\#} := \{v^{\#} : \ V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \tag{2.3.1}$$

der Raum aller Linearformen auf V und $V^{\sharp}$ die Menge aller Äquivalenzklassen unitärer irreduzibler Darstellungen von V. Da jeder reelle Vektorraum V insbesondere eine kommutative Gruppe ist, stellt ihn jede irreduzible unitäre Darstellung (bis auf Äquivalenz) auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}$ dar. Dies ermöglicht es $V^{\#}$ mit $V^{\sharp}$ zu identifizieren, indem man

$$\pi_{v^{\#}}(v')(t) := e^{iv^{\#}(v')} \cdot t \tag{2.3.2}$$

für alle $t \in \mathbb{C}, \ v' \in V$ setzt. Für einen konvexen Kegel Λ definiert man üblicherweise den dualen Kegel

$$\Lambda^{\dagger} := \{v^{\#} \in V^{\#} : \ v^{\#}(v') \geq 0 \text{ für alle } v' \in \Lambda\} \ . \tag{2.3.3}$$

[1]Ein verallgemeinerter Symmetriebegriff für nicht-konvexe Kegel wird im folgenden Abschnitt eingeführt. Alle hier vorkommenden Kegel besitzen diese Symmetrieeigenschaft.

Wendet man diese Definition auf $\Lambda_{+-} \subset Sym(2;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$ aus Beispiel 2.1.3 an, so ergibt sich

$$\Lambda^{\dagger}_{+-} = \{0\} ,$$

da $(-e_1+e_2), (e_1-e_2)$ und $\pm e_3$ in Λ_{+-} enthalten sind.

Die entstandene Niederdimensionalität von $\Lambda^{\dagger}_{+-}$ ist typisch für nicht konvexe Kegel. Wie später klar werden wird (Bemerkung 3.3.6), ist deshalb das Verfahren (2.3.3) zur Berechnung des dualen Kegels für allgemeine nicht-konvexe Kegel nicht sinnvoll anwendbar. Für die folgende Definition, die auch für nicht konvexe Kegel geeignet ist, ist es entscheidend, daß die Orthantenkegel durch die Operation der Gruppe K^σ aus konvexen Kegeln in Θ entstehen.

Definition 2.3.4 Der zu $\Theta_> \subset \Theta$ *duale Orthant* $\Theta^{\#}_{\geq} \subset \Theta^{\#}$ sei

$$\Theta^{\#}_{\geq} := \{\vartheta \in \Theta^{\#} : \ \vartheta(\theta) \geq 0 \text{ für alle } \theta \in \Theta_>\} .$$

Vermöge der Bilinearform λ_α existiert die durch die Operation von K^σ auf X definierte *duale Operation* auf $X^{\#}$. Sie ist definiert durch

$$k : X^{\#} \longrightarrow X^{\#};\ k(\xi)(x) := \xi(k^{\lambda_\alpha} x) \tag{2.3.5}$$

für alle $\xi \in X$ und ermöglicht

Definition 2.3.6 Es sei $\Lambda_{\Theta_>}$ ein polyedrisch erzeugter Kegel, dann ist

$$\Lambda_{\Theta^{\#}_{\geq}} := (K^\sigma)^{\#} \cdot \Theta^{\#}_{\geq}$$

der zu $\Lambda_{\Theta_>}$ *duale Kegel* in $X^{\#}$.

Identifiziert man mit Hilfe der positiv definiten Bilinearform λ_α den linearen Dual $X^{\#}$ mit X, so ist $X^{\#}$ eine einfache Jordan-Algebra. $\{e^{\#}_1, \ldots, e^{\#}_r\}$ sei die zu $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *duale Basis* von $\Theta^{\#}$, das heißt es gelte:

$$e^{\#}_j(e_i) = \begin{cases} 0 , & \text{falls } j \neq i , \\ 1 , & \text{falls } j = i . \end{cases}$$

Dann ist $\{e^{\#}_1, \ldots, e^{\#}_r\}$ ein Jordan-Rahmen in $X^{\#}$ und analog Abschnitt 2.2 sind $\vec{e}^{\,\#}_l$, $P_{1,\vec{e}^{\,\#}_l}$, $X^{\#}_l$, $\det^{\#}_l$ und $\vec{\text{sign}}(\xi)$ für alle $l = 0, \ldots, r$ und $\xi \in X^{\#}$ definiert. Per Identifikation mittels λ_α gilt für jeden p-Orthanten $\Theta^{\#}_{rp} = \overline{\Theta_{rp}}$ und es folgt für die p-Orthantenkegel

$$\Lambda^{\#}_p = (K^\sigma)^{\#} \cdot \Theta^{\#}_{rp} = K^\sigma \cdot \overline{\Theta_{rp}} = \overline{\Lambda_p} . \tag{2.3.7}$$

Im Sinne der bisherigen Theorie [U6, Definition 1.3.9.] und [FK, Seite 4] erweisen sich damit die als Zusammenhangskomponenten des regulären Bereiches einfacher Jordan-Algebren vorkommenden Kegel als *symmetrisch*, das heißt als homogen und *selbstdual* nach Abschlußbildung. Man beachte, daß der hier eingeführte Dualitätsbegriff von dem in [FK, U6] benutzten dahingehend abweicht, daß er auch für nicht-konvexe Kegel „sinnvoll“ anwendbar ist. Da für die konvexen Kegel Λ_0 und Λ_r in einer formalreellen Jordan-Algebra stets analog (2.3.7)

$$\Lambda_p^\dagger = \overline{\Lambda_p},\ p = 0, r\ ,$$

gilt [FK, Theorem III.2.1], schließt er allerdings den aus [FK, U6] mit ein. Weiterhin ergeben sich mit Definition 2.3.6 in den vorliegenden Fällen die gleichen dualen Kegel wie das allgemeinere Dualitätskonzept aus [G2], welches auch auf nicht polyedrisch erzeugte Kegel angewandt werden kann.

Aufgrund der Selbstdualität der p-Orthantenkegel erhält man das

Korollar 2.3.8 *Ist $\xi \in X^\#_{sreg}$ mit p' negativen Einträgen in $\vec{\operatorname{sign}}(\xi)$ und $p \in R_c$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \xi \in \Lambda_p^\# &\iff p_s(\xi) = p \\ &\iff p' \equiv p \text{ modulo } r_c\ . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

1. *Ist $R_c = \{0, \ldots, r\}$, dann ist ξ genau dann ein Element von Λ_p, wenn $\vec{\operatorname{sign}}(\xi)$ exakt p negative Einträge besitzt.*

2. *Ist $R_c = \{0, 1\}$, dann ist $\xi \in \Lambda_p^\#$ genau dann, wenn $\vec{\operatorname{sign}}(\xi)$ p' negative Einträge besitzt, so daß $p \equiv p'$ modulo 2.*

3. *Ist $R_c = \{0\}$, dann ist $\xi \in \Lambda_p^\#$.*

Beweis: Identifiziert man $X^\#$ mit X mittels λ_α, so folgt mit (2.3.7)

$$\Lambda_p^\# \cap X^\#_{sreg} = \Lambda_p \cap X_{sreg}$$

und die Behauptungen ergeben sich aus den entsprechenden Resultaten aus Satz 2.2.5 und Korollar 2.2.10 für die Kegel in X_{reg}. □

Kapitel 3

Hardy-Toeplitz C*-Algebren

Mit den algebraischen und geometrischen Vorbereitungen der beiden letzten Kapitel besteht nun der Rahmen, um die Objekte definieren zu können, die in der vorliegenden Arbeit untersucht werden sollen.

Zunächst werden verallgemeinerte Hardy-Räume über nicht-konvexen Kegeln eingeführt und die Gültigkeit der klassischen Aussagen, wie die Zerlegung des L^2-Raumes über iX durch die Hardy-Räume oder deren geometrische Realisation als Funktionenräume über den zugehörigen Tubengebieten, diskutiert. Über diesen Hilberträumen wird danach die jeweilige Hardy-Toeplitz C*-Algebra definiert.

Die Analysis dieser Arbeit geschieht allerdings nicht über dem Tubengebiet selber, sondern auf dessen Shilov-Rand iX. Zentrales Objekt hierbei ist die C*-Algebra der Hardy-Faltungsoperatoren, die als Hauptresultat des Kapitels eine durch den jeweiligen nicht-konvexen Kegel bestimmte Vervollständigung der Gruppen C*-Algebra von iX ist. Später wird sich zeigen, daß diese Vervollständigung alle „wesentlichen" Informationen über die Hardy-Toeplitz C*-Algebra enthält.

3.1 Hardy-Räume über nicht-konvexen Kegeln

Es sei $Z := X^{\mathbb{C}} = X + iX$ die *Komplexifizierung* von X mit der kanonischen Involution

$$^* : Z \longrightarrow Z;\ z = x + iy \longmapsto x - iy =: z^* .$$

Eine offene und zusammenhängende Menge $\Xi \subset Z$ heißt *Tubengebiet*, falls es für alle $iy \in iX$ unter der imaginären *(Rechts-) Translation*

$$\varrho_{iy} : \Xi \longrightarrow \Xi;\ z \longmapsto z + iy \tag{3.1.1}$$

invariant ist. Jedes Tubengebiet kann in der Form

$$\Xi = \Lambda + iX$$

geschrieben werden, wobei Λ eine Menge in X ist und die *Basis* von Ξ genannt wird. Das Tubengebiet Ξ ist genau dann *pseudokonvex*, also ein Holomorphiegebiet, wenn Λ konvex ist [U6, Theorem 1.3.6.]. Ist Λ ein konvexer Kegel, dann definiert man den *klassischen Hardy-Raum* über Λ als

$$\begin{aligned} &H^2(\Lambda \oplus iX) \\ &:= \left\{ h : \Lambda + iX \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph} : \sup_{y\in\Lambda} \int_{iX} |h(y+ix)|^2 \, d(ix) < \infty \right\} . \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Die Abbildung $h \mapsto h_0$ mit

$$h_0(ix) := \lim_{\substack{y\to 0 \\ y\in\Lambda}} h(y+ix) \tag{3.1.3}$$

definiert nach [FK, Corollary IX.4.2] eine isometrische Einbettung von $H^2(\Lambda \oplus iX)$ in $L^2(iX)$, so daß

$$\lim_{\substack{y\to 0 \\ y\in\Lambda}} \int_{iX} |h(y+ix) - h_0(ix)|^2 \, d(ix) = 0$$

gilt [U6, Seite 92]. $L^2(iX)$ ist hierbei bezüglich des Lebesquemaßes ω^m auf iX gebildet. Ist $\Lambda_{\Theta_>}$ nicht konvex, so ist $\Xi = \Lambda_{\Theta_>} + iX$ auch kein Holomorphiegebiet mehr und die Definition in (3.1.2) muß geeignet verallgemeinert werden.

Definition 3.1.4 Für $f \in L^2(iX)$ und $\xi \in X^\#$ sei

$$f^\#(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^m} \int_X e^{-i\xi(x)} f(ix) \, dx$$

der ξ-te *Fourier-Koeffizient* von f.

Für reelle Vektorräume gilt der Satz von Plancherel, der besagt, daß die *Fourier-Transformation*

$$\mathcal{F} : L^2(iX) \longrightarrow L^2(X^\#); \; f \longmapsto f^\# \tag{3.1.5}$$

einen isometrischen Isomorphismus definiert. Die inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1} : L^2(X^\#) \longrightarrow L^2(iX)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}(h)(ix) := \int_{X^\#} e^{i\xi(x)} h(\xi) \, d\xi$$

für alle $h \in L^2(X^\#), \; ix \in iX$.

Definition 3.1.6 Für $p \in R_c$ sei

$$H_p^2(iX) := \{h \in L^2(iX) : \; h^\#(\xi) = 0 \text{ für fast alle } \xi \in X^\# \setminus \Lambda_p^\#\}$$

der *Hardy-Raum* über Λ_p.

Wegen [FK, Theorem IX.4.1] verallgemeinert Definition 3.1.6 tatsächlich die klassische Definition des Hardy-Raumes über einem konvexen Kegel. Denn für einen konvexen Kegel Λ definiert die Abbildung $h_0 \mapsto h$ mit

$$h(y + ix) := \int_{\Lambda^\#} e^{i\xi(x)} e^{-\xi(y)} h_0^\#(\xi) d\xi$$

einen isometrischen Isomorphismus von $H^2(iX)$ nach $H^2(\Lambda \oplus iX)$. Dies ergibt im Fall $iX = i\mathbb{R}$ mit $\Lambda_0 = \mathbb{R}_+$ und $\Lambda_1 = \mathbb{R}_-$

$$H_\pm^2(i\mathbb{R}) = \{h \in L^2(i\mathbb{R}) : \; h^\#(\xi) = 0 \text{ für fast alle } \xi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{R}_\pm\} \; ,$$

und es gilt die bekannte Zerlegung

$$\begin{aligned} L^2(i\mathbb{R}) &= H_+^2(i\mathbb{R}) \oplus H_-^2(i\mathbb{R}) \\ &= H^2(\mathbb{R}_+ \oplus i\mathbb{R}) \oplus H^2(\mathbb{R}_- \oplus i\mathbb{R}) \end{aligned}$$

des $L^2(i\mathbb{R})$ in die Räume der quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen auf der Rechten, beziehungsweise auf der linken Halbebene. Diese Zerlegungseigenschaft gilt auch für die hier definierten Hardy-Räume:

Korollar 3.1.7 *Die Kegel Λ_p, $p \in R_c$, definieren eine direkte Zerlegung*

$$L^2(iX) = \sum_{p \in R_c}^{\oplus} H_p^2(iX)$$

von $L^2(iX)$ in abgeschlossene Unterräume.

Beweis: Per Definition des Hardy-Raumes gilt:

$$H_p^2(iX) = \mathcal{F}^{-1}\Big(L^2(\Lambda_p^\#)\Big) \; . \tag{3.1.8}$$

Da $L^2({\Lambda_p}^\#) \subset L^2(X^\#)$ ein abgeschlossener Unterraum ist und die Fourier-Transformation ein isometrischer Isomorphismus, sind alle Hardy-Räume $H_p^2(iX)$, $p \in R_c$, abgeschlossene Unterräume in $L^2(iX)$. Weil $X_{reg}^\# = \sum_{p \in R_c} \Lambda_p^\#$ und $X_{reg}^\#$ dicht in $X^\#$ liegt, definieren die abgeschlossenen Unterräume $L^2(\Lambda_p^\#)$ eine direkte Zerlegung von $L^2(X^\#)$. Mit (3.1.8) folgt nun die Behauptung. □

Die Translation ϱ_{iy} mit $y \in iX$ (3.1.1) induziert einen unitären Operator

$$\varrho_{iy} : L^2(iX) \longrightarrow L^2(iX);\ h \longmapsto \varrho_{iy} h\ ,$$

mit $\varrho_{iy} h(ix) = h(\varrho_{iy}(ix)) = h(ix + iy)$ für alle $ix \in iX$. Für diesen gilt das

Lemma 3.1.9 *Für alle $iy \in iX$ ist $H^2_p(iX)$ invariant unter ϱ_{iy} und*

$$\varrho_{iy} : H^2_p(iX) \longrightarrow H^2_p(iX);\ h \longmapsto \varrho_{iy} h$$

ist ein unitärer Operator.

Beweis: Sei $h \in H^2_p(iX)$ und $iy \in iX$. Dann folgt für alle $\xi \in X^\#$

$$\begin{aligned} (\varrho_{iy} h)^\#(\xi) &= \int_X h(ix+iy) e^{-i\xi(x)}\, dx \\ &\overset{ix+iy=:ix'}{=} \int_X h(ix') e^{-i\xi(x')} e^{i\xi(y)}\, dx' \\ &= e^{i\xi(y)} h^\#(\xi) \end{aligned}$$

und $(\varrho_{iy} h)^\#$ verschwindet genau dann für fast alle $\xi \notin \Lambda^\#_p$, wenn dies auch für $h^\#$ gilt. Damit läßt ϱ_{iy} den Hardy-Raum $H^2_p(iX)$ invariant und operiert unitär auf $H^2_p(iX)$. □

Definition 3.1.10 Es sei $p \in R_c$.

1. Der *charakteristische Multiplikator* M_{χ_p} ist der Multiplikationsoperator

   $$M_{\chi_p} : L^2(X^\#) \longrightarrow L^2(\Lambda^\#_p);\ h \longmapsto \chi_p\, h\ ,$$

   wobei

   $$\chi_p : X^\# \longrightarrow \mathbb{R};\ \chi_p(\xi) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \xi \notin \Lambda^\#_p\ , \\ 1, & \text{falls } \xi \in \Lambda^\#_p\ . \end{cases}$$

2. Die Projektion von $L^2(iX)$ auf den abgeschlossenen Unterraum $H^2_p(iX)$ heißt *Szegö-Projektion* und wird mit ℓ_{E_p} bezeichnet.

Lemma 3.1.11 *Der durch χ_p definierte Multiplikationsoperator M_{χ_p} ist eine orthogonale Projektion $L^2(X^\#) \longrightarrow L^2(\Lambda_p^\#)$ und das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} L^2(iX) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(X^\#) \\ {\scriptstyle \ell_{E_p}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle M_{\chi_p}} \\ H_p^2(iX) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\Lambda_p^\#) \end{array} \quad .$$

Insbesondere gilt: ℓ_{E_p} ist ein Linksfaltungsoperator *mit*

$$\ell_{E_p}(h)(t) = \int_{iX} h(t-s)E_p(s)\,d(s)$$

für alle $t \in iX,\ h \in L^2(iX)$ bezüglich des distributiven Maßes

$$E_p := \mathcal{F}^{-1}(\chi_p)\ .$$

Beweis: Da χ_p beschränkt ist, ist M_{χ_p} ein stetiger Operator auf $L^2(X^\#)$ und wegen ${\chi_p}^2 = \chi_p = {\chi_p}^*$ eine orthogonale Projektion. Das Bild unter M_{χ_p} ist $L^2(\Lambda_p^\#)$ und es folgt $\mathcal{F}^{-1} \circ (M_{\chi_p}) \circ \mathcal{F} = \ell_{E_p}$. Als Fourier-Transformierte eines stetigen Multiplikationsoperators ist ℓ_{E_p} ein beschränkter Linksfaltungsoperator bezüglich eines distributiven Maßes auf iX. □

3.2 Geometrische Realisation der Hardy-Räume

Die Definition 3.1.6 des Hardy-Raumes über allgemeinen polyedrisch erzeugten Kegeln $\Lambda_p^\#$ in $X^\#$ mit Hilfe der Fourier-Transformation läßt die Frage nach der konkreten Realisation von $H_p^2(iX)$ als „Funktionenraum“ über Ξ offen. Tatsächlich ist $\Xi_p := \Lambda_p + iX$ nicht mehr pseudokonvex, falls Λ_p nicht konvex ist, weswegen holomorphe Funktionen über Ξ_p als mögliche Objekte für diesen Funktionenraum nicht mehr in Frage kommen. In [G2] wurde ein neues Konzept entwickelt, um $H_p^2(iX)$ als *Kohomologieraum* $H_p^{(d)}(\Xi_p)$ von *Čech-Kozykeln* der Länge d zu realisieren. d ist hierbei der Konkavitätsgrad des Kegels Λ_p, der in Lemma 2.1.12 bestimmt wurde.

Ist Λ ein *homogener* Kegel, dann ist auch das Tubengebiet $\Xi = \Lambda + iX$ ein *homogener Raum.* Das halbdirekte Produkt $\Gamma(\Lambda) \propto iX$ mit der Verknüpfungsregel

$$(\gamma, iy) \circ (\gamma', iy') := (\gamma\gamma', iy + i\gamma y')$$

für alle $ix, ix' \in iX,\ \gamma, \gamma' \in \Gamma(\Lambda)$ ist eine Lie-Gruppe. Identifiziert man jede Rechtstranslation $\varrho_{iy},\ iy \in iX$, mit ihrem Wert im Nullpunkt, dann existiert die transitive

Operation

$$\begin{array}{rcl} \Big(\Gamma(X) \propto iX\Big) \times \Xi & \longrightarrow & \Xi \, ; \\ \Big((\gamma, iy), (x' + iy')\Big) & \longmapsto & \gamma x' + i(\gamma y' + y) \end{array}$$

von $\Gamma(X) \propto iX$ auf Ξ. Gemäß [FK, X] gilt, daß für einen symmetrischen konvexen Kegel Λ das Tubengebiet Ξ ein hermitescher symmetrischer Raum ist. Dies ist für nicht-konvexe Kegel nicht mehr richtig. So wird in [K1] gezeigt, daß das durch einen nicht-konvexen Kegel Λ in einer formalreellen Jordan-Algebra Ξ definierte Tubengebiet Ξ nur noch als Zariski-offene Menge in einen pseudo-hermiteschen symmetrischen Raum eingebettet werden kann. Da diese pseudo-hermiteschen symmetrischen Räume ein Tubengebiet als offene und dichte Teilmenge enthalten, werden sie *pseudo-hermitesche symmetrische Räume des Tubentypes* genannt [FG1].

Beispiel 3.2.1 Für den nicht konvexen homogenen Kegel

$$\Lambda_{+-} = GL(2;\mathbb{R})^0 / SO(1,1;\mathbb{R})$$

in $Sym(2;\mathbb{R})$ kann das zugehörige Tubengebiet $\Xi = \Lambda_{+-} + iSym(2;\mathbb{R})$ offen und dicht in den pseudo-hermiteschen symmetrischen Raum

$$Sp(4;\mathbb{R})/U(1,1;\mathbb{C})$$

eingebettet werden. Die Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel

$$\Lambda_{++} = GL(2;\mathbb{R})^0 / SO(2,0;\mathbb{R})$$

und

$$\Lambda_{--} = GL(2;\mathbb{R})^0 / SO(0,2;\mathbb{R})$$

führen zu hermiteschen symmetrischen Räumen:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{++} + iSym(2;\mathbb{R}) & \cong & Sp(4;\mathbb{R})/U(2,0;\mathbb{C}) \ , \\ \Lambda_{--} + iSym(2;\mathbb{R}) & \cong & Sp(4;\mathbb{R})/U(0,2;\mathbb{C}) \ . \end{array}$$

Für die nicht-konvexen Kegel in nicht formalreellen Jordan-Algebren liegen entsprechende Resultate bisher nur für die Fälle VI und VII vor [AG]. So ergeben sich für $\Lambda_+ = \{x \in Mat(r;\mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) > 0\}$ und $\Lambda_- = \{x \in Mat(r;\mathbb{R}) : \ \mathrm{Det}(x) < 0\}$ in $Mat(r;\mathbb{R})$ die beiden folgenden Einbettungen als offene und dichte Mengen:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_+ + iMat(r;\mathbb{R}) & \hookrightarrow & SL(2m;\mathbb{C})/\,(SL(m;\mathbb{C}) \times \mathbb{T}) \ , \\ \Lambda_- + iMat(r;\mathbb{R}) & \hookrightarrow & SL(2m;\mathbb{C})/\,(SL(m;\mathbb{C}) \times \mathbb{T}) \ , \end{array}$$

wobei $\mathbb{T}$ die Kreisgruppe ist. Für $\Lambda_0 = \{x \in \mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q} : \ \sum_{j=1}^m x_j^2 > 0\}$ und $\Lambda_1 = \{x \in \mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q} : \ \sum_{j=1}^m x_j^2 < 0\}$ in $\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\Lambda_0 + i(\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}) \\
&\quad \hookrightarrow \quad SO(q+1, m-q+1; \mathbb{R}) / \Big(SO(q-1, m-q+1; \mathbb{R}) \times SO(2; \mathbb{R}) \Big) , \\
&\Lambda_1 + i(\mathbb{R}^q \times i\mathbb{R}^{m-q}) \\
&\quad \hookrightarrow \quad SO(q+1, m-q+1; \mathbb{R}) / \Big(SO(q-1, m-q+1; \mathbb{R}) \times SO(2; \mathbb{R}) \Big) .
\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall sind die Einbettungen offen und dicht.

3.3 Die Hardy-Toeplitz C*-Algebra über $H_p^2(iX)$

Für jeden der in Abschnitt 3.1 eingeführten Hardy-Räume $H_p^2(iX)$ wird nun die sogenannte Hardy-Toeplitz C*-Algebra definiert.

Ist H ein beliebiger komplexer Hilbertraum, dann bezeichne $\mathcal{L}(H)$ die C*-Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf H.

$\mathcal{C}_0(iX)$ bezeichne die Algebra der stetigen Funktionen φ, die die Eigenschaft haben, daß für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge $O \subset iX$ existiert, so daß

$$\sup_{ix \in X \setminus O} |\varphi(ix)| =: \left\| \varphi \mid_{iX \setminus O} \right\|_\infty < \epsilon .$$

Hierzu sagt man, daß φ im „Unendlichen verschwindet". Jedes $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ definiert einen stetigen Multiplikationsoperator $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2(iX))$ über

$$M_\varphi : L^2(iX) \longrightarrow L^2(iX); \ h \longmapsto \varphi \cdot h . \tag{3.3.1}$$

Konvention 3.3.2 Für $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ wird, wenn Unklarheiten ausgeschlossen sind, zur Vereinfachung der Notation das Symbol φ sowohl für die Funktion aus $\mathcal{C}_0(iX)$, als auch für den Multiplikationsoperator M_φ auf $L^2(iX)$ verwendet.

Definition 3.3.3 Der *Hardy-Toeplitz Operator* $T_{\Lambda_p}(\varphi)$ mit *Symbol* $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ ist durch

$$T_{\Lambda_p}(\varphi) : H_p^2(iX) \longrightarrow H_p^2(iX); \ h \longmapsto \ell_{E_p}\Big(M_\varphi(h)\Big)$$

definiert.

Toeplitz-Operatoren sind also Kompressionen von Multiplikationsoperatoren auf $H_p^2(iX)$ vermöge ℓ_{E_p}. Aus der Definition ergeben sich direkt die Eigenschaften [U6, Proposition 4.4.7.]

$$||T_{\Lambda_p}(\varphi)||_{H_p^2(iX)} \leq ||\varphi||_\infty \quad \text{und} \quad T_{\Lambda_p}(\varphi)^* = T_{\Lambda_p}(\varphi^*)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$. Damit ist $T_{\Lambda_p}(\varphi)$ insbesondere ein stetiger linearer Operator aus $\mathcal{L}(H_p^2(iX))$. Ist $\varphi_1 \in H_p^2(iX) \cap \mathcal{C}_0(iX)$, dann gilt außerdem

$$T_{\Lambda_p}(\varphi)T_{\Lambda_p}(\varphi_1) = T_{\Lambda_p}(\varphi\varphi_1)$$

und

$$T_{\Lambda_p}(\varphi_1^*)T_{\Lambda_p}(\varphi) = T_{\Lambda_p}(\varphi_1^*\varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$.

Definition 3.3.4 Die *Hardy-Toeplitz C^*-Algebra* über $H_p^2(iX)$ ist die C*-Algebra

$$\mathcal{T}\Big(H_p^2(iX)\Big) := C^*\Big(T_{\Lambda_p}(\varphi) : \ \varphi \in \mathcal{C}_0(iX)\Big) \ .$$

Bemerkung 3.3.5 Es sei $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$, also unendlich oft differenzierbar mit kompaktem Träger. Der *Wiener-Hopf Operator* $W(\varphi^\#)$ mit *Symbol* $\varphi^\# \in L^2(X^\#)$ auf $L^2(\Lambda_p^\#)$ ist definiert als

$$W(\varphi^\#)(\phi)(\xi) := \int_{\Lambda_p^\#} \varphi^\#(\xi - \eta)\phi(\eta)\, d\eta \ , \ \phi \in L^2(\Lambda_p^\#), \ \xi \in \Lambda_p^\# \ .$$

Die kommutierenden Diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
L^2(iX) & \xrightarrow{M_\varphi} & L^2(iX) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(X^\#) & \xrightarrow{\ell_{\varphi^\#}} & L^2(X^\#) \\
\ell_{E_p}\downarrow & & \ell_{E_p}\downarrow & & M_{\chi_p}\downarrow & & M_{\chi_p}\downarrow \\
H_p^2(iX) & \xrightarrow{T_{\Lambda_p}(\varphi)} & H_p^2(iX) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\Lambda_p^\#) & \xrightarrow{W(\varphi^\#)} & L^2(\Lambda_p^\#)
\end{array}$$

zeigen, daß

$$T_{\Lambda_p}(\varphi) = Ad(\mathcal{F}^{-1})\left(W(\varphi^\#)\right) \ .$$

Somit sind die Toeplitz Operatoren auf $H_p^2(iX)$ unitär äquivalent zu den Wiener-Hopf Operatoren auf $L^2(\Lambda_p^\#)$, welche in der Theorie der Integralgleichungen, klassisch für $\Lambda_p^\# := \mathbb{R}_+$, eine wichtige Rolle spielen.

Bemerkung 3.3.6 Da im Fall $R_c = \{0\}$, also $r_c = 1$, der reguläre Bereich X_{reg} nur aus einer einzigen Zusammenhangskomponente besteht und der einzige Kegel $\Lambda = \Lambda_0$ eine dichte Menge in iX ist, folgt $\Lambda_0^\# = X^\#$ und damit

$$H_0^2(iX) = \Big\{h \in L^2(iX) : \ h^\#(\xi) = 0 \text{ für fast alle } \xi \in X^\# \setminus \Lambda_0^\# = \emptyset\Big\} = L^2(iX) \ .$$

Damit ist die Projektion $\ell_{E_0} : L^2(iX) \longrightarrow H_0^2(iX)$ die Identität, $T_{\Lambda_0}(\varphi) = M_\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ und

$$\mathcal{T}\Big(H_0^2(iX)\Big) = C^*\Big(M_\varphi : \ \varphi \in \mathcal{C}_0(iX)\Big) = \mathcal{C}_0(iX) \ . \tag{3.3.7}$$

Da in dieser Arbeit die Feinstruktur von Hardy-Toeplitz C*-Algebren untersucht werden soll, ist es wegen (3.3.7) nicht interessant den Fall $r_c = 1$ zu behandeln. Deshalb werden im folgenden nur noch einfache Jordan-Algebren mit $r_c \geq 2$ betrachtet.

Konvention 3.3.8 Von nun an sei X stets eine einfache Jordan-Algebra, so daß $r_c \geq 2$. Weiterhin sei p stets aus R_c.

3.4 Hardy-Faltungsoperatoren über $H_p^2(iX)$

Für ein beliebiges beschränktes Maß $\omega \in M^1(iX)$ sei der zugehörige *(Links-) Faltungsoperator* ℓ_ω auf $L^2(iX)$ definiert über

$$\ell_\omega(f)(s) =: (\omega \star f)(s) := \int_{iX} f(s-t)\omega(dt)$$

für alle $f \in L^2(iX)$ und $s \in iX$. Dies führt zur *Gruppen C^*-Algebra*

$$C^*(iX) := C^*\Big(\ell_f : \ f \in L^1(iX)\Big) \ ,$$

wobei jedes $f \in L^1(iX)$, als Dichte bezüglich ω^m aufgefaßt, ein beschränktes Maß $\omega_f := f \cdot \omega^m \in M^1(iX)$ definiert. Die *Gruppen W^*-Algebra* ist als

$$W^*(iX) := W^*\Big(\ell_\omega : \ \omega \in M^1(iX)\Big)$$

definiert.

Korollar 3.4.1 *Die Projektion ℓ_{E_p} ist ein Element von $W^*(iX)$.*

Beweis: Da ℓ_{E_p} ein Linksfaltungsoperator ist, kommutiert er mit allen Rechtstranslationen ϱ_{ix}, $ix \in iX$. Aufgrund von Lemma 3.1.11 ist ℓ_{E_p} außerdem ein beschränkter Operator auf $L^2(iX)$. Deshalb folgt mit [S4, Seite 261] die Behauptung. $\square$

Die *Fourier-Algebra* $A(iX)$ ist gegeben durch

$$A(iX) := \left\{\mathcal{F}^{-1}(\phi) : \ \phi \in L^1(X^\#)\right\} \ . \tag{3.4.2}$$

Für die Algebranorm von $f \in A(iX)$ ergibt sich

$$||f||_{A(iX)} = ||f^\#||_{L^1(X^\#)} \ ,$$

wobei $|| \cdot ||_{L^1(iX)}$ die übliche L^1-Norm bezeichnet. Mit [E, Seite 12] gilt:

$$W^*(iX) = A(iX)^\# := \{\eta : A(iX) \longrightarrow \mathbb{C} : \ \eta \text{ linear und stetig}\} \ ,$$

wobei die zugehörige Paarung gegeben ist durch

$$\langle \ell_\omega, f\rangle := \int_{iX} f(s)\,\omega(ds) \ .$$

Diese Paarung vermittelt eine kontraktive Operation (von rechts) von $A(iX)$ auf $W^*(iX)$, definiert durch

$$\begin{array}{ccc} W^*(iX) \times A(iX) & \longrightarrow & W^*(iX) \ ; \\ (\ell_\omega, f) & \longmapsto & \ell_\omega \cdot f \ , \end{array} \tag{3.4.3}$$

wobei $\ell_\omega \cdot f$ die durch

$$f_0 \longmapsto \langle \ell_\omega \cdot f, f_0\rangle := \langle \ell_\omega, f \cdot f_0\rangle \ , \ \ f_0 \in A(iX) \ ,$$

definierte Linearform auf $A(iX)$ sei. Da für alle $f_0 \in A(iX)$

$$\begin{aligned} \langle \ell_\omega, f \cdot f_0\rangle &= \int_{iX} (f \cdot f_0)(s)\,\omega(ds) \\ &= \int_{iX} f_0(s)(\omega \cdot f)(ds) \ , \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\ell_\omega \cdot f = \ell_{\omega \cdot f} \ ,$$

und weil $A(iX) \subset \mathcal{C}_0(iX)$, gilt $\omega \cdot f \in M^1(iX)$. Aus der Kontraktivität der Operation von $A(iX)$ folgt

$$||\ell_\omega \cdot f||_{W^*(iX)} = ||\ell_{\omega \cdot f}||_{W^*(iX)} \leq ||\ell_\omega||_{W^*(iX)} \cdot ||f||_{A(iX)} \ .$$

Definition 3.4.4 Die C*-Algebra der *Hardy-Faltungsoperatoren* wird definiert als

$$C_p^*(iX) := C^*\Big(\ell_{E_p f} : \ f \in A(iX)\Big) \ .$$

Wegen (3.4.3) ist $C_p^*(iX)$ tatsächlich eine Unteralgebra von $W^*(iX) \subset \mathcal{L}\left(L^2(iX)\right)$. Der oben gebrauchte Begriff Vervollständigung erfährt seine Berechtigung durch

Satz 3.4.5 *Für eine beliebige einfache Jordan-Algebra mit $r_c \geq 2$ und $p \in R_c$ gilt:*

$$C^*(iX) \subset C_p^*(iX) \ .$$

Beweis: Der Beweis des Satzes beruht auf der in [SS] gezeigten Funktionalgleichung spezieller Distributionen, deren Aussage zunächst kurz referiert wird.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil definiert man die Distribution Φ^z auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(iX)$ durch

$$\langle \Phi^z, f \rangle := \Phi^z(f) := \int_{\Lambda_p} f(ix)\,|\det(ix)|^z\, d(ix)$$

für alle $f \in \mathcal{S}(iX)$. Φ^z hängt holomorph von $z \in \mathbb{C}$ ab. Sei $\hat{\Phi}^{z-\frac{m}{r}}$ über

$$\langle \hat{\Phi}^{z-\frac{m}{r}}, \phi \rangle := \int_{\Lambda_p^\#} \phi(\xi)\,|\det(\xi)|^{z-\frac{m}{r}}\, d\xi$$

für alle $\phi \in \mathcal{S}(X^\#)$ und $Re(z) > \frac{m}{r}$ definiert. Dann folgt für ein festes $f \in \mathcal{S}(iX)$ und $\phi := f^\#$ mit dem Satz von Plancherel und [SS, Theorem 1] die Funktionalgleichung

$$\left\langle (\hat{\Phi}^{z-\frac{m}{r}})^\#, f \right\rangle = \langle \hat{\Phi}^{z-\frac{m}{r}}, \phi \rangle = (2\pi)^{-rz} e^{\frac{rz}{4}} \Gamma_X(z) \sum_{j \in R_c} u_j(z) \langle \Phi_j^{-z}, f \rangle \ , \tag{3.4.6}$$

wobei u_j, $j \in R_c$, ein Polynom in $e^{-\frac{z}{r}}$ und Γ_X eine wohldefinierte Funktion im Gebiet $\mathrm{Re}(z) > \frac{m-r}{r}$ ist [SS, Seite 141]. Die Distributionen Φ_j^{-z}, $j \in R_c$, werden wie Φ^z zunächst in $\mathrm{Re}(-z) > 0$ bezüglich des Kegels Λ_j definiert und dann meromorph fortgesetzt nach ganz $\mathbb{C}$. Sie werden durch die explizite Distribution Φ_j^z, $\mathrm{Re}(z) > 0$, bestimmte implizite Distributionen genannt.

Sei nun $u \in \mathcal{C}_c^\infty(iX_{reg})$ beliebig. Dann definiert

$$(u \cdot \Phi_j^z)(f) = \Phi_j^z(uf) = (u \cdot |\det|^z \cdot \chi_j)(f) \tag{3.4.7}$$

eine holomorphe Funktion in $\mathrm{Re}(z) > 0$, welche über (3.4.6) eine meromorphe Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C}$ hat. Hierbei ist die Gleichheit in (3.4.7) als Gleichheit von Distributionen zu verstehen, die durch Dichten bezüglich des gegebenen Maßes ω^m definiert sind. Weil $z \mapsto (u \cdot |\det|^z \cdot \chi_j)(f)$ eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ ist, sind die Fortsetzung von $(u \cdot \Phi_j^z)(f)$ und $(u \cdot |\det|^z \cdot \chi_j)(f)$ identisch und mit (3.4.6) folgt für alle $Re(z) > \frac{m-r}{r}$:

$$u \cdot (\hat{\Phi}^{z-\frac{m}{r}})^\# = (2\pi)^{-rz} e^{\frac{rz}{4}} \Gamma_X(z) \sum_{j \in R_c} u_j(z)\, u \cdot \chi_j \cdot |\det|^{-z} \ . \tag{3.4.8}$$

In diese Gleichung wird nun die Definition von E_p als die distributive Fourier-Transformation von χ_p eingesetzt und für den Fall $z := \frac{m}{r} > \frac{m-r}{r}$ ausgewertet. Daraus ergibt sich für $u \cdot E_p$:

$$
\begin{aligned}
&(u \cdot E_p)(f) && (3.4.9)\\
&\quad := \quad E_p(uf)\\
&\quad := \quad \int_{X^\#} (uf)^\#(\xi)\chi_p(\xi)d\xi\\
&\quad \overset{(3.4.7)}{=} \quad u \cdot (\hat{\Phi}^0)^\#(f)\\
&\quad \overset{(3.4.8)}{=} \quad (2\pi)^{-m} e^{\frac{m}{4}} \Gamma_X\left(\tfrac{m}{r}\right) \sum_{j=0}^{r} u_j\left(\tfrac{m}{r}\right)(u \cdot \chi_j \cdot |\det|^{\frac{-m}{r}})(f)\ . && (3.4.10)
\end{aligned}
$$

Um den Satz zu beweisen, sei nun ℓ_u ein Erzeuger von $C^*(iX)$ mit $u \in L^1(iX)$. Weil $\bigcup_{j=0}^r \Lambda_j$ dicht in iX ist (Satz 2.1.20), gilt:

$$
\bigcup_{j=0}^{r} \mathcal{C}_c^\infty(\Lambda_j) \underset{L^1-dicht}{\subset} L^1(iX)\ . \tag{3.4.11}
$$

Es genügt also ein beliebiges $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Lambda_{j_0})$, mit $0 \leq j_0 \leq r$ fest, zu betrachten. Weil der Abschluß des kompakten Trägers von u eine Teilmenge in iX_{reg} ist, folgt aus Gleichung (3.4.10) für die Distribution $u \cdot E_p$:

$$
\begin{aligned}
u \cdot E_p &= (2\pi)^{-m} e^{\frac{m}{4}} \Gamma_X\left(\tfrac{m}{r}\right) \sum_{j=0}^{r} u_j\left(\tfrac{m}{r}\right) u \cdot \chi_j \cdot |\det|^{-\frac{m}{r}}\\
&= u_{j_0}\left(\tfrac{m}{r}\right) u \cdot |\det|^{-\frac{m}{r}}\ . && (3.4.12)
\end{aligned}
$$

Weil Λ_p nicht dicht in $X^\#$ ist, ist der Träger der Distribution E_p ganz iX und $u \cdot E_p$ kann nicht die Nullfunktion sein. Dies impliziert

$$
u_{j_0}\left(\tfrac{m}{r}\right) \neq 0 \tag{3.4.13}
$$

und

$$
f(ix) := \begin{cases} u(ix)\frac{1}{u_{j_0}(\frac{m}{r})}|\det(ix)|^{\frac{m}{r}}, & x \in \Lambda_{j_0}\ ,\\ 0\ , & \text{sonst}\ , \end{cases}
$$

ist eine wohldefinierte Funktion in $\mathcal{C}_c^\infty(\Lambda_{j_0})$. Aus Gleichung (3.4.12) folgt nun, daß $(f \cdot E_p) = u$ als Distributionen über iX. Weil $u \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$ und $|\det|^{\frac{m}{r}} \in \mathcal{C}^\infty(iX)$, ist f ein Element in $A(iX)$ und damit $\ell_u = \ell_{E_p f}$ ein Element in $C_p^*(iX)$. Dies beweist die Behauptung. □

Anwendung der Fourier-Transformation auf $C_p^*(iX)$ ergibt:

$$\begin{aligned} Ad(\mathcal{F})\Big(C_p^*(iX)(iX)\Big) &= Ad(\mathcal{F})\Big(C^*\left(\ell_{E_pf}:\ f\in A(iX)\right)\Big) \\ &= C^*\Big(\ell_{f^\#}(E^\#):\ f\in A(iX)\Big) \\ &\overset{(3.4.2)}{=} C^*\Big(\ell_\phi(\chi_p):\ \phi\in L^1(X^\#)\Big) \\ &= C^*\Big(\phi\star\chi_p:\ \phi\in L^1(X^\#)\Big)\ , \end{aligned}$$

also eine C*-Algebra, die aus Multiplikationsoperatoren auf $L^2(X^\#)$ besteht.

Definition 3.4.14 Die C*-Algebra der *Hardy-Multiplikatoren* ist definiert als

$$\mathcal{C}_0^p(X^\#) := C^*\Big(\phi\star\chi_p:\ \phi\in L^1(X^\#)\Big)\subset\mathcal{L}\Big(L^2(X^\#)\Big)\ .$$

Aufgrund von Satz 3.4.5 ist $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ eine Vervollständigung von $\mathcal{C}_0(X^\#)$. Sie wird eine entscheidende Rolle für die Konstruktion der Darstellungen von $C_p^*(iX)$ im nächsten Kapitel spielen. Dafür werden im folgenden zunächst einige (technische) Eigenschaften von $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ nachgewiesen.

Lemma 3.4.15 *$\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ ist eine *-Unteralgebra von $\mathcal{U}_b(X^\#)$, der C^*-Algebra der gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen auf $X^\#$.*

Beweis: Sei $\psi=\phi\star\chi_p$, $\phi\in L^1(X^\#)$, ein typischer Erzeuger von $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ und $(\phi^l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen mit kompaktem Träger, so daß ϕ^l gegen ϕ in der L^1-Norm konvergiert. Dann folgt mit der Ungleichung von Young

$$\lim_{l\to\infty}\|\phi^l\star\chi_p-\phi\star\chi_p\|_\infty\leq\lim_{l\to\infty}\|\phi^l-\phi\|_1\cdot\|\chi_p\|_\infty=\|\phi^l-\phi\|_1\ ,$$

also konvergiert $\psi^l:=\phi^l\star\chi_p$ in der Supremumsnorm gegen ψ. Für alle $\xi,\eta\in X^\#$ gilt

$$(\phi^l\star\chi_p)(\xi)=\int_{X^\#}\phi^l(\xi-\zeta)\chi_p(\zeta)d\zeta=\int_{\Lambda_p^\#}\phi^l(\xi-\zeta)d\zeta=\int_{\xi-\Lambda_p^\#}\phi^l(\zeta)d\zeta\ .$$

Es bezeichne Δ die symmetrische Differenz von Mengen und O^l sei der kompakte Träger von ϕ^l. Dann folgt für alle $l\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\psi^l(\xi)-\psi^l(\eta)| &= \Big|\int_{\xi-\Lambda_p^\#}\phi^l(\zeta)d\zeta-\int_{\eta-\Lambda_p^\#}\phi^l(\zeta)d\zeta\Big| \\ &= \Big|\int_{(\xi-\Lambda_p^\#)\triangle(\eta-\Lambda_p^\#)}\phi^l(\zeta)d\zeta\Big| \\ &\leq ||\phi^l||_\infty\cdot\omega^m\Big(O^l\cap\left((\xi-\Lambda_p^\#)\triangle(\eta-\Lambda_p^\#)\right)\Big)\ . \end{aligned}$$

Es sei $||\cdot|| := ||\cdot||_{\lambda_\alpha}$, die durch λ_α auf $X^\#$ definierte Norm. Dann ist für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{||\xi-\eta||\to 0} O^l \cap \big((\xi - \Lambda_p^\#) \triangle (\eta - \Lambda_p^\#)\big) = \emptyset \ ,$$

also sind alle ψ^l gleichmäßig stetig. Mit der Young'schen Ungleichung folgt weiter

$$||\psi^l||_\infty \leq ||\phi^l||_1 \cdot ||\chi_p||_\infty = ||\phi^l||_1$$

und alle ψ^l erweisen sich als Elemente in $\mathcal{U}_b(X^\#)$. Da $\mathcal{U}_b(X^\#)$ eine unter gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossene C*-Algebra ist, ist das Lemma hiermit bewiesen.

$\Lambda_p^\#$ ist unter K^σ invariant. Deshalb gilt für jedes $k \in K^\sigma$ und $\xi \in X^\#$:

$$\begin{aligned} \psi(k\xi) &= \int_{k\xi - \Lambda_p^\#} \phi(\eta)\, d\eta \\ &= \int_{k(\xi - \Lambda_p^\#)} \phi(\eta)\, d\eta \\ &= \int_{\xi - \Lambda_p^\#} \phi(k\eta)\, d\eta \ . \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Da $\tau_k(\phi) : \eta \mapsto \phi(k\eta)$ wieder aus $L^1(X^\#)$ ist, ist auch $\tau_k(\psi) : \xi \mapsto \psi(k\xi)$ aus $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ und

$$\tau_k : \mathcal{C}_0^p(X^\#) \longrightarrow \mathcal{C}_0^p(X^\#)$$

ist eine wohldefinierte Funktion.

Korollar 3.4.17 *Mit*

$$\begin{aligned} \tau : \quad K^\sigma \times \mathcal{C}_0^p(X^\#) &\longrightarrow \mathcal{C}_0^p(X^\#) \ ; \\ (k, \psi) &\longmapsto \tau_k(\psi) \end{aligned}$$

wird eine streng stetige Operation von K^σ auf $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ definiert.

Beweis: Es genügt die Stetigkeit für Erzeuger $\psi = \phi \star \chi_p$ von $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ mit $\phi \in L^1(X^\#)$ zu zeigen. Da $\mathcal{C}_c^\infty(X^\#)$ dicht in $L^1(X^\#)$ ist, kann man sich weiterhin auf den Fall $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(X^\#)$ beschränken. Sei also $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(X^\#)$ beliebig und $R > 0$ geeignet, so daß $U_R(0) := \{\xi \in X^\# : \ ||\xi|| < R\}$ eine Umgebung des kompakten Trägers von ϕ ist. Anwendung der Ungleichung von Young ergibt zusammen mit Gleichung 3.4.16

$$\begin{aligned} |\psi(k\xi) - \psi(k'\xi)| &\leq ||\tau_k(\phi \star \chi_p) - \tau_{k'}(\phi \star \chi_p)||_\infty \\ &\leq ||\tau_k(\phi) - \tau_{k'}(\phi)||_1 \cdot ||\chi_p||_\infty \\ &= ||\tau_k(\phi) - \tau_{k'}(\phi)||_1 \end{aligned}$$

für alle $\xi \in X^{\#}$ und $k, k' \in K^{\sigma}$. Da $\tau_k(\phi)$ für $k \to k'$ punktweise gegen $\tau_{k'}(\phi)$ konvergiert und $|\tau_k(\phi)| \leq ||\phi||_\infty \cdot \chi_{U_R(0)} \in L^1(X^{\#})$, folgt mit dem Satz von Lebesque über die dominierte Konvergenz, daß

$$\lim_{k \to k'} ||\tau_k(\phi) - \tau_{k'}(\phi)||_1 = 0 \ .$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Kapitel 4

Facetteninduzierte Limesdarstellungen

Ziel dieses Kapitels ist es, für jede allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von Λ_p explizit eine Darstellung der Hardy-Faltungsoperatoren zu konstruieren.

Der erste Abschnitt widmet sich der Definition der Facetten und den durch sie erzeugten relativen Objekten, wie Jordan-Algebren, Spektralgruppen, Hardy-Räume und C*-Algebren. Wichtig ist hierbei, daß sich für jede Facette die grundsätzlichen Eigenschaften der ursprünglichen Objekte auf die relativen übertragen. Interessant ist, daß im nicht konvexen Fall verschiedene Facetten denselben linearen Unterraum erzeugen können. Dies kommt im konvexen Fall nicht vor.

Im zweiten Abschnitt wird für jede spezielle Facette eine Darstellung der Hardy-Multiplikatoren mit Hilfe eines Grenzprozesses entlang dieser Facette definiert. An dieser Stelle ist die Determinierung der Kegelzugehörigkeit durch die charakteristische Kegelzahl entscheidend für den Beweis der Konvergenzaussage.

Im abschließenden Abschnitt folgt das Übertragen dieser Darstellung auf die Hardy-Faltungsoperatoren mittels der Fouriertransformation.

4.1 Facetten und induzierte Substrukturen

Es sei $\tilde{r} \in \{0, \ldots, r\}$ beliebig. Dann ist analog Abschnitt 2.2

$$\vec{e_{\tilde{r}}} = e_1 + \ldots + e_{\tilde{r}}$$

ein Idempotent in X und es existiert die Peirce-Zerlegung

$$X = P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \oplus P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \oplus P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \tag{4.1.1}$$

von X bezüglich $\vec{e_{\tilde{r}}}$. $X_{\tilde{r}} = P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)$ ist eine einfache Jordan-Algebra der Dimension $m_{\tilde{r}}$ mit Einselement $\vec{e_{\tilde{r}}}$. Analog ist $\vec{e}^{\#}_{\tilde{r}} := \sum_{j=1}^{\tilde{r}} e^{\#}_j$ ein Idempotent in $X^{\#}$ und $X^{\#}_{\tilde{r}} := P_{1,\vec{e}^{\#}_{\tilde{r}}}(X^{\#})$ eine einfache Jordan-Algebra mit Einselement $\vec{e}^{\#}_{\tilde{r}}$.

$G_{\tilde{r}} := \Gamma(X_{\tilde{r}})^0$ sei die Zusammenhangskomponente des Einselementes der Strukturgruppe von $X_{\tilde{r}}$. Da α mit (1.2.9) den Jordan-Rahmen $\{e_1, \ldots, e_r\}$ invariant läßt, existiert die Einschränkung $\tilde{\alpha} := \alpha|_{X_{\tilde{r}}}$ auf $X_{\tilde{r}}$. Weil $\lambda_{\tilde{\alpha}} := (\lambda_\alpha |_{X_{\tilde{r}} \times X_{\tilde{r}}})$ eine positiv definite Bilinearform ist, ist $\tilde{\alpha}$ eine Involution, so daß die Modifikation $(X_{\tilde{r}})_{\tilde{\alpha}}$ formalreell ist. Analog Definition 1.2.13 und Korollar 1.2.14 existiert eine Symmetrie $\tilde{\sigma} : G_{\tilde{r}} \longrightarrow G_{\tilde{r}}$, die die abgeschlossene Untergruppe

$$K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} := \{\tilde{\gamma} \in G_{\tilde{r}} : \ \tilde{\sigma}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}\}$$

von $G_{\tilde{r}}$ definiert. Der Quotient $G_{\tilde{r}}/K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ ist wieder ein symmetrischer Raum.

Es gilt die zu Satz 1.2.35 analoge Spektralaussage

$$K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} \cdot \Theta_{\tilde{r}} = X_{\tilde{r}} \ ,$$

wobei $\Theta_{\tilde{r}} := \langle e_1, \ldots, e_{\tilde{r}} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{G}_{\tilde{r}}$ von $G_{\tilde{r}}$ ist mit (1.2.3) gegeben als

$$\mathfrak{G}_{\tilde{r}} = aut(X_{\tilde{r}}) + M_{X_{\tilde{r}}} \ .$$

Wegen (1.2.4) gilt $aut(X_{\tilde{r}}) = int(X_{\tilde{r}}) = \langle [M_{\tilde{x}}, M_{\tilde{y}}] : \ \tilde{x}, \tilde{y} \in X_{\tilde{r}} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\mathfrak{G}_{\tilde{r}}$ erweist sich als eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{G}$. Da $G_{\tilde{r}}$ zusammenhängend ist, gibt es eine Einbettung $\iota : G_{\tilde{r}} \hookrightarrow G$ von $G_{\tilde{r}}$ als Lie-Untergruppe von G. Per Definiton gilt $X_{\tilde{r}} = P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)$, weshalb mit [BK, Satz IV.5.7] folgt:

$$\begin{aligned} X_{\tilde{r}} \cdot X_{\tilde{r}} &\subset X_{\tilde{r}} \ ; \\ X_{\tilde{r}} \cdot P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) &\subset P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}} \ ; \\ X_{\tilde{r}} \cdot P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) &\subset \{0\} \ . \end{aligned}$$

Deshalb ergibt sich für die Darstellung von $\exp_{\mathfrak{G}}(\tilde{B})$, $\tilde{B} \in \mathfrak{G}_{\tilde{r}}$, bezüglich der Zerlegung $X = P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \oplus P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \oplus P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)$:

$$\exp_{\mathfrak{G}}(\widetilde{B}) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} \in GL(P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X))$ und $\widetilde{\gamma}_1 = \exp_{\mathfrak{G}_{\tilde{r}}} \widetilde{B} \in G_{\tilde{r}} \subset GL(X_{\tilde{r}})$. Hierbei seien $\exp_{\mathfrak{G}_{\tilde{r}}} : \mathfrak{G}_{\tilde{r}} \to G_{\tilde{r}}$ und $\exp_{\mathfrak{G}} : \mathfrak{G} \to G$ die Exponentialabbildungen der Lie-Gruppen $G_{\tilde{r}}$ und G. Damit ist insbesondere

$$\iota(\widetilde{\gamma}) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit geeignetem $\widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} \in GL(P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X))$, wobei $\widetilde{\gamma}_1$ als Endomorphismus von $X_{\tilde{r}}$ identisch ist mit $\widetilde{\gamma}$. Umgekehrt gibt es eine Restriktionsabbildung $\varpi : \iota(G_{\tilde{r}}) \to G_{\tilde{r}}$, so daß $\varpi \circ \iota = id_{G_{\tilde{r}}}$, nämlich

$$\varpi : \iota(G_{\tilde{r}}) \longrightarrow G_{\tilde{r}} \; ; \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \varpi(\iota(\tilde{\gamma})) = \tilde{\gamma} \; .$$

Lemma 4.1.2 *Für die Einschränkung $\sigma \circ \iota$ von σ auf $G_{\tilde{r}}$ gilt:*

$$\sigma \circ \iota(G_{\tilde{r}}) \subset \iota(G_{\tilde{r}}) \; .$$

Beweis: Sei $\widetilde{B} \in \mathfrak{G}_{\tilde{r}}$, mit $\exp_{\mathfrak{G}_{\tilde{r}}} \widetilde{B} = \widetilde{\gamma} \in G_{\tilde{r}}$ und $\iota(\widetilde{B}) =: B$ die Einbettung von $\widetilde{B}$ in $\mathfrak{G}$. Aufgrund (1.2.3) gibt es geeignete $\widetilde{x}_j, \widetilde{y}_j, \widetilde{z}_j \in X_{\tilde{r}}$, so daß

$$\widetilde{B} = \sum_{j=1}^{j_0} M_{\widetilde{x}_j} + \sum_{l=1}^{l_0} \left[M_{\widetilde{y}_l}, M_{\widetilde{z}_l}\right] \; .$$

Im Beweis der Lemmata 1.2.29 und 1.2.37 wurde gezeigt, daß

$$\widetilde{B}^{\lambda_{\tilde{\alpha}}} = \sum_{j=1}^{j_0} M_{\widetilde{x}_j} - \sum_{l=1}^{l_0} \left[M_{\widetilde{y}_l}, M_{\widetilde{z}_l}\right] = B^{\lambda_\alpha} \; .$$

Da $\left(\iota(\widetilde{B})\right)^{\lambda_\alpha} = \iota(\widetilde{B}^{\lambda_{\tilde{\alpha}}})$, folgt aufgrund der Definition der Einbettung $\iota : G_{\tilde{r}} \to G$, daß $\left(\iota(\widetilde{\gamma})\right)^{\lambda_\alpha} = \iota\left(\widetilde{\gamma}^{\lambda_{\tilde{\alpha}}}\right)$. Damit gilt $\iota\left(G_{\tilde{r}}\right)^{\lambda_\alpha} \subset \iota\left(G_{\tilde{r}}\right)$, also auch

$$(\sigma \circ \iota)(G_{\tilde{r}}) \subset \iota(G_{\tilde{r}}) \; .$$

□

Mit Lemma 4.1.2 ist die Einschränkung

$$\sigma|_{G_{\tilde{r}}} := \varpi \circ \sigma \circ \iota : G_{\tilde{r}} \longrightarrow G_{\tilde{r}}$$

der Symmetrie σ auf $G_{\tilde{r}}$ wohldefiniert und es gilt das

Lemma 4.1.3 *Für die Einschränkung der Symmetrie σ gilt:*

$$\sigma|_{G_{\tilde{r}}} = \tilde{\sigma} \; .$$

Beweis: Es sei $\widetilde{\gamma} \in G_{\tilde{r}}$ beliebig und $\iota(\widetilde{\gamma}) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Für

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_{\frac{1}{2}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $\gamma_1 \circ \gamma_{\frac{1}{2}} = \iota(\widetilde{\gamma})$ und $[\gamma_1, \gamma_{\frac{1}{2}}] = 0$. Die Bildung der adjungierten Abbildung $\gamma \mapsto \gamma^\lambda$ ist auf ganz $GL(X)$ definiert, deshalb folgt hieraus

$$\iota(\widetilde{\gamma})^{\lambda_\alpha} = \gamma_1^{\lambda_\alpha} \circ \gamma_{\frac{1}{2}}^{\lambda_\alpha} \; . \tag{4.1.4}$$

Da

$$\Big(P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) + P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)\Big) \cdot P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \subset P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)$$

und

$$P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \cdot P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \subset P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) + P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \; ,$$

folgt $\mathrm{Tr}(M_{x_{\frac{1}{2}}}) = 0$ für alle $x_{\frac{1}{2}} \in P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)$. Damit sind die verschiedenen Peirce-Komponenten bezüglich λ orthogonal. Da α den Jordan-Rahmen $\{e_1, \dots, e_r\}$ invariant läßt, gilt:

$$\begin{aligned} \alpha\Big(P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)\Big) &= P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \; , \\ \alpha\Big(P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)\Big) &= P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \; , \\ \alpha\Big(P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X)\Big) &= P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}}(X) \; , \end{aligned}$$

und die Peirce-Komponenten sind auch bezüglich λ_α orthogonal. Seien nun $x, y \in X$ mit Peirce-Zerlegungen $x = x_1 + x_{\frac{1}{2}} + x_0, \;\; y = y_1 + y_{\frac{1}{2}} + y_0$ und

$$\gamma_1' := \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1^{\lambda_{\tilde{\alpha}}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Dann folgt wegen $\lambda_{\tilde{\alpha}} = \lambda_\alpha|_{X_{\tilde{r}} \times X_{\tilde{r}}}$:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha\Big(\gamma_1(x_1 + x_{\frac{1}{2}} + x_0), y_1 + y_{\frac{1}{2}} + y_0\Big) &= \lambda_\alpha\Big(\widetilde{\gamma}_1(x_1), y_1\Big) + \lambda_\alpha(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}) + \lambda_\alpha(x_0, y_0) \\ &= \lambda_\alpha\Big(x_1, \tilde{\gamma}^{\lambda_{\tilde{\alpha}}}(y_1)\Big) + \lambda_\alpha(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}) + \lambda_\alpha(x_0, y_0) \\ &= \lambda_\alpha\Big(x, \gamma_1'(y)\Big) \; . \end{aligned}$$

Also ist

$$\gamma_1^{\lambda_\alpha} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^{\lambda_{\tilde{\alpha}}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und da $\iota(\widetilde{\gamma})^{\lambda_\alpha} \in \iota(G_{\tilde{r}})$ folgt aus (4.1.4):

$$\iota(\widetilde{\gamma})^{\lambda_\alpha} = \iota(\widetilde{\gamma}^{\lambda_{\tilde{\alpha}}}) ,$$

also die Behauptung. □

Korollar 4.1.5 *Für die Einbettung der Spektralgruppe bezüglich $X_{\tilde{r}}$ gilt:*

$$\iota(K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}) \subset K^\sigma .$$

Beweis: Für $\widetilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ gilt $\widetilde{k}^{\lambda_\alpha} = \widetilde{k}^{-1}$, und es folgt mit Lemma 4.1.3

$$\left(\iota(\widetilde{k})\right)^{\lambda_\alpha} = \iota(\widetilde{k}^{\lambda_{\tilde{\alpha}}}) = \iota(\widetilde{k}^{-1}) = \left(\iota(\widetilde{k})\right)^{-1} ,$$

was gleichbedeutend mit $\iota(\widetilde{k}) \in K^\sigma$ ist. □

Beispiel 4.1.6 Bezüglich $\vec{e_{\tilde{r}}} := id_{11} + \ldots + id_{\tilde{r}\tilde{r}} \in Sym(r;\mathbb{R})$ ergibt sich die Peirce-1-Komponente $P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(Sym(r;\mathbb{R})) = Sym(\tilde{r};\mathbb{R})$ und $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} = SO(\tilde{r};\mathbb{R})$ mit den kanonischen Einbettungen in $Sym(r;\mathbb{R})$, beziehungsweise $SO(r;\mathbb{R})$. Sei $\widetilde{k} \in SO(\tilde{r};\mathbb{R})$ und

$$x := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2^T & x_4 \end{pmatrix} \in Sym(r;\mathbb{R}) ,$$

mit $x_1 \in Sym(\tilde{r};\mathbb{R}), x_4 \in Sym(r-\tilde{r};\mathbb{R})$ und $x_2 \in Mat(\tilde{r}, r-\tilde{r};\mathbb{R})$. Dann ergibt sich für die Operation von $\iota(SO(\tilde{r};\mathbb{R}))$ auf $Sym(r;\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \iota(\widetilde{k})(x) &= \begin{pmatrix} \widetilde{k} & 0 \\ 0 & id_{\mathbb{R}^{r-\tilde{r}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2^T & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{k}^T & 0 \\ 0 & id_{\mathbb{R}^{r-\tilde{r}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \widetilde{k}x_1\widetilde{k}^T & \widetilde{k}x_2 \\ (\widetilde{k}x_2)^T & x_4 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\iota(\widetilde{k}) = \begin{pmatrix} \tilde{k}' & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL\Big(Sym(\tilde{r};\mathbb{R}) \oplus Mat(\tilde{r}, r-\tilde{r};\mathbb{R}) \oplus Sym(r-\tilde{r};\mathbb{R})\Big) ,$$

wobei $\widetilde{k}'$ der lineare Endomorphismus von $Sym(\tilde{r};\mathbb{R})$ ist, der die Abbildung

$$Sym(\tilde{r};\mathbb{R}) \longrightarrow Sym(\tilde{r};\mathbb{R}) : \ x_1 \mapsto \widetilde{k} x_1 \widetilde{k}^T$$

beschreibt. Also ist $\widetilde{k}' \in GL(Sym(\tilde{r};\mathbb{R}))$ im Sinne der Operation von $SO(\tilde{r};\mathbb{R})$ auf $Sym(\tilde{r};\mathbb{R})$ identisch mit $\widetilde{k} \in SO(\tilde{r};\mathbb{R})$.

Analog ergibt sich $P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}(Mat(r;\mathbb{R})) = Mat(\tilde{r};\mathbb{R})$ und $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} = SO(\tilde{r};\mathbb{R}) \times SO(\tilde{r};\mathbb{R})$ im Fall $X = Mat(r;\mathbb{R})$.

Beispiel 4.1.7 Für die nicht formalreelle Jordan-Algebra $\mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}^{m-2}$ ergibt sich bezüglich $\vec{e_{\tilde{r}}} := e_1 = \frac{1}{2}(1, i, 0, \ldots, 0)$ die Jordan-Unteralgebra

$$P_{1,\vec{e_{\tilde{r}}}}\left(\mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}^{m-2}\right) = \mathbb{R} \cdot e_1$$

und die triviale Gruppe $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} = SO(1;\mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}}\}$.

Konvention 4.1.8 Wegen der Existenz der Einbettungen $\iota : G_{\tilde{r}} \hookrightarrow G$, beziehungsweise $\iota : K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} \hookrightarrow K^{\sigma}$ werden $G_{\tilde{r}}$, beziehungsweise $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ als Untergruppen von G, beziehungsweise K^{σ} aufgefaßt. Im folgenden werden dafür die vereinfachten Schreibweisen $G_{\tilde{r}} \subset G$ und $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} \subset K^{\sigma}$ benutzt. Die Einbettung ι wird nur noch dann explizit verwendet, wenn eine andernfalls unklare Situation dies erfordert.

$\mathbb{R}$ ist die einzige formalreelle Jordan-Algebra, die durch eine Peirce-1-Projektion aus einer nicht formalreellen Jordan-Algebra entsteht. Dies ergibt sich aus dem folgenden Lemma über die relative Stabilität der Kegelzahl. Zur Notation sei angemerkt, daß $r_c(X)$ die Kegelzahl von X und $r_c(X_{\tilde{r}})$ entsprechend die Kegelzahl von $X_{\tilde{r}}$ bezeichnet.

Lemma 4.1.9 *Für alle $\tilde{r} = 1, \ldots, r$ gilt:*

$$r_c(X_{\tilde{r}}) = \begin{cases} \tilde{r}+1 \ , & \text{falls } r_c(X) = r+1 \ , \\ 2 \ , & \text{falls } r_c(X) = 2 \ . \end{cases}$$

Beweis:

Im ersten Fall gelte $r_c(X) = r + 1$. Wegen Satz 2.1.20 ist $r_c(X_{\tilde{r}}) \leq \tilde{r} + 1$. Angenommen, $r_c(X_{\tilde{r}}) < \tilde{r} + 1$. Dann gibt es ein $\tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$, so daß $\tilde{k}(\vec{e_{\tilde{r}\tilde{p}}}) = \vec{e}_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ mit $\tilde{p} \neq \tilde{p}'$, $\tilde{p}, \tilde{p}' \in \{0, \ldots, \tilde{r}\}$. Mit $\iota(\tilde{k}) =: k \in K^\sigma$ folgt nun $k(\vec{e_{rp}}) = \vec{e}_{rp'}$. Dies impliziert jedoch $r_c(X) < r + 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung dieses Falles.

Sei im zweiten Fall $r_c(X) = 2$. Angenommen, $r_c(X_{\tilde{r}}) = 1$. Dann gibt es ein $\tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$, so daß $\tilde{k}(e_1) = -e_1$ und $\widetilde{k}(e_j) = e_j$, $j = 2, \ldots, \tilde{r}$. Da $\iota(\tilde{k}) \in K^\sigma$ und K^σ alle Permutationen der Menge $\{e_1, \ldots, e_r\}$ enthält, würde im Widerspruch zur Annahme $r_c(X) = 1$ folgen.

Nun nehme man an, daß $r_c(X_{\tilde{r}}) \geq 3$. Insbesondere ist dann $\tilde{r} \geq 2$. Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\vec{e}_{\tilde{r}0}, \vec{e}_{\tilde{r}1}$ und $\vec{e}_{\tilde{r}2}$ drei Elemente aus $\{\vec{e_{\tilde{r}\tilde{p}}} : \tilde{p} = 0, \ldots, \tilde{r}\}$, die durch Elemente aus $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ nicht paarweise aufeinander abgebildet werden können. Da $r_c(X) = 2$, gibt es wegen Satz 2.2.5 ein $k \in W(\Theta)$, so daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k\vec{e}_{\tilde{r}0} = \vec{e}_{\tilde{r}1}$. Durch Verkettung mit geeigneten Permutationen w_{ij}, $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, läßt sich ein $k_1 \in K^\sigma$ bilden, so daß sowohl $k_1(\widetilde{\Theta}) \subset \widetilde{\Theta}$, als auch weiterhin $k_1(\vec{e}_{\tilde{r}0}) = \vec{e}_{\tilde{r}1}$ gilt. Damit liegt die Einschränkung von k_1 auf $\tilde{\Theta}$ in $W(\widetilde{\Theta})$ und die Annahme erweist sich als falsch. Dies beweist das Lemma auch im Fall $r_c(X) = 2$. $\square$

Bemerkung 4.1.10 Ist X formalreell, dann kann man Lemma 4.1.9 auch elegant beweisen, indem man beachtet, daß λ_α positiv definit ist. Dies impliziert, daß auch $\lambda_{\tilde{\alpha}}$ positiv definit ist, und die Behauptung folgt aus Satz 2.2.5, welcher besagt, daß $r_c(X) = r + 1$ und $r_c(X_{\tilde{r}}) = \tilde{r} + 1$. Allerdings bedarf es der Klassifikation aus Satz 2.2.9, um zu wissen, daß umgekehrt aus $r_c(X) = r+1$ schon folgt, daß X formalreell ist. Lemma 4.1.9 benutzt diese Klassifikation nicht.

Konvention 4.1.11
Von nun an sei $\tilde{p} \in \{0, \ldots, p\}$ fest gewählt, so daß $\tilde{r} - \tilde{p} \leq r - p$.

Definition 4.1.12

1. Die durch das Tupel $(\tilde{r}, \tilde{p})$ bestimmte *Facette* von Θ_{rp} sei
$$\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}} := \langle -e_1, \ldots, -e_{\tilde{p}}, e_{\tilde{p}+1}, \ldots, e_{\tilde{r}} \rangle_{\mathbb{R}_+} \subset \Theta_{\tilde{r}} \ .$$

2. Die durch das Tupel $(\tilde{r}, \tilde{p})$ bestimmte *spezielle Facette* von Λ_p sei
$$\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} := K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} \cdot \Theta_{\tilde{r}\tilde{p}} \subset \overline{\Lambda_p} \subset X \ .$$

3. Die durch das Tripel $(k, \tilde{r}, \tilde{p})$ bestimmte *allgemeine Facette* von Λ_p sei
$$k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} := \left\{ k(\tilde{k}\tilde{\theta}) : \ \tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}, \ \tilde{\theta} \in \Theta_{\tilde{r}\tilde{p}} \right\} \subset \overline{\Lambda_p} \subset X \ .$$

Die hier gewählte Definition der Facetten von Θ_{rp} wirkt ein wenig unnatürlich, weil $\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}$ im allgemeinen nicht im Rand von Θ_{rp} liegt. Für alle zulässigen Werte von $\tilde{p}$ gilt darüber hinaus $\langle \Theta_{\tilde{r}\tilde{p}} \rangle_{\mathbb{R}} = X_{\tilde{r}}$. Mit der vorliegenden Definition 4.1.12 vereinfacht sich jedoch ein großer Teil des Formalismus der folgenden Rechnungen, und da K^σ alle Permutationen von $\{e_1, \ldots, e_r\}$ enthält, ergibt sich dieselbe Menge allgemeiner Facetten von Λ_p wie im Falle der „natürlicher“ wirkenden Definition
$$\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}{}' := \langle -e_1, \ldots, -e_{\tilde{p}}, e_{r-p+1}, \ldots, e_{r-p+\tilde{r}-\tilde{p}} \rangle_{\mathbb{R}_+}$$
als „echte“ Facetten von Θ_{rp}.

$\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}$ ist ein Orthant in $\Theta_{\tilde{r}}$ mit $\dim \Theta_{\tilde{r}\tilde{p}} = \tilde{r}$. Die allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ ist offen in $kX_{\tilde{r}}$. Mit dem Produkt
$$\diamond_k : kX_{\tilde{r}} \times kX_{\tilde{r}}; \ (k\tilde{x}, k\tilde{x}') \longmapsto k(\tilde{x} \diamond \tilde{x}')$$
ist $kX_{\tilde{r}}$ eine einfache Jordan-Algebra mit Einselement $k\vec{e_{\tilde{r}}}$. Bezüglich des Jordan-Rahmens $\{ke_1, \ldots, ke_{\tilde{r}}\}$ von $kX_{\tilde{r}}$ ist $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ ein offener, von dem Orthanten $k\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}$ erzeugter Kegel der Signatur $\tilde{p}$ in $kX_{\tilde{r}}$.

Beispiel 4.1.13 Betrachtet man den nicht konvexen Kegel $\Lambda_{+-} \subset Sym(2; \mathbb{R})$, so sind zunächst $\Theta_{10} = \mathbb{R}_+ \cdot e_1$ und $\Theta_{11} = \mathbb{R}_+ \cdot (-e_1)$ die einzigen Facetten von Θ_{+-}. Da $P_{1,\vec{e}_1}(Sym(2; \mathbb{R})) = Sym(2; \mathbb{R})_1 \cong Sym(1; \mathbb{R})$, ist $K_1^{\tilde{\sigma}}$ die triviale Gruppe. Damit ergeben sich die speziellen Facetten
$$\begin{aligned} \Lambda_{10} &= \{id_{\mathbb{R}}\} \cdot \Theta_{10} = \mathbb{R}_+ \cdot e_1 \ , \\ \Lambda_{11} &= \{id_{\mathbb{R}}\} \cdot \Theta_{11} = \mathbb{R}_+ \cdot (-e_1) \ . \end{aligned}$$

Die Operation von K^σ erzeugt die Menge aller allgemeinen Facetten der Dimension eins, welche gerade die Menge aller eindimensionalen Halbräume in $\partial_{Sym(2;\mathbb{R})}(\Lambda_{+-})$

ist. Hierbei sei für eine beliebige Menge O' in einem topologischen Raum O mit $\partial_O O'$ der Rand von O' relativ O bezeichnet. In Abbildung 4.1.14 sind die speziellen und exemplarisch einige der allgemeinen Facetten von Λ_{+-} dargestellt. Es fällt auf, daß die beiden verschiedenen allgemeinen Facetten $\mathbb{R}_+ \cdot e_1$ und $\mathbb{R}_+ \cdot (-e_1)$ denselben Vektorraum $\mathbb{R} \cdot e_1 = Sym(2;\mathbb{R})_1 \subset Sym(2;\mathbb{R})$ erzeugen. Für den konvexen Kegel Λ_{++} in $Sym(2;\mathbb{R})$ gilt hingegen, daß $k\Lambda_{11} \neq k'\Lambda_{11}$ auch $kSym(2;\mathbb{R})_1 \neq k'Sym(2;\mathbb{R})_1$ impliziert.

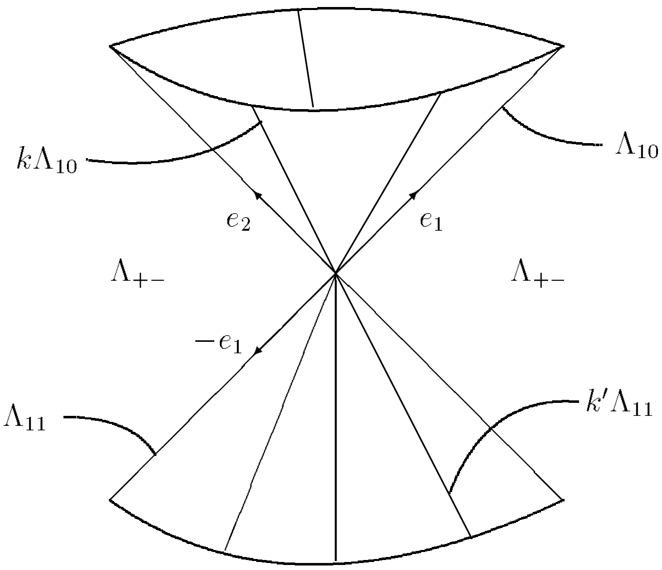

Abbildung 4.1.14: Allgemeine Facetten von $\Lambda_{+-} \subset Sym(2;\mathbb{R})$.

Bemerkung 4.1.15 Üblicherweise nennt man eine Teilmenge F des Randes eines konvexen Kegels Λ eine Facette, wenn für alle $x \in F, x_1, x_2 \in \overline{\Lambda}$ und $0 \leq \mu \leq 1$ mit $x = \mu x_1 + (1-\mu)x_2$ folgt, daß auch x_1, x_2 in F liegen. Nach dieser Definition wäre in Beispiel 4.1.13 Θ_{10} zwar eine Facette von $\Theta_{+-} = \Theta_{21}$, aber Λ_{10} keine von Λ_{+-}. Eine Facette in diesem Sinne wäre der von Λ_{10} erzeugte Unterraum $X_1 = \mathbb{R} \cdot e_1$, aber wie spätere Resultate zeigen werden (zum Beispiel Theorem 6.2.23), müssen $\mathbb{R}_+ \cdot e_1$ und $\mathbb{R}_+ \cdot (-e_1)$ als Facetten von Λ_{+-} unterschieden werden. Daß verschiedene allgemeine Facetten denselben Vektorraum erzeugen können, verursacht unter anderem die Hauptschwierigkeiten im Beweis des wichtigen Theorems 6.2.23. Diese Besonderheit ist nur im Zusammenhang mit nicht konvexen Kegeln zu beobachten, wie die nächste Präposition zeigt.

Präposition 4.1.16 *Ist Λ_p konvex und sind $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, $k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ zwei Facetten von Λ_p mit $kX_{\tilde{r}} = k'X_{\tilde{r}}$, dann folgt $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} = k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$.*

Beweis: Da Λ_p konvex ist, ist X formalreell und ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann

$$\Lambda_p = K^\sigma \cdot \langle e_1, \dots, e_r \rangle_{\mathbb{R}_+} = \Lambda_0$$

und $k' = id_X$ angenommen werden. Wegen $p = 0$ folgt $\tilde{p} = 0 = \tilde{p}'$. Sei $l \in \{1, \dots, \tilde{r}\}$ beliebig. Da $kX_{\tilde{r}} = X_{\tilde{r}}$ gibt es ein $\tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ und $\mu_1, \dots, \mu_{\tilde{r}} \in \mathbb{R}$, so daß

$$k\tilde{k} \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \mu_j e_j = e_l \; .$$

Weil X formalreell ist, ist $K^\sigma = Aut(X)^0$. Deshalb gilt $(k'e_l)^2 = k'(e_l \diamond e_l) = k'e_l$ für alle $k' \in K^\sigma$ und man erhält, daß

$$(k\tilde{k})^{-1} \, e_l = \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \mu_j e_j$$

ein Idempotent in $X_{\tilde{r}}$ ist. Da $e_1, \dots, e_{\tilde{r}}$ paarweise orthogonal zueinander sind, folgt hieraus

$$\left(\sum_{j=1}^{\tilde{r}} \mu_j e_j \right)^2 = \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \mu_j^2 e_j = \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \mu_j e_j \; .$$

Die lineare Unabhängigkeit von $\{e_1, \dots, e_{\tilde{r}}\}$ impliziert $\mu_j^2 = \mu_j$, also $\mu_j \in \{0, 1\}$ für alle $j = 1, \dots, \tilde{r}$. Also ist $e_l \in kK_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} \cdot \langle e_1, \dots, e_{\tilde{r}} \rangle_{\mathbb{R}_+}$. Es folgt $\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} \subset k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ und analog zeigt man $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} \subset \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$. Damit erweisen sich die beiden allgemeinen Facetten als gleich. □

Analog Definition 3.1.6 definiert jede allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von Λ_p einen Hardy-Raum

$$H_{\tilde{p}}^2(ikX_{\tilde{r}}) := \left\{ \tilde{h} \in L^2(ikX_{\tilde{r}}) : \; (\tilde{h})^\#(\tilde{\xi}) = 0 \text{ für fast alle } \tilde{\xi} \in X_{\tilde{r}}^\# \setminus k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\# \right\}$$

in $L^2(ikX_{\tilde{r}})$. Hierbei ist die *Fourier-Transformation relativ $X_{\tilde{r}}$*

$$\mathcal{F}_{\tilde{r}}^k : L^2(ikX_{\tilde{r}}) \longrightarrow L^2(ikX_{\tilde{r}}); \; \tilde{h} \longmapsto \tilde{h}^\#$$

definiert durch

$$\tilde{h}^\#(\tilde{\xi}) := \frac{1}{(2\pi)^{m_{\tilde{r}}}} \int_{kX_{\tilde{r}}} e^{-i\tilde{\xi}(\tilde{x})} \tilde{h}(i\tilde{x}) d\tilde{x}$$

für alle $\tilde{\xi} \in kX_{\tilde{r}}^\#$. Die zugehörige orthogonale Szegö-Projektion

$$\ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}}^k} : L^2(ikX_{\tilde{r}}^\#) \longrightarrow H_{\tilde{p}}^2(ikX_{\tilde{r}})$$

ist ein Linksfaltungsoperator, definiert durch das distributive Maß

$$E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} := (\mathcal{F}^k_{\tilde{r}})^{-1}(\chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}) \ ,$$

wobei $M_{\chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}$ der durch $k\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}$ gegebene charakteristische Multiplikator ist. Es gilt:

$$\chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} = \chi_{\overline{\Lambda_p}}\Big|_{kX_{\tilde{r}}} \ . \tag{4.1.17}$$

Für jedes $k \in K^\sigma$ existiert das kommutative Diagramm (Lemma 3.1.11)

$$\begin{array}{ccc}
L^2(ikX_{\tilde{r}}) & \xrightarrow{\mathcal{F}^k_{\tilde{r}}} & L^2(kX^{\#}_{\tilde{r}}) \\
{\scriptstyle \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle M_{\chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}} \\
H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}) & \xrightarrow{\mathcal{F}^k_{\tilde{r}}} & L^2(k\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}})
\end{array} \ .$$

Für jedes $k \in K^\sigma$ induziert der unitäre Operator $\tau_{k^{-1}} : L^2(iX_{\tilde{r}}) \longrightarrow L^2(ikX_{\tilde{r}})$ mit

$$(\tau_{k^{-1}}\tilde{h})(\tilde{s}) := \tilde{h}(k^{-1}s), \quad \tilde{s} \in ikX_{\tilde{r}} \ , \tag{4.1.18}$$

einen *-Algebraisomorphismus

$$Ad(k^{-1}) : \mathcal{L}\Big(L^2(iX_{\tilde{r}})\Big) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde{r}})\Big) \tag{4.1.19}$$

mit

$$Ad(k^{-1})(T)(\tilde{h}) := \Big(\tau_{k^{-1}} \circ T \circ \tau_k\Big)(\tilde{h}) \tag{4.1.20}$$

für alle $T \in \mathcal{L}(L^2(iX_{\tilde{r}}))$ und $\tilde{h} \in L^2(ikX_{\tilde{r}})$.

Lemma 4.1.21 *Das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc}
L^2(iX_{\tilde{r}}) & \xrightarrow{\tau_{k-1}} & L^2(ikX_{\tilde{r}}) \\
{\scriptstyle \ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}}}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}} \\
H^2_{\tilde{p}}(iX_{\tilde{r}}) & \xrightarrow{\tau_{k-1}} & H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})
\end{array} \ .$$

Insbesondere gilt für $\tilde{r} = r$:

$$Ad(k^{-1})(\ell_{E_p}) = \ell_{E_p}.$$

Beweis: Seien $k \in K^\sigma, \tilde{h} \in L^2(ikX_{\tilde{r}})$ und $\tilde{s} \in ikX_{\tilde{r}}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& Ad(k^{-1})(\ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}}})(\tilde{h})(\tilde{s}) \\
= \; & \ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}}}(\tau_k\tilde{h})(k^{-1}\tilde{s}) \\
= \; & \int_{iX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s}-k\tilde{t})E_{\tilde{r}\tilde{p}}(d\tilde{t}) \\
= \; & \int_{iX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s}-k\tilde{t}) \int_{X_{\tilde{r}}^{\#}} \chi_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tilde{\xi})e^{\tilde{\xi}(\tilde{t})}\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{t} \\
\overset{\tilde{t}':=k\tilde{t}}{=} \; & \int_{ikX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s}-\tilde{t}') \int_{X_{\tilde{r}}^{\#}} \chi_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tilde{\xi})e^{\tilde{\xi}(k^{-1}\tilde{t}')}\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{t}' \ .
\end{aligned}$$

Da $k \in K^\sigma$ gilt $(k^{-1})^{\lambda_\alpha} = k$ und damit $\tilde{\xi}(k^{-1}\tilde{t}') = (k\tilde{\xi})(\tilde{t}')$ für alle $\tilde{\xi} \in X_{\tilde{r}}^{\#}, \tilde{t}' \in kX_{\tilde{r}}$. Mit $\tilde{\xi}' := k\tilde{\xi}$ für alle $\tilde{\xi} \in X_{\tilde{r}}^{\#}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \int_{ikX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s}-\tilde{t}') \int_{X_{\tilde{r}}^{\#}} \chi_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tilde{\xi})e^{\tilde{\xi}(k^{-1}\tilde{t}')}\, d\tilde{\xi}\, d\tilde{t}' \\
\overset{\xi':=k\xi}{=} \; & \int_{ikX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s}-\tilde{t}') \int_{kX_{\tilde{r}}^{\#}} \chi_{\tilde{r}\tilde{p}}(k^{-1}\tilde{\xi}')e^{\tilde{\xi}'(\tilde{t}')}\, d\tilde{\xi}'\, d\tilde{t}' \\
= \; & \int_{ikX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s}-\tilde{t}') \int_{kX_{\tilde{r}}^{\#}} \chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tilde{\xi}')e^{\tilde{\xi}'(\tilde{t}')}\, d\tilde{\xi}'\, d\tilde{t}' \\
= \; & \int_{ikX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s}-\tilde{t}')E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(d\tilde{t}') \\
= \; & \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}(\tilde{h})(\tilde{s}) \ .
\end{aligned}$$

Damit folgt $Ad(k^{-1})(\ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}}}) = \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}$ für alle $k \in K^\sigma$. Ist $\tilde{r} = r$, so ist $\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} = \Lambda_p$ und $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} = \Lambda_p$ für alle $k \in K^\sigma$. Dies impliziert

$$E^k_p := \mathcal{F}^{-1}(\chi_{k\Lambda_p}) = \mathcal{F}^{-1}(\chi_p) = E_p \ ,$$

also $Ad(k^{-1})(\ell_{E_p}) = \ell_{E_p}$ für alle $k \in K^\sigma$. □

Analog der Definition 3.3.3 definiert jeder durch eine allgemeine Facette bestimmte Hardy-Raum $H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})$ Toeplitz-Operatoren

$$T^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tilde{\varphi}) : H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}) \longrightarrow H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})$$

mit Symbolfunktionen $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_0(ikX_{\tilde{r}})$ und entsprechend Definition 3.3.4 die zugehörige Hardy-Toeplitz C*-Algebra

$$\mathcal{T}\Big(H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})\Big) := C^*\Big(T^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tilde{\varphi}) : \ \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_0(ikX_{\tilde{r}})\Big) \ .$$

4.2 Spezielle Limesdarstellungen von $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$

Zunächst ist es ausreichend, Darstellungen von $C_p^*(iX)$ zu konstruieren, die durch spezielle Facetten von Λ_p induziert werden. Aus diesen *speziellen Limesdarstellungen* werden danach mit Hilfe der Operation von K^σ die Darstellungen bezüglich beliebiger allgemeiner Facetten von Λ_p abgeleitet. Die konkrete Berechnung der speziellen Limesdarstellungen wird in diesem Abschnitt für die C*-Algebra $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ durchgeführt. Dazu sei analog Definition 2.3.4 die zu $\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}$ *duale Facette* $\Theta^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von $\Theta^\#_{rp}$ über die Bilinearform $\lambda_{\tilde{\alpha}}$ definiert. Mittels der wiederum durch $\lambda_{\tilde{\alpha}}$ vermittelten Coaktion von $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ ergibt sich die zu $\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ *duale Facette* $\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}$. Damit gilt:

$$\Theta^\#_{\tilde{r}\tilde{p}} = \langle -e_1^\#, \ldots, -e_{\tilde{p}}^\#, e_{\tilde{p}+1}^\#, \ldots, e_{\tilde{r}}^\# \rangle_{\mathbb{R}_+} \subset \Theta_{\tilde{r}}^\# \subset \Theta^\# \ ,$$

beziehungsweise

$$\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}} = K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} \cdot \Theta^\#_{\tilde{r}\tilde{p}} \subset X_{\tilde{r}}^\# \subset X^\# \ .$$

Auch die Facetten von Λ_p sind selbstdual, das heißt, es gilt

$$\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}} = \overline{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}} \ ,$$

wenn man $X_{\tilde{r}}$ und $X_{\tilde{r}}{}^\#$ vermöge $\lambda_{\tilde{\alpha}}$ identifiziert. Für das folgende grundlegende Lemma ist die Charakterisierung der Kegelelemente durch die charakteristische Kegelzahl p_s gemäß Satz 2.2.5 entscheidend:

Lemma 4.2.1 *Sei $(\xi^l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X^\#_{sreg}$ und $\xi^l = \sum_{1\le i\le j\le r} \xi^l_{ij}$ die Peirce-Zerlegung des Folgengliedes ξ^l, $l \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\lim_{l\to\infty} \xi^l_{ij} = \begin{cases} -\infty \cdot e_i^\# \ , & \text{falls } i = j \text{ und } \tilde{r}+1 \le i \le \tilde{r}+p-\tilde{p} \ , \\ +\infty \cdot e_i^\# \ , & \text{falls } i = j \text{ und } \tilde{r}+p-\tilde{p}+1 \le i \le r \ , \\ \xi_{ij} \ , & \text{sonst} \ , \end{cases}$$

wobei $\xi_{ij} \in X^\#_{ij}$ für alle $1 \le i, j \le r$ mit $(i,j) \notin \{(\tilde{r}+1, \tilde{r}+1), \ldots, (r,r)\}$. Dann existiert

$$\lim_{l\to\infty} P_{1,\tilde{e}_{\tilde{r}}^\#}(\xi^l) = \lim_{l\to\infty} \xi^l_{\tilde{r}} =: \xi_{\tilde{r}} \in X_{\tilde{r}}{}^\#$$

und es gilt:

$\xi_{\tilde{r}} \in \Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}$ genau dann, wenn ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\xi^l \in \Lambda_p^\#$ für alle $l \ge l_0$.

Beweis: Da $\lim_{l\to\infty} \xi^l_{ij} = \xi_{ij} \in X^\#_{ij}$ für alle $1 \le i \le j \le \tilde{r}$, existiert

$$\lim_{l\to\infty} \xi^l_{\tilde{r}} =: \xi_{\tilde{r}} \in X_{\tilde{r}}{}^\#$$

und die erste Behauptung ist gezeigt.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, sei $\xi \in X^{\#}_{sreg}$ beliebig. Da $r_c \geq 2$ ist X wegen Satz 2.2.5 eine reelle Jordan-Algebra und mit (1.1.13) folgt

$$X^{\#}_{ii} = \mathbb{R} \cdot e^{\#}_i$$

für alle $i = 1, \ldots, r$. Sei $\mu_i \in \mathbb{R}$, so daß $\xi_{ii} = \mu_i e^{\#}_i,\ i = 1, \ldots, r$. Es gilt die Neher-Formel für die Entwicklung von Jordan-Determinanten [N4, Theorem 1]

$$\det{}^{\#}_r(\xi_r - \mu_r e_r) = \det{}^{\#}_r(\xi_r) + (-\mu_r) \det{}^{\#}_{r-1}(\xi_{r-1})$$

und es folgt für $\det^{\#}_r(\xi_r)$:

$$\det{}^{\#}_r(\xi_r) = \det{}^{\#}_r(\xi_r - \xi_{rr}) + \mu_r \det{}^{\#}_{r-1}(\xi_{r-1})\ .$$

Durch iterative Anwendung dieser Entwicklung erreicht man nach $r - \tilde{r}$ Schritten:

$$\begin{aligned} \det{}^{\#}_r(\xi_r) &= \det{}^{\#}_r(\xi_r - \xi_{rr}) + \mu_r \det{}^{\#}_{r-1}(\xi_{r-1} - \xi_{(r-1)(r-1)}) + \ldots \\ &\quad \ldots + \mu_r \cdot \ldots \cdot \mu_{\tilde{r}+1} \det{}^{\#}_{\tilde{r}}(\xi_{\tilde{r}}) \end{aligned}$$

und es ergibt sich für alle $j = \tilde{r} + 1, \ldots, r$:

$$\begin{aligned} \det{}^{\#}_j(\xi_j) &= \det{}^{\#}_j(\xi_j - \xi_{jj}) + \mu_j \det{}^{\#}_{j-1}(\xi_{j-1} - \xi_{(j-1)(j-1)}) + \ldots \\ &\quad \ldots + \mu_j \cdot \ldots \cdot \mu_{\tilde{r}+1} \det{}^{\#}_{\tilde{r}}(\xi_{\tilde{r}})\ . \end{aligned}$$

Wendet man dieses Resultat auf die Folge $(\xi^l)_{l \in \mathbb{N}}$ an, so ist $\mu^l_j \cdot \ldots \cdot \mu^l_{\tilde{r}+1} \det^{\#}_{\tilde{r}}(\xi^l_{\tilde{r}})$ für alle $j = \tilde{r} + 1, \ldots, r$ der die Divergenz von $\det^{\#}_j(\xi^l_j)$ determinierende Summand, wobei μ^l_j durch $\mu^l_j e^{\#}_j = \xi^l_{jj}$ eindeutig bestimmt ist. Ist $l_0 \in \mathbb{N}$ groß genug und $l \geq l_0$, so folgt für die j-te Komponente der Signatur

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\xi^l)_j &= \operatorname{sign}\left(\frac{\det^{\#}_j(\xi^l_j)}{\det^{\#}_{j-1}(\xi^l_{j-1})}\right) \\ &= \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\dfrac{\mu^l_j \cdot \ldots \cdot \mu^l_{\tilde{r}+1} \det^{\#}_{\tilde{r}}(\xi^l_{\tilde{r}})}{\mu^l_{j-1} \cdot \ldots \cdot \mu^l_{\tilde{r}+1} \det^{\#}_{\tilde{r}}(\xi^l_{\tilde{r}})}\right) , & \text{falls } j \geq \tilde{r} + 2\ , \\ \operatorname{sign}\left(\dfrac{\mu^l_{\tilde{r}+1} \det^{\#}_{\tilde{r}}(\xi^l_{\tilde{r}})}{\det^{\#}_{\tilde{r}}(\xi^l_{\tilde{r}})}\right) , & \text{falls } j = \tilde{r} + 1\ , \end{cases} \\ &= \begin{cases} +1\ , & \text{falls } \lim\limits_{l \to \infty} \mu^l_j = +\infty\ , \\ -1\ , & \text{falls } \lim\limits_{l \to \infty} \mu^l_j = -\infty\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

$\vec{\operatorname{sign}}(\xi_{\tilde{r}}^l)$ ist wegen der Stetigkeit der Jordan-Unterdeterminanten für große l konstant und wegen $\lim_{l\to\infty} \xi_{\tilde{r}}^l = \xi_{\tilde{r}} \in X_{\tilde{r}}^\#$ gilt $\vec{\operatorname{sign}}(\xi_{\tilde{r}}^l) = \vec{\operatorname{sign}}(\xi_{\tilde{r}})$ für alle $l \geq l_0' \in \mathbb{N}$ geeignet. Ohne Einschränkung sei $l_0 = l_0'$. Dann folgt mit (4.2.2) für alle $l \geq l_0$

$$\vec{\operatorname{sign}}(\xi^l) = \Big(\vec{\operatorname{sign}}(\xi_{\tilde{r}}), \underbrace{-1,\ldots,-1}_{p-\tilde{p}\ mal}, \underbrace{1,\ldots,1}_{(r-\tilde{r})-(p-\tilde{p})\ mal}\Big) .$$

Korollar 2.3.8 impliziert nun

$$p_s(\xi^l) \equiv p_s(\xi_{\tilde{r}}) + p - \tilde{p} \text{ modulo } r_c .$$

Damit ist für alle $l \geq l_0$ genau dann $\xi^l \in \Lambda_p^\#$, wenn

$$p_s(\xi_{\tilde{r}}) \equiv \tilde{p} \text{ modulo } r_c ,$$

also genau dann, wenn $\xi_{\tilde{r}} \in \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#$. □

Definition 4.2.3

1. Es sei $\left(\Theta_{\tilde{r}}^\#\right)^\perp := \left\langle e_{\tilde{r}+1}^\#, \ldots, e_r^\# \right\rangle_{\mathbb{R}}$. Dann heißt

$$\left(\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#\right)^\perp := \left\langle -e_{\tilde{r}+1}^\#, \ldots, -e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}}^\#, +e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}+1}^\#, \ldots, e_r^\# \right\rangle_{\overline{\mathbb{R}}_+} \subset \left(\Theta_{\tilde{r}}^\#\right)^\perp$$

   die zu $\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#$ *orthogonale Facette* von $\Theta_{rp}^\#$.

2. Eine Folge $(\overline{\vartheta}^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset (\Theta_{\tilde{r}}^\#)^\perp$ *divergiert bezüglich* $(\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#)^\perp$, wenn für die Koeffizienten μ_j^l, $l \in \mathbb{N}$, $j = \tilde{r}+1, \ldots, r$, der Darstellung

$$\overline{\vartheta}^l = \sum_{j=\tilde{r}+1}^{r} \mu_j^l e_j^\#$$

   der Folgenglieder bezüglich der Basis $\{e_{\tilde{r}+1}^\#, \ldots, e_r^\#\}$ von $(\Theta_{\tilde{r}}^\#)^\perp$ gilt:

$$\lim_{l\to\infty} \mu_j^l = \begin{cases} -\infty , & \text{falls } j = \tilde{r}+1, \ldots, \tilde{r}+p-\tilde{p} , \\ +\infty , & \text{falls } j = \tilde{r}+p-\tilde{p}+1, \ldots, r . \end{cases}$$

Beispiel 4.2.4 In Beispiel 4.1.13 wurden die eindimensionalen Facetten des nicht konvexen Kegels $\Lambda_{+-} \subset Sym(2;\mathbb{R})$ betrachtet. In der zugehörigen Abbildung 4.1.14 erkennt man, daß

$$\left(\Theta_{10}^{\#}\right)^{\perp} = \left(\mathbb{R}_{+} \cdot e_1^{\#}\right)^{\perp} = \mathbb{R}_{+} \cdot (-e_2^{\#})$$

und

$$\left(\Theta_{11}^{\#}\right)^{\perp} = \left(\mathbb{R}_{+} \cdot (-e_1^{\#})\right)^{\perp} = \mathbb{R}_{+} \cdot e_2^{\#} \ .$$

Definition 4.2.5 Eine Folge $(\vartheta^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \Theta^{\#}$ *konvergiert bezüglich* $\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#}$ *gegen* $\tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^{\#}$, falls

$$\lim_{l\to\infty} \vartheta^l \Big|_{\Theta_{\tilde{r}}} = \tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^{\#}$$

und die durch Einschränkung auf $(\Theta_{\tilde{r}})^{\perp} := \langle e_{\tilde{r}+1}, \ldots, e_r \rangle_{\mathbb{R}}$ entstehende Folge

$$\left(\vartheta^l \Big|_{(\Theta_{\tilde{r}})^{\perp}}\right)_{l\in\mathbb{N}} \subset (\Theta_{\tilde{r}}^{\#})^{\perp}$$

bezüglich $(\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#})^{\perp}$ divergiert. Konvergiert $(\vartheta^l)_{l\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#}$ gegen $\tilde{\vartheta}$, so schreibt man kurz

$$\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#}} \tilde{\vartheta} \ .$$

Präposition 4.2.6 *Für alle* $\tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^{\#}$ *existiert eine Folge* $(\vartheta^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \Theta^{\#}$ *die bezüglich* $\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#}$ *gegen* $\tilde{\vartheta}$ *konvergiert.*

Beweis: Sei $\tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^{\#}$ beliebig. Dann existieren $\mu_1, \ldots, \mu_{\tilde{r}} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\vartheta} = \sum_{j=1}^{\tilde{r}} \mu_j e_j^{\#}$. Definiert man für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \vartheta^l &:= \mu_1 e_1^{\#} + \ldots + \mu_{\tilde{r}} e_{\tilde{r}}^{\#} - l e_{\tilde{r}+1}^{\#} - \ldots - l e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}}^{\#} + l e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}+1}^{\#} + \ldots + l e_r^{\#} \\ &= \tilde{\vartheta} - l e_{\tilde{r}+1}^{\#} - \ldots - l e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}}^{\#} + l e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}+1}^{\#} + \ldots + l e_r^{\#} \ , \end{aligned}$$

dann gilt zunächst $\vartheta^l \in \Theta^{\#}$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Weiterhin folgt:

1. $\vartheta^l|_{\Theta_{\tilde{r}}} = \tilde{\vartheta}$ für alle $l \in \mathbb{N}$.
2. $\vartheta^l|_{(\Theta_{\tilde{r}})^{\perp}} = -l e_{\tilde{r}+1}^{\#} - \ldots - l e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}}^{\#} + l e_{\tilde{r}+p-\tilde{p}+1}^{\#} + \ldots + l e_r^{\#}$ für alle $l \in \mathbb{N}$, und die Folge $(\vartheta^l|_{(\Theta_{\tilde{r}})^{\perp}})_{l\in\mathbb{N}}$ divergiert bezüglich $(\Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#})^{\perp}$.

Aus 1. und 2. folgt

$$\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#}} \tilde{\vartheta} \ .$$

□

Die C*-Algebra $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ wird von Multiplikationsoperatoren $\phi \star \chi_p, \phi \in L^1(X^\#)$ erzeugt. Für jeden dieser Erzeuger und alle $\xi \in X^\#$ gilt:

$$\phi \star \chi_p(\xi) = \int_{X^\#} \chi_p(\xi - \eta)\phi(\eta)\, d\eta = \int_{\xi - \Lambda_p^\#} \phi(\eta)\, d\eta \ .$$

Wird ξ nun ersetzt durch ξ^l, $l \in \mathbb{N}$, dann entsteht eine Folge von Integralwerten von ϕ über den Integrationsbereichen $\xi^l - \Lambda_p^\#$. Deshalb ist es notwendig, die charakteristischen Funktionen dieser Bereiche zu studieren.

Konvention 4.2.7 Zur Vereinfachung der Notation sei für festes $\tilde{r} \in \{0, \ldots, r\}$ die Peirce-Projektion $P_{1,\tilde{e}_{\tilde{r}}^\#}$ mit κ bezeichnet.

Satz 4.2.8 *Es gelte $\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#} \tilde{\vartheta}$ und $\tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ sei beliebig. Dann konvergieren die charakteristischen Funktionen von $\tilde{k}\vartheta^l - \Lambda_p^\#$ fast überall (bezüglich des Lebesquemaßes ω^m auf $X^\#$) gegen die charakteristische Funktion von $\kappa^{-1}(\tilde{k}\tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#)$.*

Beweis: Für fast alle $\eta \in X^\#$ ist $(\vartheta^l - \eta)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X_{sreg}^\#$. Sei nun $\eta \in X^\#$ beliebig, so daß $(\vartheta^l - \eta)_{l\in\mathbb{N}} \subset X_{sreg}^\#$. Wegen Lemma 4.2.1 gibt es genau dann ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\vartheta^l - \eta \in \Lambda_p^\#$ für alle $l \geq l_0$, wenn $\lim_{l\to\infty}(\vartheta^l - \eta)_{\tilde{r}} \in \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#$. Da $\lim_{l\to\infty}(\vartheta^l - \eta)_{\tilde{r}} = \tilde{\vartheta} - \eta_{\tilde{r}}$, ist diese Bedingung äquivalent zu $\eta_{\tilde{r}} \in \tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#$. Damit gibt es genau dann ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\eta \in \vartheta^l - \Lambda_p^\#$ für alle $l \leq l_0$, wenn $\kappa(\eta) = \eta_{\tilde{r}} \in \tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#$, also wenn $\eta_{\tilde{r}} \in \kappa^{-1}(\tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#)$. Daraus folgt die behauptete Konvergenz der charakteristischen Funktionen für den Fall $\tilde{k} = id_{X_{\tilde{r}}}$.

Sei nun $\tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ beliebig. Dann gilt wegen der $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$-Invarianz von $\Lambda_p^\#$ und $\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#$:

$$\tilde{k}\vartheta^l - \Lambda_p^\# = \tilde{k}(\vartheta^l - \Lambda_p^\#) \tag{4.2.9}$$

für alle $l \in \mathbb{N}$, beziehungsweise

$$\tilde{k}\tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\# = \tilde{k}(\vartheta - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#) \ . \tag{4.2.10}$$

Sei $\eta \in X^\#$ beliebig. Wegen (4.2.9) gibt es genau dann ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $l \geq l_0 : \eta \in \tilde{k}\vartheta^l - \Lambda_p^\#$, wenn es ein $l_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\tilde{k}^{-1}\eta \in \vartheta^l - \Lambda_p^\#$ für alle $l \geq l_0$. Mit dem im ersten Teil erreichten Resultat ist dies äquivalent zu

$$\kappa(\tilde{k}^{-1}\eta) \in \tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\# \ . \tag{4.2.11}$$

Weil κ auf $X_{\tilde{r}}^\#$ projeziert, kommutiert es mit $\tilde{k}$. Damit ist (4.2.11) gleichbedeutend mit

$$\kappa\eta \in \tilde{k}(\tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#) \overset{(4.2.10)}{=} \tilde{k}\tilde{\vartheta} - \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\# \ ,$$

was den Satzes für beliebiges $\tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ beweist. □

Beispiel 4.2.12 Die folgende Abbildung 4.2.13 verdeutlicht die Aussage des vorangehenden Satzes für den Fall der Facette $\Lambda^{\#}_{10}$ von $\Lambda^{\#}_{+-} \subset Sym(2;\mathbb{R})^{\#}$. Mit der Konvergenz von $\tilde{\vartheta}^l$ gegen $\tilde{\vartheta}$ nähert sich der Kegel $\Lambda^{\#}_{+-}$ der Geraden $\tilde{\vartheta} + (\Theta_1)^{\perp}$ und bewegt sich in Richtung der orthogonalen Facette $(\Theta^{\#}_{10})^{\perp}$ ins Unendliche. Dies erzeugt eine Menge von Punkten in $Sym(2;\mathbb{R})^{\#}$, die ab einem festen $l_0 \in \mathbb{N}$ immer innerhalb von $\vartheta^l - \Lambda^{\#}_{+-}$, $l \geq l_0$, liegen:

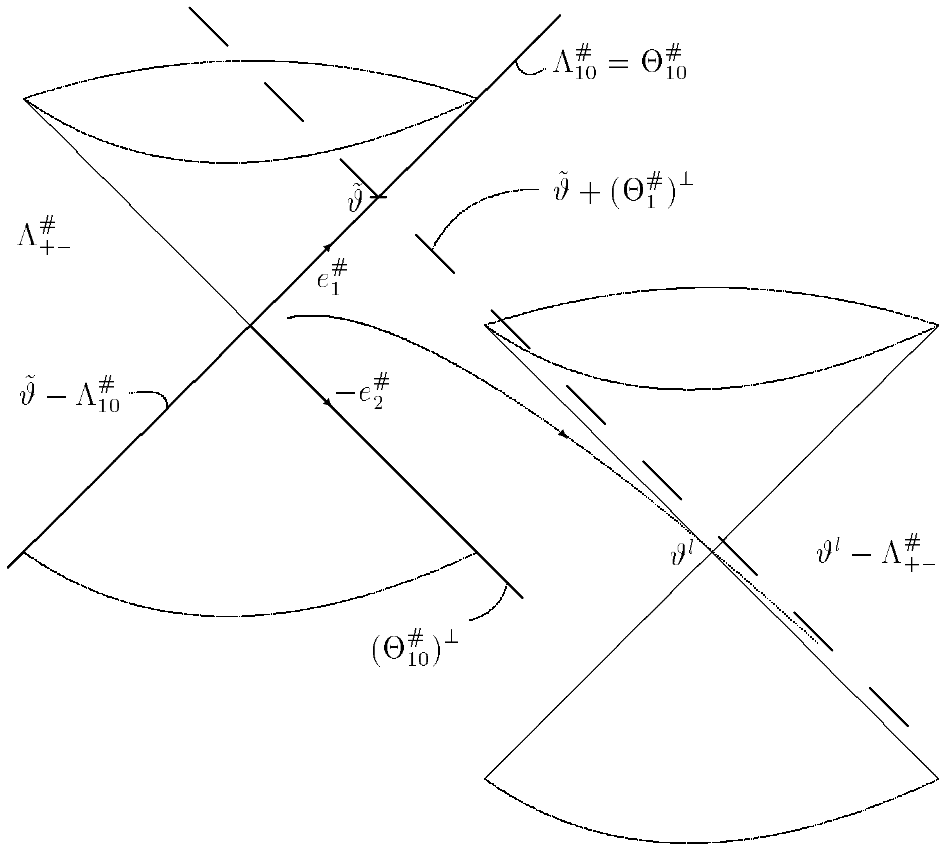

Abbildung 4.2.13: Verhalten von $\vartheta^l - \Lambda^{\#}_{+-}$.

In diesem Fall ergibt sich

$$\kappa^{-1}(\tilde{\vartheta} - \Lambda^{\#}_{10}) = (\tilde{\vartheta} - \Lambda^{\#}_{10}) \times \mathbb{R}^2 ,$$

also gerade der untere Halbraum bezüglich des Normalenvektors $e^{\#}_1$, der entlang $\Theta^{\#}_{10}$ nach $\tilde{\vartheta}$ verschoben ist.

Definition 4.2.14 Es seien H ein komplexer Hilbertraum und $\mathcal{B}$ eine C*-Algebra. Eine *Darstellung von $\mathcal{B}$ auf H* ist ein C*-Homomorphismus $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$, das heißt, eine Abbildung von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{L}(H)$, so daß

$$\begin{aligned} \pi(b+b') &= \pi(b)+\pi(b') , & \pi(\mu b) &= \mu\pi(b) , \\ \pi(bb') &= \pi(b)\pi(b') , & \pi(x^*) &= \pi(x)^* \end{aligned}$$

für alle $b, b' \in \mathcal{B}$ und $\mu \in \mathbb{C}$.

Satz 4.2.15 *Für jede spezielle duale Facette $\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von $\Lambda^\#_p$ existiert eine Darstellung $\pi^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$ auf $L^2(X^\#_{\tilde{r}})$. Sie ist bestimmt durch*

$$\pi^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}(\phi\star\chi_p)(\tilde{\xi}) = \widetilde{\psi}(\widetilde{\xi}) := \int_{\kappa^{-1}(\tilde{\xi}-\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}})} \phi(\eta)d\eta \ , \ \tilde{\xi} \in X^\#_{\tilde{r}} \ ,$$

für alle Erzeuger $\phi\star\chi_p$, $\phi \in L^1(X^\#)$, von $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Funktionen $\psi \in \mathcal{U}_b(X^\#)$, so daß für alle $\tilde{\xi} \in X^\#_{\tilde{r}}$, für alle Spektralzerlegungen $\tilde{\xi} = \tilde{k}\tilde{\vartheta}$, $\tilde{k} \in K^{\tilde{\varrho}}_{\tilde{r}}$, $\tilde{\vartheta} \in \Theta^\#_{\tilde{r}}$ und für alle Folgen $\vartheta^j \xrightarrow{\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}} \tilde{\vartheta}$ der Grenzwert

$$\lim_{j\to\infty} \psi(\tilde{k}\vartheta^j) =: \tilde{\psi}(\tilde{\xi})$$

existiert und sowohl von der Wahl der Spektralzerlegung $\tilde{\xi} = \tilde{k}\tilde{\vartheta}$, als auch von der Wahl der Folge $\vartheta^j \xrightarrow{\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}} \tilde{\vartheta}$ unabhängig ist. Aufgrund der Definition folgt direkt, daß $\mathcal{A}$ eine *-Algebra ist.

Behauptung 1: *$\mathcal{C}_0^p(X^\#) \subset \mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ ist eine abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathcal{U}_b(X^\#)$.*

Beweis der Behauptung 1: Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, sei $(\psi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathcal{A}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion ψ konvergiert. Zu zeigen ist nun, daß $\psi \in \mathcal{A}$. Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt $\psi \in \mathcal{U}_b(X^\#)$. Seien nun $\tilde{\vartheta} \in \Theta^\#_{\tilde{r}}$ und $\tilde{k} \in K^{\tilde{\varrho}}_{\tilde{r}}$ beliebig und ϑ^j eine beliebige Folge, so daß $\vartheta^j \xrightarrow{\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}} \tilde{\vartheta}$. Dann ist $\psi(\tilde{k}\vartheta^j)$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$, und es existiert eine konvergente Teilfolge $(\vartheta^{j_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (\vartheta^j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}\psi(\tilde{k}\vartheta^{j_n}) = \mu_0 \in \mathbb{C}$. Sei für ein beliebiges $\epsilon > 0$ ein $l_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß

$$||\psi - \psi_{l_0}||_\infty < \frac{\epsilon}{4} \ . \tag{4.2.16}$$

Da $\psi_{l_0} \in \mathcal{A}$, gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j, j' > j_0$

$$|\psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j'}) - \psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^j)| < \frac{\epsilon}{4} \ , \tag{4.2.17}$$

und wegen $\lim_{n\to\infty}\psi(\tilde{k}\vartheta^{j_n}) = \mu_0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, mit $j_{n_0} > j_0$, so daß für alle $n > n_0$

$$|\mu_0 - \psi(\tilde{k}\vartheta^{j_n})| < \frac{\epsilon}{4}\ . \tag{4.2.18}$$

Mit diesen Vorbereitungen ergibt sich für jedes $j > j_0$:

$$\begin{aligned}|\mu_0 - \psi(\tilde{k}\vartheta^{j_n})| &\leq \underbrace{|\mu_0 - \psi(\tilde{k}\vartheta^{j_{n_0}})|}_{<\frac{\epsilon}{4}\text{ wegen (4.2.18)}} + \underbrace{|\psi(\tilde{k}\vartheta^{j_{n_0}}) - \psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j_{n_0}})|}_{<\frac{\epsilon}{4}\text{ wegen (4.2.16)}} + \\ &\quad + \underbrace{|\psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j_{n_0}}) - \psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j})|}_{<\frac{\epsilon}{4}\text{ wegen (4.2.17)}} + \underbrace{|\psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j}) - \psi(\tilde{k}\vartheta^{j_n})|}_{<\frac{\epsilon}{4}\text{ wegen (4.2.16)}} \\ &< \epsilon\ .\end{aligned}$$

Damit existiert

$$\lim_{j\to\infty}\psi(\tilde{k}\vartheta^j) =: \mu_0 \in \mathbb{C}\ .$$

Seien nun $\tilde{k}\tilde{\vartheta} = \tilde{\xi} = \tilde{k}'\tilde{\vartheta}'$ zwei Spektralzerlegungen von $\tilde{\xi} \in X_{\tilde{r}}^{\#}$ mit $\tilde{k}, \tilde{k}' \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ und $\tilde{\vartheta}, \tilde{\vartheta}' \in \Theta_{\tilde{r}}^{\#}$; ferner seien $(\vartheta^j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(\vartheta'^j)_{j\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $\vartheta^j \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#}} \tilde{\vartheta}$, $\vartheta'^j \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^{\#}} \tilde{\vartheta}'$. Dann existieren

$$\lim_{j\to\infty}\psi(\tilde{k}\vartheta^j) =: \mu \in \mathbb{C}$$

und

$$\lim_{j\to\infty}\psi(\tilde{k}\vartheta^j) =: \mu' \in \mathbb{C}\ .$$

Nun wähle man für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \geq j_0$

$$|\mu - \psi(\tilde{k}\vartheta^j)| < \frac{\epsilon}{5} > |\mu' - \psi(\tilde{k}'\vartheta'^j)|\ , \tag{4.2.19}$$

und ℓ_0 sei wieder so gewählt, daß

$$||\psi - \psi_{l_0}||_\infty < \frac{\epsilon}{5}\ . \tag{4.2.20}$$

Da $\psi_{l_0} \in \mathcal{A}$, gilt

$$\lim_{j\to\infty}\psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^j) = \lim_{j\to\infty}\psi_{l_0}(\tilde{k}'\vartheta'^j)\ .$$

Deshalb kann j_0 so gewählt werden, daß zusätzlich zu (4.2.19)

$$|\psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j_0}) - \psi_{l_0}(\tilde{k}'\vartheta'^{j_0})| < \frac{\epsilon}{5} \tag{4.2.21}$$

gilt. Mit diesen Definitionen ergibt sich

$$\begin{aligned}|\mu - \mu'| &\leq \underbrace{|\mu - \psi(\tilde{k}\vartheta^{j_0})|}_{<\frac{\epsilon}{5}\text{ wegen (4.2.19)}} + \underbrace{|\psi(\tilde{k}\vartheta^{j_0}) - \psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j_0})|}_{<\frac{\epsilon}{5}\text{ wegen (4.2.20)}} + \underbrace{|\psi_{l_0}(\tilde{k}\vartheta^{j_0}) - \psi_{l_0}(\tilde{k}'\vartheta'^{j_0})|}_{<\frac{\epsilon}{5}\text{ wegen (4.2.21)}} \\ &\quad + \underbrace{|\psi_{l_0}(\tilde{k}'\vartheta'^{j_0}) - \psi(\tilde{k}'\vartheta'^{j_0})|}_{<\frac{\epsilon}{5}\text{ wegen (4.2.20)}} + \underbrace{|\psi(\tilde{k}'\vartheta'^{j_0}) - \mu'|}_{<\frac{\epsilon}{5}\text{ wegen (4.2.19)}} \\ &< \epsilon\ .\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß für alle $\tilde{\xi} \in X^\#_{\tilde{r}}$ der Funktionswert $\tilde{\psi}(\tilde{\xi})$ von der Spektralzerlegung $\tilde{\xi} = \tilde{k}\tilde{\vartheta}$, $\tilde{k} \in K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$, $\tilde{\vartheta} \in \Theta^\#_{\tilde{r}}$ und von der bezüglich $\Theta^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}$ gegen $\tilde{\vartheta}$ konvergierenden Folge $(\vartheta^j)_{j\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist. Es folgt $\lim_{l\to\infty} \psi_l = \psi \in \mathcal{A}$ und damit ist gezeigt, daß $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathcal{U}_b(X^\#)$.

Es bleibt $\mathcal{C}_0^p(X^\#) \subset \mathcal{A}$ zu zeigen. Sei dazu $\psi = \phi \star \chi_p$ mit $\phi \in L^1(X^\#)$ und $\tilde{\xi} \in X^\#_{\tilde{r}}$ beliebig. Für eine beliebige Spektralzerlegung $\tilde{k}\tilde{\vartheta} = \tilde{\xi}$, $\tilde{k} \in K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$, $\tilde{\vartheta} \in \Theta^\#_{\tilde{r}}$ und eine beliebige Folge $\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}} \tilde{\vartheta}$ gilt:

$$\lim_{l\to\infty} \psi(\tilde{k}\vartheta^l) = \lim_{l\to\infty} \int_{X^\#} \chi_p(\tilde{k}\vartheta^l - \eta)\phi(\eta)d\eta = \lim_{l\to\infty} \int_{X^\#} \chi_{\tilde{k}\vartheta^l - \Lambda^\#_p}(\eta)\phi(\eta)d\eta \ .$$

Wegen Satz 4.2.8 konvergiert $\chi_{\tilde{k}\vartheta^l - \Lambda^\#_p}$ fast überall gegen $\chi_{\kappa^{-1}(\tilde{k}\tilde{\vartheta} - \Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}})}$ und so folgt mit dem Theorem von Lebesque über die dominierte Konvergenz:

$$\lim_{l\to\infty} \psi(\tilde{k}\vartheta^l) = \int_{\kappa^{-1}(\tilde{k}\tilde{\vartheta} - \Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}})} \phi(\eta)d\eta = \tilde{\psi}(\tilde{k}\tilde{\vartheta}) \ . \tag{4.2.22}$$

Damit ist $\widetilde{\phi \star \chi_p}(\tilde{\xi})$ sowohl von der Spektralzerlegung von $\tilde{\xi}$, als auch von der Folge $\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}} \tilde{\vartheta}$ unabhängig. Wegen Lemma 3.4.15 gilt $\mathcal{C}_0^p(X^\#) \subset \mathcal{U}_b(X^\#)$ und es folgt für alle $\phi \in L^1(X^\#)$

$$\phi \star \chi_p \in \mathcal{A} \ .$$

Weil $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene *-Algebra ist, folgt hieraus $\mathcal{C}_0^p(X^\#) \subset \mathcal{A}$, also die Aussage der Behauptung 1. □

Behauptung 2: $\pi^\#_{\tilde{r}\tilde{p}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}_b(X^\#_{\tilde{r}})$; $\psi \mapsto \tilde{\psi}$, *ist eine Darstellung von* $\mathcal{A}$ *auf* $L^2(X^\#_{\tilde{r}})$.

Beweis der Behauptung 2: Sei $\psi \in \mathcal{A}$ beliebig. Aufgrund der Definition von $\mathcal{A}$ ist für alle $\psi \in \mathcal{A}$ die Funktion $\tilde{\psi}$ auf $X^\#_{\tilde{r}}$ wohldefiniert. Wegen der Definition von $\tilde{\psi}$ über Limiten von Funktionswerten von ψ folgt direkt

$$||\tilde{\psi}||_\infty \leq ||\psi||_\infty$$

und $\pi^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}(\mathcal{A})$ besteht aus beschränkten Funktionen. Sei nun ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Weil ψ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\mu > 0$, so daß $|\psi(\xi) - \psi(\xi')| < \epsilon$ für alle $\xi, \xi' \in X^\#$ mit $||\xi - \xi'|| < \mu$. Seien $\tilde{\xi}$ und $\tilde{\xi}'$ aus $X^\#_{\tilde{r}}$ mit $||\tilde{\xi} - \tilde{\xi}'|| < \mu$ und $\tilde{k}\tilde{\vartheta} = \tilde{\xi}$, beziehungsweise $\tilde{k}'\tilde{\vartheta}' = \tilde{\xi}'$ die Spektralzerlegungen von $\tilde{\xi}$, beziehungsweise $\tilde{\xi}'$. Da $K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$ trivial auf $(\Theta^\#_{\tilde{r}})^\perp$ operiert, kann man gemäß Präposition 4.2.6 eine Folge $(\vartheta^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \Theta^\#$ wählen, so daß

$$\tilde{\vartheta} + \vartheta^l \xrightarrow{\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}} \tilde{\vartheta}, \quad \tilde{\vartheta}' + \vartheta^l \xrightarrow{\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}} \tilde{\vartheta}'$$

und

$$\tilde{k}\vartheta^l = \tilde{k}'\vartheta^l = \vartheta^l$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Damit gilt $||\tilde{k}(\tilde{\vartheta}+\vartheta^l) - \tilde{k}'(\tilde{\vartheta}'+\vartheta^l)|| = ||\tilde{\xi}-\tilde{\xi}'|| < \mu$, was für alle $l \in \mathbb{N}$

$$\left|\psi\left(\tilde{k}(\tilde{\vartheta}+\vartheta^l)\right) - \psi\left(\tilde{k}'(\tilde{\vartheta}'+\vartheta^l)\right)\right| < \epsilon$$

impliziert. Dies zeigt

$$|\tilde{\psi}(\tilde{\xi}) - \tilde{\psi}(\tilde{\xi}')| = \lim_{l\to\infty}\left|\psi\left(\tilde{k}(\tilde{\vartheta}+\vartheta^l)\right) - \psi\left(\tilde{k}'(\tilde{\vartheta}'+\vartheta^l)\right)\right| \leq \lim_{l\to\infty}\epsilon = \epsilon\ .$$

Also ist $\tilde{\psi}$ gleichmäßig stetig und es folgt

$$\pi^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{U}_b(X^{\#}_{\tilde{r}})\ .$$

Aufgrund der Definition über Limiten spezieller Folgen ist klar, daß $\pi^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}$ ein *-Algebrahomomorphismus $\pi^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}_b(X^{\#}_{\tilde{r}}) \subset \mathcal{L}(L^2(X^{\#}_{\tilde{r}}))$, also eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf $L^2(X^{\#}_{\tilde{r}})$, ist. Damit ist der Beweis der Behauptung 2 abgeschossen.

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt direkt, daß die Einschränkung von $\pi^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}$ auf $\mathcal{C}^p_0(X^{\#})$ eine Darstellung von $\mathcal{C}^p_0(X^{\#})$ auf $L^2(X^{\#}_{\tilde{r}})$ definiert. Für diese gilt wegen (4.2.22)

$$\pi^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}(\phi\star\chi_p)(\tilde{\xi}) = \int_{\kappa^{-1}(\tilde{\xi}-\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}})}\phi(\eta)\,d\eta\ , \tilde{\xi}\in X^{\#}_{\tilde{r}}\ ,$$

für alle Erzeuger $\phi\star\chi_p$, $\phi \in L^1(X^{\#})$, von $\mathcal{C}^p_0(X^{\#})$. Damit ist die Aussage des Satzes gezeigt. $\square$

4.3 Allgemeine Limesdarstellungen von $C_p^*(iX)$

Definition 4.3.1 Es sei H ein komplexer Hilbertraum.

1. Eine C*-Unteralgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(H)$ heißt *nicht degeneriert in* $\mathcal{L}(H)$, falls
$$\{b \cdot \xi : \; b \in \mathcal{B}, \xi \in H\}$$
eine in H dichte Menge ist.

2. Eine Darstellung $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ einer C*-Algebra $\mathcal{B}$ heißt *nicht degeneriert*, falls
$$\pi(\mathcal{B}) = \{\pi(b) : \; b \in \mathcal{B}\}$$
eine nicht degenierte C*-Algebra in $\mathcal{L}(H)$ ist.

Satz 4.3.2 *Jede allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von Λ_p induziert eine nicht degenerierte Darstellung $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von $C_p^*(iX)$ auf $L^2(ikX_{\tilde{r}})$. Sie ist bestimmt durch*
$$\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_pf}) = \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}f^k_{\tilde{r}}} \tag{4.3.3}$$
für alle Erzeuger ℓ_{E_pf}, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$, von $C_p^*(iX)$. Hierbei ist $f^k_{\tilde{r}} := f|_{ikX_{\tilde{r}}}$ für alle $f \in A(iX)$.

Beweis: Sei zunächst $k = id_X$. Für alle $f \in A(iX)$ ist $f^\# \in L^1(X^\#)$. Deshalb kann man definieren:
$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_pf}) &:= Ad(\mathcal{F}_{\tilde{r}}^{-1})\Big(\pi^\#_{\tilde{r}\tilde{p}}\Big(Ad(\mathcal{F})(\ell_{E_pf})\Big)\Big) \qquad (4.3.4)\\ &= Ad(\mathcal{F}_{\tilde{r}}^{-1})\Big(\tilde{\xi} \longmapsto \int_{k^{-1}(\tilde{\xi}-\Lambda^\#_{\tilde{r}\tilde{p}})} \phi(\eta)\, d\eta\Big)\ . \end{aligned}$$

Das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} C_p^*(iX) & \xrightarrow{Ad(\mathcal{F})} & \mathcal{C}_0^p(X^\#) \\ \pi_{\tilde{r}\tilde{p}} \downarrow & & \downarrow \pi^\#_{\tilde{r}\tilde{p}} \\ \mathcal{L}\Big(L^2(iX_{\tilde{r}})\Big) & \xrightarrow{Ad(\mathcal{F}_{\tilde{r}})} & \mathcal{L}\Big(L^2(X^\#_{\tilde{r}})\Big) \end{array}$$

kommutiert, alle vorkommenden Abbildungen sind *-Algebrahomomorphismen und $Ad(\mathcal{F})$, beziehungsweise $Ad(\mathcal{F}_{\tilde{r}})$ sind sogar *-Algebraisomorphismen. Deshalb ist $\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}$ wegen Satz 4.2.15 eine wohldefinierte Darstellung von $C_p^*(iX)$ auf $L^2(iX_{\tilde{r}})$.

Um die angegebene Form (4.3.3) der Darstellung zu beweisen, sei $f \in \mathcal{C}_c(iX)$, also stetig mit kompaktem Träger, so daß $f = f_1 \otimes f_2$ mit $f_1 \in \mathcal{C}_c(iX_{\tilde{r}}{}^\perp)$ und $f_2 \in \mathcal{C}_c(iX_{\tilde{r}})$.

Hierbei sei $X_{\tilde{r}}{}^{\perp} := (P_{\frac{1}{2},\vec{e_{\tilde{r}}}} \oplus P_{0,\vec{e_{\tilde{r}}}})(X)$ und $X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp} := (P_{\frac{1}{2},\vec{e}^{\#}_{\tilde{r}}} \oplus P_{0,\vec{e}^{\#}_{\tilde{r}}})(X^{\#})$. Dann gilt mit der Fourier-Transformation bezüglich $iX_{\tilde{r}}{}^{\perp}$:

$$f_1(0) = \int_{X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}} \underbrace{e^{i\eta_1(x_1)}}_{=1} f_1^{\#}(\eta_1)\, d\eta_1 = \int_{X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}} f_1^{\#}(\eta_1)\, d\eta_1 \ .$$

Sei $\phi := f^{\#}$ und $\tilde{\xi} \in X_{\tilde{r}}^{\#}$ beliebig. Es ergibt sich für $\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}$:

$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{r}\tilde{p}}(\phi \star \chi_p)(\tilde{\xi}) &= \int_{\kappa^{-1}(\tilde{\xi}-\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}})} \phi(\eta)\, d\eta \\ &= \int_{\tilde{\xi}+(X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}\times(-\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}))} \int_X f(ix) e^{-i\eta(x)}\, dx\, d\eta \\ &= \int_{X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}\times(-\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}})} \int_X f(ix) e^{-i\eta(x)} e^{-i\tilde{\xi}(x)}\, dx\, d\eta \ . \end{aligned}$$

Die verschiedenen Peirce-Räume sind bezüglich λ_α orthogonal. Deshalb folgt für alle $\eta_1 \in X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}, \eta_2 \in X_{\tilde{r}}^{\#}, x_1 \in X_{\tilde{r}}{}^{\perp}, x_2 \in X_{\tilde{r}}$

$$e^{-i\eta_1(x_2)} = e^{-i\eta_2(x_1)} = 1 \ .$$

Durch iterierte Integration erhält man

$$\begin{aligned} &\int_{X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}\times(-\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}})} \int_X f(ix) e^{-i\eta(x)} e^{-i\tilde{\xi}(x)}\, dx\, d\eta \\ &= \int_{X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}} \int_{X^{\perp}} f_1(ix_1) e^{-i\eta_1(x_1)} \underbrace{e^{-i\tilde{\xi}(x_1)}}_{=1}\, dx_1\, d\eta_1 \int_{\tilde{\xi}-\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}} \int_{X_{\tilde{r}}} f_2(ix_2) e^{-i\eta_2(x_2)}\, dx_2\, d\eta_2 \\ &= \int_{X_{\tilde{r}}^{\#\,\perp}} f_1^{\#}(\eta_1)\, d\eta_1 \int_{\tilde{x}i-\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}} f_2^{\#}(\eta_2)\, d\eta_2 \\ &= f_1(0)\cdot(f_2^{\#} \star \chi_{\tilde{r}\tilde{p}})(\tilde{\xi}) \ . \end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}_{\tilde{r}}$ linear ist, gilt $f_1(0)\cdot f_2^{\#} = (f_1(0)\cdot f_2)^{\#}$ und da für alle $\tilde{x} \in X_{\tilde{r}}$

$$f_{\tilde{r}}(\tilde{x}) = f|_{iX_{\tilde{r}}}(\tilde{x}) = (f_1 \otimes f_2)(0 \otimes \tilde{x}) = f_1(0)\cdot f_2(\tilde{x}) \ ,$$

folgt

$$\pi^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}(f^{\#} \star \chi_p) = f^{\#}_{\tilde{r}} \star \chi_{\tilde{r}\tilde{p}} \ .$$

Per Definition von $\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}$ (4.3.4) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \pi_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_p f}) &= Ad(\mathcal{F}_{\tilde{r}})\Big(\pi^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}(f^{\#} \star \chi_p)\Big) \\ &= Ad(\mathcal{F}_{\tilde{r}})(f^{\#}_{\tilde{r}} \star \chi_{\tilde{r}\tilde{p}}) \\ &= \ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}} f_{\tilde{r}\tilde{p}}} \ . \end{aligned}$$

Da $\mathcal{C}_c(X_{\tilde r}^{\#\perp}) \otimes \mathcal{C}_c(X_{\tilde r}^{\#})$ dicht in $L^1(X^\#)$ liegt, ist hiermit die behauptete Form (4.3.3) der Darstellung $\pi_{\tilde r \tilde p}$ für alle Erzeuger $\ell_{E_p f},\ f \in A(iX)$, bewiesen.

Nun sei $k \in K^\sigma$ beliebig. Dann definiert man $\pi^k_{\tilde r \tilde p}$ über das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_p^*(iX) \arrow[r, "Ad(k^{-1})"] \arrow[d, "\pi_{\tilde r \tilde p}"'] & C_p^*(iX) \arrow[d, "\pi^k_{\tilde r \tilde p}"] \\ \mathcal{L}\Big(L^2(iX_{\tilde r})\Big) \arrow[r, "Ad(k^{-1})"] & \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde r})\Big) \end{tikzcd} .$$

$\pi^k_{\tilde r \tilde p}$ ist wohldefiniert, da mit (4.1.19) $Ad(k^{-1})$ ein *-Algebraisomorphismus sowohl auf $C_p^*(iX)$, als auch von $\mathcal{L}(L^2(iX_{\tilde r}))$ nach $\mathcal{L}(L^2(ikX_{\tilde r}))$ ist.

Behauptung: *Für alle $f \in A(iX)$ gilt die in Gleichung 4.3.3 behauptete Form der Darstellung, das heißt:*

$$\pi^k_{\tilde r \tilde p}(\ell_{E_p f}) = \ell_{E^k_{\tilde r \tilde p} f^k_{\tilde r}} .$$

Beweis der Behauptung: Mit (4.1.20) ergibt Anwendung von $Ad(k)$ auf $\ell_{E_p f}$ für alle $h \in L^2(iX)$ und $s \in iX$:

$$\begin{aligned} \tau_k(\ell_{E_p f})(\tau_{k^{-1}} h)(s) &= \ell_{E_p f}(\tau_{k^{-1}} h)(ks) \\ &= \int_{iX} (\tau_{k^{-1}} h)(ks - t)(E_p f)(dt) \\ &= \int_{iX} h(s - k^{-1} t)(E_p f)(dt) \\ &\overset{t' := k^{-1} t}{=} \int_{iX} h(s - t')\tau_k(E_p f)(dt') \\ &= \ell_{E_p(\tau_k f)}(h)(s) , \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

weil E_p invariant unter τ_k ist (Lemma 4.1.21). Analog folgt für alle $\tilde h \in L^2(ikX_{\tilde r})$ und $\tilde s \in kX_{\tilde r}$

$$\tau_{k^{-1}}(\ell_{E_{\tilde r \tilde p}(\tau_k f)_{\tilde r}})(\tau_k \tilde h)(\tilde s) \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned} &= \ell_{E_{\tilde r \tilde p}(\tau_k f)_{\tilde r}}(\tau_k \tilde h)(k^{-1}\tilde s) \\ &= \int_{iX_{\tilde r}} (\tau_k \tilde h)(k^{-1}\tilde s - \tilde t)(E_{\tilde r \tilde p}(\tau_k f)_{\tilde r})(d\tilde t) \\ &= \int_{iX_{\tilde r}} \tilde h(\tilde s - k\tilde t)(E_{\tilde r \tilde p}(\tau_k f)_{\tilde r})(d\tilde t) \\ &\overset{\tilde t' := k\tilde t}{=} \int_{iX_{\tilde r}} \tilde h(\tilde s - \tilde t')\tau_{k^{-1}}(E_{\tilde r \tilde p}(\tau_k f)_{\tilde r})(d\tilde t') . \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Wegen Lemma 4.1.21 gilt $\tau_{k^{-1}} E_{\tilde{r}\tilde{p}} = E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$ und für alle $\tilde{s} \in ikX_{\tilde{r}}$ ergibt sich

$$\tau_{k^{-1}}(\tau_k f)\Big|_{iX_{\tilde{r}}}(\tilde{s}) = (\tau_k f)\Big|_{iX_{\tilde{r}}}(k^{-1}\tilde{s}) = (\tau_k f)(k^{-1}\tilde{s}) = f(\tilde{s}) = f\Big|_{ikX_{\tilde{r}}}(\tilde{s}) = f^k_{\tilde{r}}(\tilde{s}) \ .$$

Aus (4.3.7) folgt damit

$$Ad(k^{-1})(\ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tau_k f)_{\tilde{r}}})(\tilde{h}) = \int_{ikX_{\tilde{r}}} \tilde{h}(\tilde{s} - \tilde{t}')(E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} f^k_{\tilde{r}})(d\tilde{t}') = \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} f^k_{\tilde{r}}}(\tilde{h})(\tilde{s})$$

und zusammen mit (4.3.5) erhält man nun

$$\begin{aligned} \pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_p f}) &= Ad(k^{-1})\Big(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}\left(Ad(k)(\ell_{E_p f})\right)\Big) \\ &= Ad(k^{-1})\Big(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_p(\tau_k f)})\Big) \\ &= Ad(k^{-1})(\ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}}(\tau_k f)_{\tilde{r}}}) \\ &= \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} f^k_{\tilde{r}}} \ , \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Zu zeigen bleibt, daß die Darstellung $\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}$ nicht degeneriert ist. Sei dafür $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty_c(ikX_{\tilde{r}})$ beliebig. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{C}^\infty_c(iX)$ mit $f^k_{\tilde{r}} = \tilde{f}$. Da $\mathcal{C}^\infty_c(ikX_{\tilde{r}})$ dicht in $A(ikX_{\tilde{r}})$ liegt [E, Proposition 3.26], folgt $C^*_{\tilde{r}\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}) \subset \pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(C^*_p(iX))$. Weil $kX_{\tilde{r}}$ wieder eine einfache Jordan-Algebra mit $r_c \geq 2$ ist, ergibt Anwendung von Satz 3.4.5

$$C^*(ikX_{\tilde{r}}) \subset C^*_{\tilde{r}\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}) \subset \pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}\Big(C^*_p(iX)\Big) \ . \tag{4.3.8}$$

$C^*(ikX_{\tilde{r}})$ ist eine nicht degenerierte C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(L^2(ikX_{\tilde{r}}))$. Deshalb folgt aus (4.3.8), daß $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$ eine nicht degnerierte Darstellung von $C^*_p(iX)$ ist. Dies beendet den Beweis des Satzes. □

Bemerkung 4.3.9 Sei $k \in K^\sigma$. Das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^*_p(iX) & \xrightarrow{Ad(\mathcal{F})} & \mathcal{C}^p_0(X^\#) \\ \pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow (\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}})^\# \\ \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde{r}})\Big) & \xrightarrow{Ad(\mathcal{F}^k_{\tilde{r}})} & \mathcal{L}\Big(L^2(kX^\#_{\tilde{r}})\Big) \end{array}$$

definiert eine Darstellung $(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}})^\#$ mit

$$(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}})^\#\Big(Ad(\mathcal{F})(\ell_{E_p f})\Big) = Ad(\mathcal{F}^k_{\tilde{r}})(\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} f^k_{\tilde{r}}}) = (f^k_{\tilde{r}})^\# \star \chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} \ .$$

Analog zu dem Beweis von Satz 4.3.2 folgt zunächst $(f_{\tilde{r}}^k)^\# = \phi_{\tilde{r}}^k := \phi|_{kX_{\tilde{r}}^\#}$, wobei $\phi^\# := f$, und dann

$$(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^\#(\phi \star \chi_p)(\tilde{\xi}) = \int_{\tilde{\xi}-k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#} \phi_{\tilde{r}}^k(\tilde{\eta})\, d\tilde{\eta} = \int_{\kappa^{-1}(\tilde{\xi}-k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#)} \phi(\eta)\, d\eta\ . \tag{4.3.10}$$

Analog dem Verfahren aus Abschnitt 4.2 zeigt man, daß $(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^\#$ eine Limesdarstellung ist. Sie wird durch Folgen bestimmt, die bezüglich $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#$ konvergieren. $(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^\#$ ist also die durch die allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ bestimmte Limesdarstellung von $\mathcal{C}_0^p(X^\#)$, bestimmt durch Grenzwerte von Folgen $(\vartheta^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset X^\#$ mit $\theta^l \xrightarrow{k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#} \tilde{\theta} \in k\Theta_{\tilde{r}}^\#$.

Kapitel 5

Darstellungstheorie von Cokreuzprodukten

Der erste Abschnitt dieses Kapitels enthält eine Einführung in die allgemeine Theorie der Coaktionen und Cokreuzprodukte. Sie sollte ausreichend sein, um die auf ihr basierenden Beweise der beiden folgenden Kapitel nachvollziehen zu können. Als generelle Referenz gilt [U6, 4.8-4.9], sofern keine andere explizit genannt wird. Die Konstruktion der speziellen Coaktion δ_{iX} und des Isomorphismus Ψ ist [U6, 4.10] entnommen und ermöglicht als Resultat die Definition des Cokreuzproduktes $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$.

Der zweite Abschnitt referiert kurz die Darstellungstheorie für allgemeine Cokreuzprodukte, wie sie in [LPRS] entwickelt wurde. Um diese Theorie auf den vorliegenden Fall anwenden zu können, sind danach die wesentlichen Schritte die Definition einer geeigneten Darstellung $\nu_{\tilde{r}s}^k$ von $A(iX)$ - deren zugeordneter Operator $W_{\tilde{r}s}^k$ zusammen mit $\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k$ ein covariantes Paar bildet - und der Nachweis, daß diese die notwendige Covarianzeigenschaft erfüllt.

Als Resultat erhält man schließlich für jede allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von Λ_p eine nicht degenerierte Darstellung des im ersten Abschnitt definierten Cokreuzproduktes $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$.

5.1 Coaktionen und Cokreuzprodukte

In diesem Abschnitt sei H stets ein komplexer Hilbertraum. Es sei an die Definition 4.3.1 erinnert, wonach $\mathcal{B}$ nicht degeneriert genannt wird, falls $\{b \cdot \xi : \ b \in \mathcal{B}', \xi \in H\}$ eine dichte Menge in H ist.

Definition 5.1.1 Sei $\mathcal{B}$ eine nicht degenerierte C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$. Die *Multiplikatorenalgebra* von $\mathcal{B}$ ist die C*-Algebra

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}) := \{T \in \mathcal{L}(H) : \ T \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B} \cdot T \subset \mathcal{B}\}$$

mit der *strikten Topologie,* die durch die Halbnormen

$$T \longmapsto ||Tb||_{\mathcal{L}(H)} + ||b'T||_{\mathcal{L}(H)}$$

erzeugt wird, wobei $b, b' \in \mathcal{B}$ beliebig sind.

Die Multiplikatorenalgebra ist eine unitale C*-Algebra, die die Algebra $\mathcal{B}$ als ein C*-Ideal enthält. Weiterhin gilt, daß die Bildung von $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ von der Wahl der Einbettung $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(H)$ unabhängig ist und mit der Vervollständigung von $\mathcal{B}$ bezüglich der strikten Topologie übereinstimmt. Diese ist schwächer als die Normtopologie.

Beispiel 5.1.2 Für eine lokalkompakte Gruppe S ist $\mathcal{C}_0(S)$ eine abelsche C*-Algebra mit der Supremumsnorm $|| \cdot ||_\infty$. Eine Realisation als C*-Unteralgebra in $\mathcal{L}(H)$ eines geeigneten Hilbertraumes H ist gegeben durch die Einbettung (3.3.1) $\mathcal{C}_0(S) \hookrightarrow \mathcal{L}(L^2(S))$; $g \mapsto M_g$. Es sei $\mathcal{C}_b(S)$ die C*-Algebra der stetigen beschränkten Funktionen auf S, dann gilt mit [V, Example 0.2.2]:

$$\mathcal{M}\Big(\mathcal{C}_0(S)\Big) = \mathcal{C}_b(S) \ .$$

Für zwei C*-Algebren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, die als nicht degenerierte C*-Unteralgebren von $\mathcal{L}(H)$, beziehungsweise $\mathcal{L}(H')$ realisiert sind, sei das *abgeschlossene Tensorprodukt* $\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}'$ definiert als der Normabschluß des algebraischen Tensorproduktes $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}'$ in $\mathcal{L}(H \otimes H')$. Diese Bildung ist unabhängig von der Wahl der nicht degenerierten Einbettungen und

$$\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}' \hookrightarrow \mathcal{L}(H \otimes H')$$

ist eine nicht degenerierte C*-Einbettung.

Definition 5.1.3 Die *eingeschränkte Multiplikatorenalgebra* zweier nicht degenerierter C*-Algebren $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(H)$ und $\mathcal{B}' \subset \mathcal{L}(H')$ sei als die C*-Algebra

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}') := \{T \in \mathcal{M}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}') : \ T(id_H \otimes \mathcal{B}') + (id_H \otimes \mathcal{B}')T \subset \mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}'\}$$

definiert.

Beispiel 5.1.4 Für eine lokalkompakte Gruppe S und eine C*-Algebra $\mathcal{B}$ sei $\mathcal{C}_0(S, \mathcal{B})$ die Menge der stetigen Funktionen auf S mit Werten in $\mathcal{B}$, die im Unendlichen verschwinden. Mit [V, Example 0.2.2] folgt $\mathcal{M}(\mathcal{C}_0(S, \mathcal{B})) = \mathcal{C}_b(S, \mathcal{M}(\mathcal{B}))$, also die C*-Algebra der beschränkten stetigen Funktionen auf S mit Werten in $\mathcal{M}(\mathcal{B})$. Hierbei wurde $\mathcal{C}_0(S, \mathcal{B})$ als nicht degenerierte C*-Unteralgebra von Multiplikationsoperatoren auf $L^2(H, \mathcal{B})$ realisiert. Nutzt man $H \otimes L^2(S) = L^2(S, H)$

und setzt $(b \otimes g)(s) = b \cdot g(s)$ für alle $b \in \mathcal{B},\ g \in \mathcal{C}_0(S)$ und $s \in S$, so ergibt sich $\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{C}_0(S) = \mathcal{C}_0(S,\mathcal{B})$ und somit

$$\mathcal{M}\Big(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{C}_0(S)\Big) = \mathcal{C}_b\Big(S, \mathcal{M}(\mathcal{B})\Big)\ .$$

Für die reduzierte Multiplikatorenalgebra gilt nach [V, Example 0.2.14] allerdings:

$$\tilde{\mathcal{M}}\Big(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{C}_0(S)\Big) = \mathcal{C}_b(S,\mathcal{B})\ .$$

Definition 5.1.5 Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei C*-Algebren. Dann heißt ein C*-Homomorphismus $\delta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B}')$ *strikt,* wenn er eine eindeutige Fortsetzung zu einem unitalen C*-Homomorphismus $\mathcal{M}(\delta) : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B}')$ hat, welcher auf beschränkten Mengen von $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ strikt stetig ist. Die Fortsetzung $\mathcal{M}(\delta)$ heißt dann *strikte Fortsetzung* von δ.

Definition 5.1.6 Eine *Hopf C*-Algebra* $(\mathcal{B},\delta)$ ist eine C*-Algebra $\mathcal{B}$ zusammen mit einem injektiven strikten Homomorphismus

$$\delta : \mathcal{B} \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B})\ ,$$

so daß das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B} & \xrightarrow{\delta} & \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}) \\
{\scriptstyle\delta}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathcal{M}(\delta\otimes id_{\mathcal{B}})} \\
\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}) & \xrightarrow{\mathcal{M}(id_{\mathcal{B}}\overline{\otimes}\delta)} & \mathcal{M}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B})
\end{array}$$

existiert. $(\mathcal{B},\delta)$ heißt *coabelsch,* falls der durch $\psi : b_1 \otimes b_2 \mapsto b_2 \otimes b_1$ bestimmte Automorphismus von $\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}$ die Bedingung $\mathcal{M}(\psi)\delta = \delta$ erfüllt. Der Homomorphismus δ heißt dann *Coprodukt.*

Für $s \in S$ sei ℓ_s der Linksfaltungsoperator bezüglich des Dirac-Maßes ω_s mit Träger $\{s\}$. ℓ_s wirkt als Linkstranslationsoperator, denn es gilt

$$\ell_s(f)(t') = \int_S f(t^{-1}t')\omega_s(dt) = f(s^{-1}t')$$

für alle $f \in \mathcal{C}_0(S)$ und $s, t' \in S$.

Lemma 5.1.7 (U4, Example 4.8.6., Proposition 4.8.39.) *Für die lokalkompakte Gruppe S ist die Gruppen C^*-Algebra $C^*(S)$ eine coabelsche Hopf C^*-Algebra mit dem Coprodukt*

$$\delta_S : C^*(S) \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}\Big(C^*(S)\overline{\otimes}C^*(S)\Big) \subset \mathcal{M}\Big(C^*(S \times S)\Big) ,$$

definiert durch den Linksfaltungsoperator

$$\delta_S(\ell_f) := \ell_{\delta_S f}$$

für alle $f \in L^1(S)$. Hierbei ist $\delta_S : S \to S \times S$ die diagonale Einbettung und $\delta_S(f)$ das Bildmaß von $f \cdot d\omega$. Es gilt $\tilde{\mathcal{M}}(C^*(S)) \subset W^*(S)$ und die schwache Fortsetzung von δ_S erfüllt

$$\delta_S(\ell_s) = \ell_s \otimes \ell_s$$

für alle durch $s \in S$ gegebenen Linkstranslationsoperatoren.

Definition 5.1.8 Es sei S eine lokalkompakte Gruppe.

1. Eine *Coaktion* von S auf einer C*-Algebra $\mathcal{B}$ ist ein strikter injektiver C*-Homomorphismus
$$\delta : \mathcal{B} \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}\Big(\mathcal{B}\overline{\otimes}C^*(S)\Big),$$
so daß das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \stackrel{\delta}{\longrightarrow} & \tilde{\mathcal{M}}\Big(\mathcal{B}\overline{\otimes}C^*(S)\Big) \\ {\scriptstyle\delta}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathcal{M}(\delta\otimes id_{C^*(S)})} \\ \tilde{\mathcal{M}}\Big(\mathcal{B}\overline{\otimes}C^*(S)\Big) & \stackrel{\mathcal{M}(id_{\mathcal{B}}\otimes\delta_S)}{\longrightarrow} & \mathcal{M}\Big(\mathcal{B}\overline{\otimes}C^*(S)\overline{\otimes}C^*(S)\Big) \end{array}$$
kommutiert.

2. Es sei $\mathcal{B}$ eine nicht degenerierte C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$ und δ vermittle eine Coaktion von S auf $\mathcal{B}$. Dann sei das zugehörige *Cokreuzprodukt* definiert als
$$\begin{aligned} \mathcal{B}\otimes_\delta\mathcal{C}_0(S) \;&:=\; C^*\Big(\delta(b)(id_H \otimes g) : \; b \in \mathcal{B}, \; g \in \mathcal{C}_0(S)\Big) \\ &\subset\; \mathcal{L}\Big(H \otimes L^2(S)\Big) , \end{aligned}$$
wobei $g \in \mathcal{C}_0(S)$ wieder als Multiplikationsoperator auf $L^2(S)$ aufgefaßt wird.

Betrachtet man die rechtsreguläre Darstellung von S mittels der Rechtstranslationsoperatoren ϱ_s, $s \in S$, so liegt ϱ_S im Kommutator von $C^*(S)$. Dann kommutiert auch jeder Operator der Form $id_H \otimes \varrho_s$ mit $\mathcal{B} \otimes C^*(S)$, also auch mit $\delta(\mathcal{B})$ und es folgt:

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{B}) &\subset \left(\mathcal{B}\otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)\right)^S \\ &:= \left\{b \in \mathcal{B}\otimes_\delta \mathcal{C}_0(S) : \; Ad(id_H \otimes \varrho_s)(b) = b \text{ für alle } s \in S\right\} . \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Der die Hopf C*-Algebrastruktur auf $C^*(S)$ definierende C*-Monomorphismus $\delta_S : C^*(S) \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}(C^*(S)\overline{\otimes}C^*(S))$ aus Lemma 5.1.7 hat eine schwache Fortsetzung zu einem W*-Monomorphismus

$$\delta_S : W^*(S) \longrightarrow W^*(S)\overline{\otimes}\, W^*(S) \; . \tag{5.1.10}$$

Dieser ist bestimmt durch $\delta_S(\ell_s) := \ell_s \otimes \ell_s$ für alle $s \in S$. Wegen (5.1.10) gibt es ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W^*(S) & \xrightarrow{\delta_S} & W^*(S)\overline{\otimes}\, W^*(S) \\ {\scriptstyle \delta_S}\big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{M}(\delta_S \otimes id_{W^*(S)})} \\ W^*(S)\overline{\otimes}\, W^*(S) & \xrightarrow{\mathcal{M}(id_{W^*(S)} \otimes \delta_S)} & W^*(S)\overline{\otimes}\, W^*(S)\overline{\otimes}\, W^*(S) \; . \end{array} \tag{5.1.11}$$

Ziel ist es nun, eine Coaktion von S auf $C_p^*(iX)$ zu definieren und dann das entsprechende Cokreuzprodukt zu bilden. Dies kann mittels der in Lemma 3.4.15 bewiesenen Eigenschaft $Ad(\mathcal{F})(C_p^*(iX)) \subset \mathcal{U}_b(X^\#)$ analog dem gewählten Zugang in [HU1, Seite 114] geschehen. Hier soll jedoch ein allgemeineres Verfahren durchgeführt werden, welches für beliebige unimodulare lokalkompakte Gruppen anwendbar ist. Im folgenden werden einige Resultate nur für den Spezialfall $S = iX$ formuliert. Dies geschieht allein aus dem Grund, weil die C*-Algebra $C_p^*(iX)$ für weitere Gruppen außer iX hier nicht definiert werden soll (vergleiche dazu Kapitel 8). Wäre diese definiert, könnten alle folgenden Aussagen für eine beliebige unimodulare lokalkompakte Gruppe S gezeigt werden. Man benötigt für die Beweise lediglich die Definition von $C_p^*(iX)$ als Unteralgebra von $W^*(iX)$, welche nicht degeneriert in $\mathcal{L}(L^2(iX))$ liegt. Diese Bedingung ist im vorliegenden Fall erfüllt, weil wegen Satz 3.4.5 $C^*(iX) \subset C_p^*(iX)$ gilt.

Satz 5.1.12 *Die Einschränkung von (5.1.10)*

$$\delta_{iX} : C_p^*(iX) \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}\left(C_p^*(iX)\overline{\otimes}C^*(iX)\right)$$

definiert eine Coaktion von iX auf $C_p^*(iX)$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß δ_{iX} in die richtige Multiplikatorenalgebra abbildet. Dies wird in [U6, Theorem 4.10.21.] bewiesen. □

Das Theorem zeigt, daß die C*-Algebra

$$C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX) \subset \mathcal{L}\Big(L^2(iX) \otimes L^2(iX)\Big)$$

existiert. Da $C^*(iX) \subset C_p^*(iX)$, ist $C_p^*(iX)$ eine nicht degenerierte C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(L^2(iX))$. Damit ist auch $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$ eine nicht degenerierte C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(L^2(iX) \otimes L^2(iX))$ ([U6, Seite 315]).

Wie in der C*-Theorie kann man wegen der Existenz des kommutativen Diagrammes 5.1.11 das W*-Cokreuzprodukt definieren:

$$W^*(S)\otimes_{\delta_S} L^\infty(S) := W^*\Big(\delta_S(\omega)(id_{L^2(S)} \otimes g);\ \omega \in M^1(S),\ g \in L^\infty(S)\Big)\ . \quad (5.1.13)$$

Für dieses gilt das folgende wichtige Lemma. Es ermöglicht von den Cokreuzprodukten, welche ja Unteralgebren von $\mathcal{L}(L^2(S \times S))$ sind, zu den Objekten zurückzukommen, die hier eigentlich untersucht werden sollen: Operatoralgebren in $\mathcal{L}(L^2(S))$.

Lemma 5.1.14 *Sei S eine lokalkompakte Gruppe. Dann wird durch*

$$\Psi\Big(\delta_S(\omega)(id_{L^2(S)} \otimes g)\Big) := \omega \cdot g\ ,\quad \omega \in M^1(S),\ g \in L^\infty(S)\ ,$$

ein W-Isomorphismus*

$$\Psi : W^*(S)\otimes_{\delta_S} L^\infty(S) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(L^2(S)\Big)$$

induziert.

Beweis: Sei $H := L^2(S)$. Der unitäre Operator W auf $L^2(S \times S)$, der durch $(W\Phi)(s_1, s_2) := \Phi(s_1, s_1^{-1}s_2)$ für alle $\Phi \in L^2(S \times S)$, $s_1, s_2 \in S$ definiert wird, erfüllt

$$\delta_S(\omega) = W(\omega \otimes id_H)W^*$$

für alle $\omega \in M^1(S)$. Denn für $s \in S$ ist $\delta_S(\ell_s) = \ell_s \otimes \ell_s$ und es folgt für alle $s, s_1, s_2 \in S$ und $\phi_1, \phi_2 \in L^2(S)$:

$$\begin{aligned}
\delta_S(\ell_s)W(\phi_1 \otimes \phi_2)(s_1, s_2) &= W(\phi_1 \otimes \phi_2)(s^{-1}s_1, s^{-1}s_2)\\
&= \phi_1(s^{-1}s_1)\phi_2(s_1^{-1}s_2)\\
&= W(\ell_s\phi_1 \otimes \phi_2)(s_1, s_2)\\
&= W(\ell_s \otimes id_H)(\phi_1 \otimes \phi_2)(s_1, s_2)\ .
\end{aligned}$$

Mit [NT, (2.6)] erweist sich δ_S als die zur trivialen Aktion von S auf $\mathbb{C}$ duale Coaktion im dortigen Sinne und es existiert [NT, (2.13)] ein W*-Isomorphismus

$$\Psi' := \mathcal{L}\Big(L^2(S)\Big) \longrightarrow W^*(S)\otimes_{\delta_S} L^\infty(S)$$

mit $\Psi'(\phi) = id_H \otimes g$ für alle $g \in L^\infty(S)$ und $\Psi'(\ell_s) = \ell_s \otimes \ell_s$ für alle $s \in S$. Durch Integration folgt daraus $\Psi'(\omega) = \delta_S(\omega)$ für alle $\omega \in M^1(S)$ und mit $\Psi := (\Psi')^{-1}$ ergibt sich die Behauptung. $\square$

Korollar 5.1.15 *Durch*

$$\Psi\Big(\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_{L^2(iX)}\otimes g)\Big) := \ell_{E_pf}\cdot g$$

für alle $f\in A(iX)$, $g\in\mathcal{C}_0(iX)$, *wird ein* C^**-Isomorphismus*

$$\Psi : C_p^*(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX)\longrightarrow \Psi\Big(C_p^*(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX)\Big)$$

induziert. Für jedes $s\in iX$ *existiert das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} C_p^*(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{L}\Big(L^2(iX)\Big) \\ {\scriptstyle Ad(id_H\otimes\varrho_s)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle Ad(\varrho_s)} \\ C_p^*(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{L}\Big(L^2(iX)\Big) \end{array} .$$

Beweis: Sei wieder $H := L^2(iX)$. Die Existenz und Injektivität folgt direkt aus dem vorherigen Lemma durch Einschränkung der dortigen Isomorphie. Für die Existenz des Diagrammes seien $s\in iX$, $\ell_{E_pf}\in C_p^*(iX)$ und $g\in\mathcal{C}_0(iX)$ beliebig. Dann gilt mit Gleichung 5.1.9 $(id_H\otimes\varrho_s)(\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_H\otimes g)) = \delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_H\otimes\varrho_s(g))$. Da $\ell_{E_pf}\in W^*(iX)$ mit allen Rechtstranslationen kommutiert, folgt

$$\begin{aligned} \Psi\Big((id_H\otimes\varrho_s)\left(\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_H\otimes g)\right)\Big) &= \ell_{E_pf}\cdot\varrho_s(g) \\ &= Ad(\varrho_s)(\ell_{E_pf}g) \\ &= Ad(\varrho_s)\circ\Psi\Big(\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_H\otimes g)\Big) . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.1.16 $\mathcal{K}(L^2(iX))$ bezeichne das in $\mathcal{L}(L^2(iX))$ minimale *-Ideal der kompakten Operatoren auf $L^2(iX)$. Gemäß [K3, Theorem 8] gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\Big(L^2(iX)\Big) &= \Psi\Big(C^*(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX)\Big) \\ &= C^*\Big(\ell_f\, g:\ f\in L^1(iX),\ g\in\mathcal{C}_0(iX)\Big) . \end{aligned}$$

Mit Satz 3.4.5 ergibt sich $C^*(iX)\subset C_p^*(iX)$ und damit ist auch $\mathcal{K}(L^2(iX))$ in $\Psi(\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_{L^2(iX)}\otimes g))$ enthalten. Also ist $\Psi(\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_{L^2(iX)}\otimes g))$ eine Vervollständigung von $\mathcal{K}(L^2(iX))$, die durch die Vervollständigung $C_p^*(iX)$ von $C^*(iX)$ induziert ist, welche wiederum durch den Kegel Λ_p bestimmt ist.

Definition 5.1.17 Die durch Korollar 5.1.15 definierte C*-Algebra

$$\mathcal{K}_{\Lambda_p}\Big(L^2(iX)\Big) := \Psi\Big(\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_{L^2(iX)}\otimes g)\Big)\subset\mathcal{L}\Big(L^2(iX)\Big)$$

heißt die *Hardy-Toeplitz Vervollständigung* von $\mathcal{K}(L^2(iX))$.

5.2 Darstellungen von $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$

Nach der folgenden Definition werden kurz die Resultate über die Darstellungstheorie allgemeiner Cokreuzprodukte referiert. Generelle Referenz ist [LPRS], mit Ausnahme von Theorem 5.2.2, welches [NT] entnommen ist. Danach folgt die Anwendung auf das vorliegende Cokreuzprodukt $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$.

Definition 5.2.1 Es sei S eine lokalkompakte Gruppe.

1. Für einen Operator $W \in \mathcal{L}(L^2(S \times S))$ sei $W^\varsigma := \Sigma W \Sigma^*$, wobei für alle $s_1, s_2 \in S$ und $\Phi \in L^2(S \times S)$:

$$\Sigma\Phi(s_1, s_2) := \Phi(s_2, s_1)\ .$$

2. Es sei $\tilde{S} \subset S$ eine Untergruppe und $s \in S$. Dann ist $W^s_{\tilde{S}}$ der unitäre Operator auf $L^2(\tilde{S} \times S)$, der bestimmt ist durch $(W^s_{\tilde{S}}\Phi)(\tilde{s}_1, s_2) := \Phi(\tilde{s}_1, s^{-1}\tilde{s}_1^{-1}s_2)$ für alle $\tilde{s}_1 \in \tilde{S},\ s_2 \in S$ und $\Phi \in L^2(\tilde{S} \times S)$. Ist s das Einselement in S, dann sei speziell $W_{\tilde{S}} := W^s_{\tilde{S}}$.

3. Es seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei C*-Algebren und f aus dem stetigen Dual von $\mathcal{B}'$. Dann ist die *Slice-Abbildung* gegeben durch die strikte Fortsetzung von

$$\begin{array}{lccl} S_f: & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{B}\ ; \\ & \left(\sum_{i=1}^l b_i \otimes b_i'\right) & \longmapsto & \sum_{i=1}^l b_i f(b_i') \ \text{ für alle } b_i \in \mathcal{B}, b_i' \in \mathcal{B}',\ i = 1, \ldots, l\ , \end{array}$$

auf die Multiplikatorenalgebra $\mathcal{M}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}')$. Sie wird ebenfalls mit S_f bezeichnet.

Theorem 5.2.2 (NT, Theorem A.1(b)) *Es existiert eine Bijektion zwischen den nicht degenerierten Darstellungen ν der Fourier-Algebra $A(S)$ auf einem komplexen Hilbertraum H und den unitären Operatoren $W \in \mathcal{L}(H)\overline{\otimes}\, W^*(S)$, die die Bedingung*

$$(W \otimes id_{L^2(S)})(W \otimes id_{L^2(S)})^\varsigma = (id_H \otimes W_S)(W \otimes id_{L^2(S)})(id_H \otimes W_S^*)$$

auf $H \otimes L^2(S \times S)$ erfüllen. Die Bijektion ist bestimmt durch

$$\nu(f) = S_f(W)$$

für alle $f \in A(S)$.

Präposition 5.2.3 *Ist $\tilde{S} \subset S$ eine Untergruppe der lokalkompakten Gruppe S, dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c^\infty(S)$ und $s \in S$:*

$$M_{\tilde{f}} = S_f(W_{\tilde{S}}^s) \ ,$$

wobei $\tilde{f} := (\varrho_s f)|_{\tilde{S}}$.

Beweis: Für $s \in S$ sei $\varrho_s^1 \in \mathcal{L}(L^2(\tilde{S} \times S))$ die Rechtstranslation um s in der ersten Variablen. Dann gilt analog [LPRS, Remark 3.2.(3)] für alle $s_1 \in \tilde{S},\ s_2 \in S$:

$$W_{\tilde{S}}^s \Phi(\tilde{s}_1, s_2) = \Phi(\tilde{s}_1, s^{-1}\tilde{s}_1^{-1}s_2) = (W_{\tilde{S}}\Phi)(\tilde{s}_1 s, s_2) = \varrho_s^1(W_{\tilde{S}}\Phi)(\tilde{s}_1, s_2) \ ,$$

also $W_{\tilde{S}}^s = \varrho_s^1(W_{\tilde{S}})$. Für beliebiges $f \in A(iX)$ kommutiert die Slice-Abbildung S_f mit ϱ_s^1 und es folgt

$$S_f(W_{\tilde{S}}^s) = S_f(\varrho_s^1 W_{\tilde{S}}) = \varrho_s\Big(S_f(W_{\tilde{S}})\Big) = \varrho_s(f)\Big|_{\tilde{S}} = \tilde{f} \ .$$

□

Definition 5.2.4 Es sei δ eine Coaktion einer lokalkompakten Gruppe S auf einer C*-Algebra $\mathcal{B}$. Ein Paar (π, W), bestehend aus einer nicht degenerierten Darstellung π von $\mathcal{B}$ auf einem komplexen Hilbertraum H und einem unitären Operator W aus $\mathcal{L}(H)\overline{\otimes}W^*(S)$, der mittels Theorem 5.2.2 zu einer nicht degenerierten Darstellung ν von $A(S)$ auf H korrespondiert, heißt ein *covariantes Paar* für das System $(\mathcal{B}, S, \delta)$, falls für alle $b \in \mathcal{B}$ die Bedingung

$$\mathcal{M}\Big(\pi \otimes id_{\mathcal{C}_0(S)}\Big)\Big(\delta(b)\Big) = W\Big(\pi(b) \otimes id_{L^2(S)}\Big)W^* \tag{5.2.5}$$

erfüllt ist. Hierbei ist $\mathcal{M}(\pi \otimes id_{\mathcal{C}_0(S)})$ die strikte Fortsetzung von $\pi \otimes id_{\mathcal{C}_0(S)}$ nach $\mathcal{M}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{C}_0(S))$ gemäß Definition 5.1.5.

Theorem 5.2.6 (LPRS, Theorem 3.7) *Sei δ eine Coaktion einer lokalkompakten Gruppe S auf einer C^*-Algebra $\mathcal{B}$ und (π, W) sei ein covariantes Paar für das System $(\mathcal{B}, S, \delta)$. Dann existiert eine Darstellung $\Pi(\pi, \nu)$ des Cokreuzproduktes $\mathcal{B}\otimes_{\delta_S}\mathcal{C}_0(S)$, welche bestimmt ist durch*

$$\Pi\Big(\delta(b)(1 \otimes g)\Big) = \pi(b)\nu(g)$$

für alle $b \in \mathcal{B},\ g \in \mathcal{C}_0(S)$. Die Abbildung $(\pi, \nu) \mapsto \Pi(\pi, \nu)$ ist eine Bijektion zwischen covarianten Paaren des Systems $(\mathcal{B}, S, \delta)$ und den nicht degenerierten Darstellungen von $\mathcal{B}\otimes_{\delta_S}\mathcal{C}_0(S)$.

In Satz 4.3.2 wurde bereits für jede allgemeine Facette $ik\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von Λ_p eine Darstellung $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$ der C*-Algebra $C^*_p(iX)$ konstruiert. Um Theorem 5.2.6 auf das Cokreuzprodukt $C^*_p(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$ anwenden zu können, muß nun noch eine Darstellung ν von $A(iX)$ gefunden werden, so daß der durch Theorem 5.2.2 eindeutig bestimmte Operator W gemeinsam mit $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$ ein covariantes Paar gemäß Definition 5.2.4 bildet. Da $A(iX) \subset \mathcal{C}_0(iX)$ und $\mathcal{C}^\infty_c(iX) \subset A(iX)$ [E, Proposition 3.26], liegt es wegen Präposition 5.2.3 nahe, $\nu(f)$ als Einschränkung des stetigen Multiplikationsoperators $M_f,\ f \in \mathcal{C}^\infty_c(iX)$, zu definieren.

Lemma 5.2.7 *Für alle allgemeinen Facetten $ik\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von Λ_p, $s \in iX$ und g aus $\mathcal{C}^\infty_c(iX)$ sei $g^k_{\tilde{r}s} := (\varrho_s g)|_{ikX_{\tilde{r}}}$. Dann induziert die Abbildung*

$$\nu^k_{\tilde{r}s} : \mathcal{C}^\infty_c(iX) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde{r}})\Big);\ g \longmapsto M_{g^k_{\tilde{r}s}}$$

eine nicht degenerierte Darstellung der Fourier-Algebra $A(iX)$ auf $L^2(ikX_{\tilde{r}})$.

Beweis: Da $\mathcal{C}^\infty_c(iX)$ eine dichte Menge in $A(iX)$ ist [E, Proposition 3.26], ist die Darstellung auf $A(iX)$ wohldefiniert und es folgt $\nu^k_{\tilde{r}s}(A(iX)) = M_{A(ikX_{\tilde{r}})}$. Da $A(ikX_{\tilde{r}})$ wiederum dicht in $\mathcal{C}_0(ikX_{\tilde{r}})$ ist, und $\mathcal{C}_0(iX_{\tilde{r}})$ eine nicht degenerierte C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(L^2(iX_{\tilde{r}}))$ ist, folgt, daß auch die Darstellung $\nu^k_{\tilde{r}s}$ nicht degeneriert ist. □

Mit Präposition 5.2.3 folgt, daß der gemäß Theorem 5.2.2 mit $\nu^k_{\tilde{r}s}$ korrespondierende Operator $W^k_{\tilde{r}s}$ gegeben ist durch

$$W^k_{\tilde{r}s}\Phi(\widetilde{s}_1, s_2) = \Phi(\widetilde{s}_1, s_2 - \widetilde{s}_1 - s)$$

für alle $\widetilde{s}_1 \in ikX_{\tilde{r}},\ k \in K^\sigma,\ s, s_2 \in iX$ und $\Phi \in L^2(ikX_{\tilde{r}}) \otimes L^2(iX)$. Man beachte, daß iX eine additive Gruppe ist. Deshalb wird von nun an, im Unterschied zur Definition 5.2.1 und Präposition 5.2.3, wieder die additive Notation der Inversenbildung verwendet. Für den Operator $W^k_{\tilde{r}s}$ muß nun gezeigt werden, daß er gemeinsam mit $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$ ein covariantes Paar für das System $(C^*_p(iX), iX, \delta_{iX})$ gemäß Definition 5.2.4 bildet.

Lemma 5.2.8 *Seien $ik\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ eine beliebige allgemeine Facette von Λ_p und $s \in iX$. Dann gilt für alle $g \in A(iX)$:*

$$\mathcal{M}\Big(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} \otimes id_{\mathcal{C}_0(iX)}\Big)\Big(\delta(\ell_{E_pf})\Big) = W^k_{\tilde{r}s}\Big(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_pf}) \otimes id_{L^2(iX)}\Big)(W^k_{\tilde{r}s})^*\ .$$

Beweis: Sei $f \in A(iX)$ beliebig und $\ell_{\widetilde{\omega}} := \pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_pf}) \in (W^k_{\tilde{r}s})^*(iX)$.

Behauptung 1: *$W^k_{\tilde{r}s}(\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde{r}s})^*$ kommutiert mit allen Rechtstranslationen $\varrho_{\widetilde{s}_1} \otimes \varrho_{s_2}, \widetilde{s}_1 \in ikX_{\tilde{r}}, s_2 \in iX$.*

Beweis der Behauptung 1: Seien $\phi_1 \in L^2(ikX_{\tilde r}), \phi_2 \in L^2(iX)$, $\widetilde{s}_1, \widetilde{t}_1 \in ikX_{\tilde r}$ und $s_2, t_2 \in iX$ beliebig. Dann zeigt die Rechnung:

$$\begin{aligned}
&(\varrho_{\widetilde{s}_1} \otimes \varrho_{s_2}) W^k_{\tilde r s}(\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1, t_2) \\
&\quad = W^k_{\tilde r s}(\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1 + \widetilde{s}_1, t_2 + s_2) \\
&\quad = (\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1 + \widetilde{s}_1, t_2 + s_2 - \widetilde{t}_1 - \widetilde{s}_1 - s) \\
&\quad = (W^k_{\tilde r s})^*(\ell_{\widetilde{\omega}}(\phi_1) \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1 + \widetilde{s}_1, t_2 + s_2 - \widetilde{t}_1 - \widetilde{s}_1 - s) \\
&\quad = (\ell_{\widetilde{\omega}}(\phi_1) \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1 + \widetilde{s}_1, t_2 + s_2) \\
&\quad = (\varrho_{\widetilde{s}_1} \otimes \varrho_{s_2})(\ell_{\widetilde{\omega}}(\phi_1) \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1, t_2) \\
&\quad = ((W^k_{\tilde r s})^* \varrho_{\widetilde{s}_1} \otimes \varrho_{s_2})(\ell_{\widetilde{\omega}}(\phi_1) \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1, t_2 - \widetilde{t}_1 - s) \\
&\quad = (\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*(\varrho_{\widetilde{s}_1} \otimes \varrho_{s_2})(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1, t_2 - \widetilde{t}_1 - s) \\
&\quad = W^k_{\tilde r s}(\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*(\varrho_{\widetilde{s}_1} \otimes \varrho_{s_2})(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{t}_1, t_2)\ ,
\end{aligned}$$

daß die Behauptung 1 gilt. □

Wegen (5.1.9) kommutiert auch $\mathcal{M}(\pi^k_{\tilde r \tilde p} \otimes id_{\mathcal{C}(iX)})(\delta(\ell_{E_p f}))$ mit allen Rechtstranslationen $\varrho_{\widetilde{s}_1} \otimes \varrho_{s_2}$, $\widetilde{s}_1 \in ikX_{\tilde r}$, $s_2 \in iX$. Damit sind beides Operatoren aus $W^*(ikX_{\tilde r}) \widetilde{\otimes} W^*(iX)$ und es genügt mit (3.1.5) zu zeigen, daß die Fourier-Transformationen dieser Operatoren als Multiplikationsoperatoren auf $L^2(kX^{\#}_{\tilde r}) \otimes L^2(X^{\#})$ übereinstimmen.

Behauptung 2: *Als Multiplikationsoperatoren auf $L^2(kX^{\#}_{\tilde r}) \otimes L^2(X^{\#})$ gilt die Identität:*

$$Ad(\mathcal{F})\Big(W^k_{\tilde r s}(\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*\Big) = M_{\mathcal{F}(\widetilde{\omega})(\widetilde{\xi} + \widetilde{\eta})}\ .$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{F}$ hier die Fourier-Transformation von $L^2(ikX_{\tilde r}) \otimes L^2(iX)$ nach $L^2(kX^{\#}_{\tilde r}) \otimes L^2(X^{\#})$.

Beweis der Behauptung 2: Seien $\widetilde{s}_1 \in ikX_{\tilde r}, s_2 \in iX$ und $\phi_1 \in L^2(ikX_{\tilde r})$, beziehungsweise $\phi_2 \in L^2(iX)$ beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
&W^k_{\tilde r s}(\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{s}_1, s_2) \\
&\quad = (\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde r s})^*(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{s}_1, s_2 - \widetilde{s}_1 - s) \\
&\quad = \int_{ikX_{\tilde r}} \widetilde{\omega}(\widetilde{s})(W^k_{\tilde r s})^*(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{s}_1 - \tilde{s}, s_2 - \widetilde{s}_1 - s)\, d\widetilde{s} \\
&\quad = \int_{ikX_{\tilde r}} \widetilde{\omega}(\widetilde{s})\phi_1(\widetilde{s}_1 - \widetilde{s})\phi_2(s_2 - \widetilde{s})\, d\widetilde{s}\ .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $\widetilde{\xi} \in k X_{\tilde{r}}{}^{\#}, \eta \in X^{\#}$ mit $\widetilde{\eta} := \eta_{\tilde{r}} = \eta|_{X_{\tilde{r}}}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\Big(\left(W^k_{\tilde{r}s}(\ell_{\widetilde{\omega}} \otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde{r}s})^*\right) (\phi_1 \otimes \phi_2)\Big)(\widetilde{\xi}, \eta) \\
&= \int_{ikX_{\tilde{r}}} \int_{iX} \int_{ikX_{\tilde{r}}} \widetilde{\omega}(\widetilde{s}) \phi_1(\underbrace{\widetilde{s}_1 - \tilde{s}}_{=:\widetilde{t}_1}) \phi_2(\underbrace{s_2 - \widetilde{s}^{-1}}_{=:t_2}) e^{-i\widetilde{\xi}(\widetilde{s}_1)}\, e^{-i\eta(s_2)}\, d\widetilde{s}\, ds_2\, d\widetilde{s}_1 \\
&= \int_{ikX_{\tilde{r}}} \int_{iX} \phi_1(\widetilde{t}_1)\phi_2(t_2) e^{-i(\widetilde{\xi}(\widetilde{t}_1)+\eta(t_2))}\, dt_2\, d\widetilde{t}_1 \int_{ikX_{\tilde{r}}} \widetilde{\omega}(\widetilde{s}) e^{-i(\widetilde{\xi}(\widetilde{s})+\eta(\widetilde{s}))}\, d\widetilde{s} \\
&= \mathcal{F}(\phi_1 \otimes \phi_2)(\widetilde{\xi}, \eta) \cdot \mathcal{F}(\widetilde{\omega})(\widetilde{\xi} + \widetilde{\eta}) \ , \qquad (5.2.9)
\end{aligned}$$

was die Behauptung 2 beweist. □

Behauptung 3: *Für alle* $\tilde{\xi} \in kX_{\tilde{r}}{}^{\#}, \eta \in X^{\#}$ *gilt:*

$$\mathcal{M}\Big(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} \otimes id_{\mathcal{C}(iX)}\Big)\Big(\delta(\ell_{E_p f})\Big)(\tilde{\xi}, \eta) = (E_{\tilde{r}\tilde{p}} f_{\tilde{r}\tilde{p}})^{\#}(\tilde{\xi} + \tilde{\eta}) \ .$$

Beweis der Behauptung 3: $\delta_{iX}(\ell_{E_p f}) \in \tilde{\mathcal{M}}(C^*_p(iX) \bar{\otimes} C^*(iX))$ ist ein Limes der Form

$$\delta_{iX}(\ell_{E_p f}) = \lim_{l_0 \to \infty} \sum_{i=1}^{l_0} \ell_{\omega_i} \otimes \ell_{f_i} \ ,$$

mit $\ell_{\omega_i} \in C^*_p(iX)$ und $f_i \in L^1(iX)$ für alle $i = 1, \ldots, l_0$ und $l_0 \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\mathcal{M}\Big(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} \otimes id_{\mathcal{C}(iX)}\Big)\Big(\delta(\ell_{E_p f})\Big) = \lim_{l_0 \to \infty} \sum_{i=1}^{l_0} \ell_{\widetilde{\omega}_i} \otimes \ell_{f_i} \ ,$$

wobei $\ell_{\widetilde{\omega}_i} \in C^*_{\tilde{r}\tilde{p}}(iX_{\tilde{r}})$ für alle $i = 1, \ldots, l_0$ und $l_0 \in \mathbb{N}$. Sei $\widetilde{\xi} \in kX_{\tilde{r}}{}^{\#}, \eta \in X^{\#}$ und $\tilde{k}\tilde{\theta} = \tilde{\xi}$ die Spektralzerlegung von $\tilde{\xi}$. Dann ergibt sich für eine beliebige Folge $\theta \overset{k\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}}{\longrightarrow} \tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned}
&Ad(\mathcal{F})\Big(\mathcal{M}\left(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} \otimes id_{\mathcal{C}(iX)}\right)\left(\delta(\ell_{E_p f})\right)\Big)(\widetilde{\xi}, \eta) \\
&= \lim_{l_0 \to \infty} \sum_{i=1}^{l_0} Ad(\mathcal{F})\Big(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{\omega_i})\Big)(\widetilde{\xi}) \otimes Ad(\mathcal{F})(\ell_{f_i})(\eta) \\
&= \lim_{l_0 \to \infty} \sum_{i=1}^{l_0} \lim_{\theta \overset{k\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}}{\longrightarrow} \widetilde{\theta}} \omega_i^{\#}(\tilde{k}\theta) \otimes (f_i)^{\#}(\eta) \\
&= \lim_{l_0 \to \infty} \lim_{\theta \overset{k\Lambda^{\#}_{\tilde{r}\tilde{p}}}{\longrightarrow} \widetilde{\theta}} \left(\sum_{i=1}^{l_0} \omega_i^{\#}(\tilde{k}\theta) \otimes (f_i)^{\#}(\eta) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \xrightarrow{k\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p}} \tilde\theta} \left(\lim_{l_0\to\infty} \sum_{i=1}^{l_0} \omega_i^{\#}(\tilde k\theta)\otimes (f_i)^{\#}(\eta)\right) \\
&= \lim_{\theta \xrightarrow{k\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p}} \tilde\theta} \delta_{iX}(\ell_{E_pf})^{\#}(\tilde k\theta,\eta) \\
&= \lim_{\theta \xrightarrow{k\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p}} \tilde\theta} (E_pf)^{\#}(\tilde k\theta+\eta)\ . \qquad (5.2.10)
\end{aligned}
$$

Dies ist aber gerade gleich $(E_{\tilde r\tilde p}f_{\tilde r\tilde p})^{\#}(\widetilde\xi+\widetilde\eta)$, denn für alle $k\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p}$ wurde

$$\lim_{\theta \xrightarrow{k\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p}} \tilde\theta} \Big((\tilde k\theta)+\eta\Big) = \widetilde\xi+\widetilde\eta$$

gezeigt. Dies beendet den Beweis der Behauptung 2. □

Behauptung 2 und Behauptung 3 zeigen, daß die Fourier-Transformierten von $\mathcal{M}\left(\pi^k_{\tilde r\tilde p}\otimes id_{\mathcal{C}(iX)}\right)(\delta(\ell_{E_pf}))$ und $W^k_{\tilde rs}(\ell_{\tilde\omega}\otimes id_{L^2(iX)})(W^k_{\tilde rs})^*$ als Multiplikationsoperatoren auf $L^2(kX^{\#}_{\tilde r}\times X^{\#})$ übereinstimmen, was den Beweis des Lemmas beschließt.
□

Satz 5.2.11 *Für jede allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde r\tilde p}$ von Λ_p und für jedes $s\in iX$ existiert eine nicht degenerierte Darstellung $\Pi(\tilde r,\tilde p,k,s)$ von $C_p^*(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX)$ auf $L^2(ikX_{\tilde r})$. $\Pi(\tilde r,\tilde p,k,s)$ ist eindeutig bestimmt durch*

$$\delta_{iX}(\ell_{E_pf})(id_{L^2(iX)}\otimes g)\longmapsto \pi^k_{\tilde r\tilde p}(\ell_{E_pf})\nu^k_{\tilde rs}(g)=\ell_{E_{\tilde r\tilde p}f_{\tilde r\tilde p}}g^k_{\tilde rs} \qquad (5.2.12)$$

für alle $\ell_{E_pf}\in C_p^*(iX)$ und $g\in A(iX)$.

Beweis: Für jede allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde r\tilde p}$ von Λ_p und jedes $s\in iX$ ist $\pi^k_{\tilde r\tilde p}$ wegen Satz 4.3.2 eine nicht degenerierte Darstellung von $C_p^*(iX)$ auf $L^2(ikX_{\tilde r})$ und $\nu^k_{\tilde rs}$ wegen Lemma 5.2.7 eine nicht degenerierte Darstellung von $A(iX)$ auf $L^2(ikX_{\tilde r})$. Wegen Präposition 5.2.3 ist $W^k_{\tilde rs}$ der gemäß Theorem 5.2.2 mit $\nu^k_{\tilde rs}$ korrespondierende unitäre Operator aus $\mathcal{L}(L^2(ikX_{\tilde r})\overline{\otimes}W^*(S))$. Lemma 5.2.8 zeigt, daß dieser Operator zusammen mit $\pi^k_{\tilde r\tilde p}$ die Covarianzbedingung (5.2.5) für die Coaktion δ_{iX} erfüllt. Damit ist $(\pi^k_{\tilde r\tilde p},\nu^k_{\tilde rs})$ gemäß Definition 5.2.4 ein covariantes Paar des Systems $(C_p^*(iX),iX,\delta_{iX})$ und mit Theorem 5.2.6 existiert eine nicht degenerierte Darstellung

$$\Pi(\tilde r,\tilde p,k,s):=\Pi\left(\pi^k_{\tilde r\tilde p},\nu^k_{\tilde rs}\right)$$

des Cokreuzproduktes $C_p^*(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX)$ auf $L^2(ikX_{\tilde r})$, welche durch die Eigenschaft (5.2.12) eindeutig bestimmt ist. □

Kapitel 6

Darstellungstheorie der Hardy-Toeplitz C*-Algebra

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist die Ableitung eines Systems paarweise inäquivalenter Darstellungen von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ aus den bisher konstruierten Darstellungen $\Pi(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$ des Cokreuzproduktes $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$.

Dazu wird im ersten Abschnitt die Hardy-Toeplitz C*-Algebra als Kompression der Operatoralgebra $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ realisiert. Der Trick für den Beweis der Operatoridentität aus Präposition 6.1.1 ist dem Beweis von [U6, Theorem 4.10.38.] entnommen. Zusammen mit dem Resultat, daß $C_p^*(iX)$ eine Vervollständigung von $C^*(iX)$ ist, ergibt sich das Korollar, daß $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ alle kompakten Operatoren auf $H_p^2(iX)$ enthält.

Im zweiten Abschnitt werden die Darstellungen $\Pi(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$ mittels des Isomorphismus Ψ auf $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX)$ übertragen und es wird nachgewiesen, daß die Homomorphismuseigenschaft der Darstellungen beim Übergang zu $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ erhalten bleibt. Danach folgt der etwas aufwendige Beweis zur Charakterisierung der zueinander inäquivalenten Darstellungen. Es stellt sich heraus, daß zwei Darstellungen genau dann zueinander inäquivalent sind, wenn sie durch verschiedene Facetten des Tubengebietes Ξ induziert wurden. Die Randstruktur von Ξ bestimmt also direkt die zueinander inäquivalenten Darstellungen von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$; allerdings nur als Teilmenge der bis dato konstruierten Darstellungen $\Pi(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$, da es zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar ist, ob diese Darstellungen schon das gesamte Spektrum der Hardy-Toeplitz C*-Algebra konstituieren.

6.1 Realisation von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ relativ $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$

Präposition 6.1.1 *Seien $g_1,\ldots,g_{l-1} \in \mathcal{C}^\infty(iX)$ und g_l, $f_1,\ldots,f_l,\varphi_0,\ldots,\varphi_l \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$, so daß die Gleichung*

$$\prod_{i=0}^{l} \varphi_j(t_j) = \prod_{j=1}^{l} f_j(t_{j-1}-t_j)g_j(t_j) \tag{6.1.2}$$

für alle $t_0,\ldots,t_l \in iX$ erfüllt ist. Dann gilt in $\mathcal{L}(L^2(iX))$ die Operatoridentität

$$\ell_{E_p}\,\varphi_0\,\ell_{E_p}\,\varphi_1\,\ell_{E_p}\ldots\ell_{E_p}\,\varphi_l\,\ell_{E_p} = \ell_{E_p}\,\ell_{E_pf_1}\,g_1\ldots\ell_{E_pf_l}\,g_l\,\ell_{E_p}\ . \tag{6.1.3}$$

Beweis: Seien ohne Einschränkung der Allgemeinheit $h_1, h_2 \in H_p^2(iX)$ beliebig. Dann folgt für das in der ersten Variablen antilineare Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
&\langle h_1|\ \ell_{E_p}\,\varphi_0\,\ell_{E_p}\ldots\ell_{E_p}\,\varphi_l\,h_2\rangle_{L^2(iX)}\\
&= \int\limits_{iX}\ldots\int\limits_{iX} h_1(t_0)^*\varphi_0(t_0)\varphi_1(t_0-s_1)\ldots\varphi_l(t_0-s_1-\ldots-s_l)\,\cdot\\
&\qquad\cdot h_2(t_0-s_1-\ldots-s_l)E_p(ds_1)\ldots E_p(ds_l)dt_0\ .
\end{aligned}$$

Setzt man nun $s_j := t_{j-i}-t_j$, dann gilt für alle $j=1,\ldots,l$

$$t_j = t_0 - s_1 - \ldots - s_j \tag{6.1.4}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{iX}\ldots\int\limits_{iX} h_1(t_0)^*\varphi_0(t_0)\varphi_1(t_0-s_1)\ldots\varphi_l(t_0-s_1-\ldots-s_l)\,\cdot\\
&\qquad\cdot h_2(t_0-s_1-\ldots-s_l)E_p(ds_1)\ldots E_p(ds_l)dt_0\\
&= \int\limits_{iX}\ldots\int\limits_{iX} h_1(t_0)^*\varphi_0(t_0)\varphi_1(t_1)\ldots\varphi_l(t_l)\,\cdot\\
&\qquad\cdot h_2(t_l)E_p(d(t_0-t_1))\ldots E_p(d(t_{l-1}-t_l))dt_0\\
&= \int\limits_{iX}\ldots\int\limits_{iX} h_1(t_0)^*g_1(t_1)g_2(t_2)\ldots g_l(t_l)\,\cdot\\
&\qquad\cdot h_2(t_l)f_1(t_0-t_1)\ldots f_l(t_{l-1}-t_l)E_p(d(t_0-t_1))\ldots E_p(d(t_{l-1}-t_l))dt_0\\
&\overset{(6.1.4)}{=} \int\limits_{iX}\ldots\int\limits_{iX} h_1(t_0)^*g_1(t_0-s_1)g_2(t_0-s_1-s_2)\ldots g_l(t_0-s_1-\ldots-s_l)\,\cdot\\
&\qquad\cdot h_2(t_0-s_1-\ldots-s_l)f_1(s_1)\ldots f_l(s_l)E_p(ds_1)\ldots E_p(ds_l)dt_0\\
&= \langle h_1|\ \ell_{E_pf_1}\,g_1\ldots\ell_{E_pf_l}\,g_l\,h_2\rangle_{L^2(iX)}\ .
\end{aligned}$$

□

Korollar 6.1.5 *Sind $f, g, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$, so daß*

$$\varphi(t_0) = f(t_0 - t_1)g(t_1)$$

für alle $t_0, t_1 \in iX$. Dann gilt in $\mathcal{L}(L^2(iX))$ die Operatoridentität

$$\ell_{E_p}\, \varphi\, \ell_{E_p} = \ell_{E_p}\, \ell_{E_p f}\, g\, \ell_{E_p} \ .$$

Beweis: Völlig analog der Rechnung in Präposition 6.1.1. □

Mit dieser technischen Vorbereitung kann nun die C*-Algebra $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ realisiert werden.

Satz 6.1.6 *Für die beiden folgenden C^*-Unteralgebren von $\mathcal{L}(L^2(iX))$ gilt:*

$$\mathcal{T}\Big(H_p^2(iX)\Big) = \ell_{E_p}\, \mathcal{K}_{\Lambda_p}\Big(L^2(iX)\Big)\, \ell_{E_p} \ .$$

Beweis: Für den Beweis von $\ell_{E_p}\, \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))\, \ell_{E_p} \subset \mathcal{T}(H_p^2(iX))$ reicht es wegen Dichtheit zu zeigen, daß ein Erzeugendensystem von $\ell_{E_p}\, \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))\, \ell_{E_p}$ in $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ liegt. Da $\mathcal{C}_c^\infty(iX)$ dicht in $\mathcal{C}_0(iX)$ ist, genügt es

$$\ell_{E_p}\left(\prod_{j=1}^{l} \ell_{E_p f_j}\, g_j\right) \ell_{E_p} \in \mathcal{T}\Big(H_p^2(iX)\Big) \tag{6.1.7}$$

für beliebige $f_1, \ldots, f_l \in A(iX)$, $g_1, \ldots, g_l \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$ zu zeigen. Da weiterhin $\mathcal{C}_c^\infty(iX)$ dicht in $A(iX)$ ist [E, Proposition 3.26], kann man außerdem annehmen, daß $f_1, \ldots, f_l$ aus $\mathcal{C}_c^\infty(iX)$ sind. Definiert man für alle $t_0, \ldots, t_l \in iX$

$$f(t_0, \ldots, t_l) := \prod_{j=1}^{l} f_j(t_{j-1} - t_j) g_j(t_j) \ , \tag{6.1.8}$$

dann ist $f \in \mathcal{C}^\infty(iX \times \ldots \times iX)$. Seien $O_{f_1}, \ldots, O_{f_l}$ und O_{g_l} die kompakten Träger von $f_1, \ldots, f_l$ und g_l. Dann ist der Träger von f enthalten in der kompakten Menge

$$O := \Big(O_{f_1} + \ldots + O_{f_l} + O_{g_l}\Big) \times \ldots \times \Big(O_{f_l} + O_{g_l}\Big) \times O_{g_l} \ .$$

Also ist f aus $\mathcal{C}_c^\infty(iX \times \ldots \times iX)$, worin $\mathcal{C}_c^\infty(iX) \otimes \ldots \otimes \mathcal{C}_c^\infty(iX)$ eine dichte Teilmenge bildet, und läßt sich gleichmäßig approximieren durch endliche Summen mit Summanden der Form $\prod_{j=0}^{l} \varphi_j(t_j)$, wobei $\varphi_0, \ldots, \varphi_l$ geeignete Funktionen aus $\mathcal{C}_c^\infty(iX)$ sind. Mit Lemma 6.1.1 folgt nun (6.1.7).

Für die Umkehrung genügt es ebenfalls ein Erzeugendensystem zu betrachten. Seien also $\varphi_0, \ldots, \varphi_l \in \mathcal{C}_0(iX)$ und

$$T = \prod_{j=0}^{l} \ell_{E_p}\, \varphi_j\, \ell_{E_p} \ . \tag{6.1.9}$$

Da $\mathcal{C}_c^\infty(iX) \cdot \mathcal{C}_c^\infty(iX)$ eine dichte Menge in $\mathcal{C}_0(iX)$ ist, reicht es $\varphi_0, \ldots, \varphi_l \in \mathcal{C}_0^\infty(iX)$ so zu wählen, daß für alle $j = 1, \ldots, l-1$ eine Faktorisierung $\varphi_j = \varphi_{j1} \cdot \varphi_{j2}$, mit $\varphi_{j1},\ \varphi_{j2} \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$, existiert. Dann ist

$$g(s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_l) := \varphi_0(s_1 + t_1)\Big(\prod_{j=1}^{l-1} \varphi_{j1}(t_j)\varphi_{j2}(s_{j+1} + t_{j+1})\Big)\varphi_l(t_l)$$

eine Funktion aus $\mathcal{C}_c^\infty(iX \times \ldots \times iX)$ ($2l$-faches Kreuzprodukt) und daher ein gleichmäßiger Limes endlicher Summen mit Summanden der Form $\prod_{j=1}^{l} f_j(s_j)g_j(t_j)$, wobei $f_1, \ldots, f_l,\ g_1 \ldots, g_l$ geeignete Funktionen aus $\mathcal{C}_c^\infty(iX)$ sind. Nun setzt man $s_j := t_{j-1} - t_j,\ j = 1, \ldots, l$, und bekommt eine Darstellung von $\prod_{j=0}^{l} \varphi_j(t_j)$ als gleichmäßigen Limes endlicher Summen mit Summanden der Form

$$\prod_{j=1}^{l} f_j(t_{j-1} - t_j)g_j(t_j) \ .$$

Wendet man hierauf Lemma 6.1.1, beziehungsweise Korollar 6.1.5 an, so ergibt sich $T \in \ell_{E_p}\, \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))\, \ell_{E_p}$, was die zweite Inklusion und damit den Satz beweist. □

Korollar 6.1.10 *Aufgefaßt als C^*-Unteralgebren von $\mathcal{L}(L^2(iX))$ gilt für die kompakten Operatoren auf $H^2_p(iX)$*

$$\mathcal{K}\Big(H^2_p(iX)\Big) = \ell_{E_p}\, \mathcal{K}\Big(L^2(iX)\Big)\, \ell_{E_p}$$

und insbesondere:

$$\mathcal{K}\Big(H^2_p(iX)\Big) \lhd \mathcal{T}\Big(H^2_p(iX)\Big) \ .$$

Beweis: Die Kompression $\ell_{E_p}\, T\, \ell_{E_p}$ eines kompakten Operators aus $\mathcal{K}(L^2(iX))$ ist natürlich auch auf $H^2_p(iX) \subset L^2(iX)$ kompakt. Umgekehrt läßt sich jeder kompakte Operator T' auf $H^2_p(iX)$ trivial zu einem Operator T auf ganz $L^2(iX)$ fortsetzen. Für diesen gilt dann $\ell_{E_p}\, T\, \ell_{E_p} = T'$ und es folgt die zweite Inklusion. Da die kompakten Operatoren auf $L^2(iX)$ wegen Bemerkung 5.1.16 ein Ideal in $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ sind, bilden sie wegen Satz 6.1.6 auch in $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$ ein Ideal. □

6.2 Darstellungen von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$

Gemäß Korollar 5.1.14 ist $\Psi : C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX) \longrightarrow \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ ein Isomorphismus von C*-Algebren. Deshalb wird für jede Darstellung $\Pi(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$ über das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Pi(\tilde{r},\tilde{p},k,s)"'] & \mathcal{K}_{\Lambda_p}\Big(L^2(iX)\Big) \arrow[d, "\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde{r},\tilde{p},k,s)"] \\ \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde{r}})\Big) \arrow[r, "id_{\mathcal{L}(L^2(ikX_{\tilde{r}}))}"] & \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde{r}})\Big) \end{tikzcd} \tag{6.2.1}$$

eine mit $\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$ bezeichnete Darstellung von $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ definiert. Im folgenden wird zur Vereinfachung der Notation häufig $\Pi_{\mathcal{K}}$ statt $\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$ geschrieben, sofern dadurch keine Unklarheiten entstehen können.

Definition 6.2.2 Es sei $H \neq \{0\}$ ein komplexer Hilbertraum und $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ eine Darstellung der C*-Algebra $\mathcal{B}$ auf H.

1. Ein Unterraum $V \subset H$ heißt *invariant* unter $\pi(\mathcal{B})$, falls $\pi(b)(v) \in V$ für alle $b \in \mathcal{B},\ v \in V$.

2. π heißt *irreduzibel*, falls es außer H und $\{0\}$ keinen weiteren abgeschlossenen Unterraum von H gibt, der unter $\pi(\mathcal{B})$ invariant ist.

3. Das *Spektrum* von $\mathcal{B}$ sei die Menge aller nicht trivialen irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{B}$.

Wenn die Dimension von H größer als eins ist, ist jede irreduzible Darstellung einer C*-Algebra $\mathcal{B}$ auf H auch nicht degeneriert; allein die triviale Darstellung auf $\mathbb{C}$ ist irreduzibel und degeneriert. Das Spektrum einer C^*-Algebra $\mathcal{B}$ besteht also aus allen nicht degenerierten irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{B}$.

Lemma 6.2.3 *Für jede allgemeine Facette $ik\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von Λ_p und für jedes $s \in iX$ existiert eine nicht triviale irreduzible Darstellung $\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$ von $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ auf $L^2(ikX_{\tilde{r}})$. Für diese Darstellung gilt*

$$\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f}\, g) = \pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k(\ell_{E_p f})\, \nu_{\tilde{r}s}^k(g) = \ell_{E_{\tilde{r}\tilde{p}} f_{\tilde{r}\tilde{p}}}\, g_{\tilde{r}s}^k$$

für alle $f \in A(iX),\ g \in \mathcal{C}_0(iX)$. Insbesondere:

$$\Pi_{\mathcal{K}}\Big(\mathcal{K}_{\Lambda_p}\left(L^2(iX)\right)\Big) \subset \mathcal{K}_{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}}\Big(L^2(ikX_{\tilde{r}})\Big)\ .$$

Beweis: Existenz und Form der Darstellung folgt direkt aus der Definition in (6.2.1). Hieraus ergibt sich auch der Zusatz $\Pi_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX)) \subset \mathcal{K}_{\Lambda_{\tilde r\tilde p}}(L^2(ikX_{\tilde r}))$. Da das Bild von $\Pi_{\mathcal{K}}$ in $\mathcal{L}(L^2(ikX_{\tilde r}))$ gleich dem Bild von $C_p^*(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$ unter $\Pi(\tilde r, \tilde p, k, s)$ und $\Pi(\tilde r, \tilde p, k, s)$ nicht degeneriert ist, ist auch

$$\Pi_{\mathcal{K}} : \mathcal{K}_{\Lambda_p}\Big(L^2(iX)\Big) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde r})\Big)$$

nicht degeneriert. Analog Bemerkung 5.1.16 folgt

$$\mathcal{K}\Big(L^2(ikX_{\tilde r})\Big) \subset \mathcal{K}_{\Lambda_{\tilde r\tilde p}}\Big(L^2(ikX_{\tilde r})\Big) = \Pi_{\mathcal{K}}\Big(\mathcal{K}_{\Lambda_p}\left(L^2(iX)\right)\Big) .$$

Da $L^2(iX) \neq \{0\}$ zeigt dies, daß $\Pi_{\mathcal{K}}$ irreduzibel und nicht trivial ist, und alternativ, daß $\Pi_{\mathcal{K}}$ nicht degeneriert ist. $\square$

Korollar 6.2.4 *Es sei $\tilde k k\Lambda_{\tilde r'\tilde p'}$, $\widetilde{k} \in K_{\tilde r}^{\tilde \sigma}$, eine Facette von $k\Lambda_{\tilde r\tilde p}$. Dann ist $\tilde k k\Lambda_{\tilde r'\tilde p'}$ eine Facette von Λ_p und es gilt*

$$\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde r', \tilde p', \tilde k, \tilde s)\Big(\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde r, \tilde p, k, s)\left(\ell_{E_p f} g\right)\Big) = \Pi_{\mathcal{K}}(\tilde r', \tilde p', \tilde k k, \tilde s + s)\left(\ell_{E_p f} g\right)$$

für alle $f \in A(iX)$, $g \in \mathcal{C}_0(iX)$ und $s \in iX$, $\tilde s \in ikX_{\tilde r}$.

Beweis: Nach Definition 4.1.12 ist $\tilde k k\Lambda_{\tilde r'\tilde p'}$ auch eine Facette von Λ_p. Seien nun $f \in A(iX)$ und $g \in \mathcal{C}_0(iX)$ beliebig. Dann gilt

$$\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde r, \tilde p, k, s)\left(\ell_{E_p f} g\right) = \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p} f^k_{\tilde r}}\, g^k_{\tilde r s}$$

mit $f_{\tilde r}^k = f|_{ikX_{\tilde r}}$ und $g_{\tilde r s}^k = (\varrho_s g)|_{ifX_{\tilde r}}$, und es ergibt sich

$$\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde r', \tilde p', \tilde k, \tilde s)\left(\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p} f^k_{\tilde r}} g^k_{\tilde r s}\right) = \ell_{\tilde E \tilde f}\, \tilde g$$

mit

$$\tilde E = \left(\chi^{\tilde k k}_{\tilde r'\tilde p'}\right)^{\#} = E^{\tilde k k}_{\tilde r'\tilde p'}, \quad \tilde f = \left(f^k_{\tilde r}\right)\Big|_{i\tilde k k X_{\tilde r'}} = f^{\tilde k k}_{\tilde r'}$$

und

$$\tilde g = \left(\varrho_{\tilde s}\Big(\left(\varrho_s g\right)\Big|_{ikX_{\tilde r}}\Big)\right)\Big|_{i\tilde k k X_{\tilde r'}} = \left(\varrho_{\tilde s + s} g\right)\Big|_{i\tilde k k X_{\tilde r'}} .$$

Also gilt:

$$\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde r', \tilde p', \tilde k, \tilde s)\left(\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p} f^k_{\tilde r}}\, g^k_{\tilde r s}\right) = \ell_{E^{\tilde k k}_{\tilde r'\tilde p'} f^{\tilde k k}_{\tilde r'}}\, g^{\tilde k k}_{\tilde r'(\tilde s + s)} ,$$

und das Korollar ist bewiesen. $\square$

Präposition 6.2.5 *Es sei $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ eine allgemeine Facette von Λ_p. Dann ist für alle $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ der Operator $T_1\,\ell_{E_p}\,T_2\,\ell_{E_p}\,T_3$ aus $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ und es gilt:*

$$\Pi_{\mathcal{K}}(T_1\,\ell_{E_p}\,T_2\,\ell_{E_p}\,T_3) = \Pi_{\mathcal{K}}(T_1)\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_2)\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_3)\ .$$

Beweis: Seien T_1, T_2, T_3 typische Erzeuger von $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ mit $T_j = \ell_{E_p f_j} g_j$ und $f_j \in A(iX)$, $g_j \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$, $j = 1, 2, 3$. Wie in Satz 6.1.6 zeigt man, daß das Operatorprodukt

$$\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_1}\,g_1\,\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_2}\,g_2\,\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_3}\,g_3\,\ell_{E_p}$$

eine Darstellung als Limes von endlichen Summen mit Summanden der Form

$$\ell_{E_p}\,(\varphi_0\,\ell_{E_p}\,\varphi_1)\,\ell_{E_p}\,(\varphi_2\,\ell_{E_p}\,\varphi_3)\ell_{E_p}\,(\varphi_4\,\ell_{E_p}\,\varphi_5)\,\ell_{E_p}$$

besitzt, so daß $\varphi_1, \ldots, \varphi_5 \in \mathcal{C}_0(iX)$. Ebenfalls wie in Satz 6.1.6 ist

$$\ell_{E_p}\,(\varphi_0\,\ell_{E_p}\,\varphi_1)\,\ell_{E_p}\,(\varphi_2\,\ell_{E_p}\,\varphi_3)\,\ell_{E_p}\,(\varphi_4\,\ell_{E_p}\,\varphi_5)\,\ell_{E_p}$$

ein Limes endlicher Summen mit Summanden der Form

$$\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_1'}\,g_1'\,\ell_{E_p f_2'}\,g_2'\,\ell_{E_p f_3'}\,g_3'\,\ell_{E_p f_4'}\,g_4'\,\ell_{E_p f_5'}\,g_5'\ell_{E_p}\ .$$

Hierbei können wegen der Dichtheit von $\mathcal{C}_c^\infty(iX)$ in $\mathcal{C}_0(iX)$, beziehungsweise in $A(iX)$ die Funktionen $f_1', \ldots, f_5'$ und $g_1', \ldots, g_5' \in \mathcal{C}_c^\infty(iX)$ angenommen werden. Damit folgt

$$\ell_{E_p f_1}\,g_1\,\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_2}\,g_2\,\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_3}\,g_3 \in \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))\ ,$$

und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_1'}\,g_1'\,\ell_{E_p f_2'}\,g_2'\,\ell_{E_p f_3'}\,g_3'\,\ell_{E_p f_4'}\,g_4'\,\ell_{E_p f_5'}\,g_5')\\
&= \Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_1'}\,g_1')\,\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_2'}\,g_2')\,\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_3'}\,g_3')\,\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_4'}\,g_4')\,\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_5'}\,g_5')\\
&= \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_1')^k_{\tilde{r}}}\,(g_1')^k_{\tilde{r}s}\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_2')^k_{\tilde{r}}}\,(g_2')^k_{\tilde{r}s}\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_3')^k_{\tilde{r}}}\,(g_3')^k_{\tilde{r}s}\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_4')^k_{\tilde{r}}}\,(g_4')^k_{\tilde{r}s}\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_5')^k_{\tilde{r}}}\,(g_5')^k_{\tilde{r}s}\ .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit den gleichen Argumenten wie im ersten Teil, diesmal auch auf Operatoren in $\mathcal{L}(L^2(ikX_{\tilde{r}}))$ angewandt:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_1}g_1\,\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_2}g_2\,\ell_{E_p}\,\ell_{E_p f_3}g_3)\\
&= \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_1)^k_{\tilde{r}}}(g_1)^k_{\tilde{r}s}\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_2)^k_{\tilde{r}}}(g_2)^k_{\tilde{r}s}\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(f_3)^k_{\tilde{r}}}(g_3)^k_{\tilde{r}s}\\
&= \Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_1}\,g_1)\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_2}\,g_2)\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(\ell_{E_p f_3}\,g_3),
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. □

Satz 6.2.6 *Für jede allgemeine Facette* $k\Lambda_{\tilde r\tilde p}$ *von* Λ_p *und für jedes* $s \in iX$ *existiert eine Darstellung* $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r,\tilde p,k,s)$ *von* $\mathcal{T}(H^2_p(iX)) = \ell_{E_p}\,\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))\,\ell_{E_p}$ *auf* $\mathcal{L}(H^2_{\tilde p}(ikX_{\tilde r}))$. *Sie ist bestimmt durch*

$$\Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\,T\,\ell_{E_p}) = \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}} \tag{6.2.7}$$

für alle $T \in \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$.

Beweis: Man definiert $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r,\tilde p,k,s)$ über das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{\Lambda_p}\Big(L^2(iX)\Big) & \xrightarrow{Ad'(\ell_{E_p})} & \mathcal{T}\Big(H^2_p(iX)\Big) \\ \Pi_{\mathcal{K}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow\Pi_{\mathcal{T}} \\ \mathcal{L}\Big(L^2(ikX_{\tilde r})\Big) & \xrightarrow{Ad'\left(\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\right)} & \mathcal{L}\Big(H^2_{\tilde p}(ikX_{\tilde r})\Big) \end{array} \quad .$$

Hierbei sei $Ad'(\ell_{E_p})(T) := \ell_{E_p}\,T\,\ell_{E_p}$ für alle $T \in \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ und entsprechend sei $Ad'(\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}})$ definiert. Es wurde wieder die vereinfachte Notation $\Pi_{\mathcal{T}} := \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r,\tilde p,k,s)$ benutzt, was im folgenden des öfteren geschehen wird, sofern dadurch keine Unklarheiten entstehen können. Da ℓ_{E_p} eine orthogonale Projektion mit nicht trivialem Kern ist, ist zunächst die Wohldefiniertheit von $\Pi_{\mathcal{T}}$ zu zeigen. Sei dazu $T_1 \in \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ und $\ell_{E_p}\,T_1\,\ell_{E_p} = 0 \in \ell_{E_p}\,\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))\,\ell_{E_p}$. Dann folgt mit Präposition 6.2.5

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \Pi_{\mathcal{K}}(T_2\,\ell_{E_p}\,T_1\,\ell_{E_p}\,T_3) \\ &\overset{\text{Präposition 6.2.5}}{=} \quad \Pi_{\mathcal{K}}(T_2)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_1)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_3) \\ &= \quad \Pi_{\mathcal{K}}(T_2)\Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\,T_1\,\ell_{E_p})\Pi_{\mathcal{K}}(T_3) \end{aligned}$$

für alle $T_2,\ T_3 \in \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$. Da mit Lemma 6.2.3 $\Pi_{\mathcal{K}}$ eine nicht degenerierte Darstellung ist, folgt $\Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\,T_1\,\ell_{E_p}) = \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_1)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}} = 0$.

Linearität und *-Eigenschaft von $\Pi_{\mathcal{T}}$ folgen direkt aus der Definition, so daß lediglich die Homomorphismuseigenschaft zu zeigen bleibt. Seien dazu die Operatoren $\ell_{E_p}\,T_1\,\ell_{E_p}$, $\ell_{E_p}\,T_2\,\ell_{E_p}$ aus $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$ beliebig gewählt. Dann ist

$$\ell_{E_p}\,T_1\,\ell_{E_p}\,\ell_{E_p}\,T_2\,\ell_{E_p} = \ell_{E_p}\,T_1\,\ell_{E_p}\,T_2\,\ell_{E_p}\ ,$$

weil ℓ_{E_p} eine Projektion ist. Analog zu Präposition 6.2.5 zeigt man

$$\begin{aligned} \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_1\,\ell_{E_p}\,T_2)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}} \quad &= \quad \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_1)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_2)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}} \\ &= \quad \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_1)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\ \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\,\Pi_{\mathcal{K}}(T_2)\,\ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\ , \end{aligned}$$

womit sich

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\, T_1\, \ell_{E_p}\, \ell_{E_p}\, T_2\, \ell_{E_p}) &= \Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\, T_1\, \ell_{E_p}\, T_2\, \ell_{E_p}) \\
&= \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\, \Pi_{\mathcal{K}}(T_1)\, \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\; \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\, \Pi_{\mathcal{K}}(T_2)\, \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}} \\
&= \Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\, T_1\, \ell_{E_p})\, \Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\, T_2\, \ell_{E_p})
\end{aligned}$$

ergibt. □

Korollar 6.2.8 *Für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ und $\Pi_{\mathcal{T}} = \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r, \tilde p, k, s)$ ergibt sich*

$$\Pi_{\mathcal{T}}\Big(T_{\Lambda_p}(\varphi)\Big) = \Pi_{\mathcal{T}}(\ell_{E_p}\, \varphi\, \ell_{E_p}) = \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}}\, \varphi^k_{\tilde r s}\, \ell_{E^k_{\tilde r\tilde p}} \; = T^k_{\tilde r\tilde p}(\varphi^k_{\tilde r s}) \ , \tag{6.2.9}$$

wobei $\varphi^k_{\tilde r s} := (\varrho_s\varphi)|_{ikX_{\tilde r}}$. Insbesondere gilt:

$$\Pi_{\mathcal{T}}\Big(\mathcal{T}\left(H_p^2(iX)\right)\Big) = \mathcal{T}\Big(H_{\tilde p}^2(ikX_{\tilde r})\Big) \ ,$$

und $\Pi_{\mathcal{T}}$ ist eine nicht triviale irreduzible Darstellung von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$.

Beweis: Die behauptete Form (6.2.9) folgt analog dem Beweis von Satz 6.1.6 aus der Definition von $\Pi_{\mathcal{T}}$. Da für alle $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ die Funktion $\varphi^k_{\tilde r s} \in \mathcal{C}_0(ikX_{\tilde r})$, folgt aus (6.2.9) sofort $\Pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(H_p^2(iX))) \subset \mathcal{T}(H_{\tilde p}^2(ikX_{\tilde r}))$. Da für jede Funktion $\tilde\varphi \in \mathcal{C}_0(ikX_{\tilde r})$ eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ mit $\tilde\varphi = \varphi^k_{\tilde r s}$ existiert, folgt auch die umgekehrte Inklusion und das Korollar ist bewiesen. Da $\mathcal{K}(H_{\tilde p}^2(ikX_{\tilde r}))$ mit Korollar 6.1.10 ein *-Ideal in $\mathcal{T}(H_{\tilde p}^2(ikX_{\tilde r}))$ bildet und $H_{\tilde p}^2(ikX_{\tilde r}) \neq \{0\}$, ist $\Pi_{\mathcal{T}}$ eine nicht triviale irreduzible Darstellung. □

Korollar 6.2.10 *Es sei $\tilde k k\Lambda_{\tilde r'\tilde p'}$, $\widetilde{k} \in K^{\tilde\sigma}_{\tilde r}$, eine Facette von $k\Lambda_{\tilde r\tilde p}$. Dann ist $\tilde k k\Lambda_{\tilde r'\tilde p'}$ eine Facette von Λ_p und es gilt für alle $s \in iX$, $\tilde s \in ikX_{\tilde r}$ und $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$:*

$$\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r', \tilde p', \tilde k, \tilde s)\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r, \tilde p, k, s)\left(T_{\Lambda_p}(\varphi)\right)\Big) = \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r', \tilde p', \tilde k k, \tilde s + s)\left(T_{\Lambda_p}(\varphi)\right) \ .$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus der in Korollar 6.2.8 gezeigten Form der Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}$ in Verbindung mit dem analogen Resultat für die entsprechenden Darstellungen von $\mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX))$, welches in Korollar 6.2.4 bewiesen wurde. □

Einige der bisher konstruierten Darstellungen sind zueinander äquivalent. Dies wird unter anderem in dem später folgenden Theorem 6.2.23 bewiesen. Deshalb ist es wesentlich, ein maximales System von inäquivalenten Darstellungen zu bestimmen. Es zeigt sich, daß ein solches maximales System direkt aus der Randstruktur des Tubengebietes $\Xi = \Lambda_p + iX$ abgelesen werden kann. Dazu definiert man vorbereitend:

Definition 6.2.11

1. Für $k \in K^\sigma$ und $s \in iX$ heißt die Menge
$$F := F(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s) := k\,(\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} + iX_{\tilde{r}}) + s$$
eine *Facette des Tubengebietes* $\Xi = \Lambda_p + iX$.

2. Der *Rang einer Facette* F von Ξ sei definiert als der Rang der Jordan-Algebra $X_{\tilde{r}}$, also $\mathrm{Rang}(F) := \mathrm{Rang}(X_{\tilde{r}})$.

3. Für $j \in \{0, \ldots, r\}$ sei $\mathbb{F}_j$ die Menge der Facetten F von Ξ mit $\mathrm{Rang}(F) = j$ und
$$\mathbb{F} := \bigcup_{j=0}^{r} \mathbb{F}_j$$
die Menge aller Facetten von Ξ.

Bemerkung 6.2.12 Jede Facette $F \in \mathbb{F}$ ist eine offene Facette relativ ihres affinen Tangentialraumes $kX_{\tilde{r}}{}^{\mathbb{C}} + s$.

Präposition 6.2.13 *Die Facetten von Ξ definieren eine Partition des Abschlusses von Ξ.*

Beweis: Seien $F := F(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$ und $F' := F'(\tilde{r}', \tilde{p}', k', s')$ zwei Facetten von Ξ, deren Schnitt nicht leer ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} F \cap F' &= \Big(k(\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} + iX_{\tilde{r}}) + s\Big) \cap \Big(k'(\Lambda_{\tilde{r}'\tilde{p}'} + iX_{\tilde{r}'}) + s'\Big) \\ &= \Big((k')^{-1}k(\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} + iX_{\tilde{r}}) + (k')^{-1}(s - s')\Big) \cap \Big(\Lambda_{\tilde{r}'\tilde{p}'} + iX_{\tilde{r}'}\Big) \\ &= F\Big(\tilde{r}, \tilde{p}, (k')^{-1}k, (k')^{-1}(s - s')\Big) \cap F\Big(\tilde{r}', \tilde{p}', id_X, 0\Big)\ . \end{aligned}$$

Also kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k' = id_X$ und $s' = 0$ angenommen werden. Dann gilt $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} \cap \Lambda_{\tilde{r}'\tilde{p}'} \neq \emptyset$ und wegen $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} \subset (kX_{\tilde{r}})_{reg}$, beziehungsweise $\Lambda_{\tilde{r}'\tilde{p}'} \subset (X_{\tilde{r}'})_{reg}$, folgt $\mathrm{Rang}(F) = \mathrm{Rang}(F')$ und damit auch $K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}} = K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}'}$.

Sei nun $\widetilde{x} \in k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} \cap \Lambda_{\tilde{r}'\tilde{p}'}$ mit $\widetilde{x} = k\tilde{k}\tilde{\theta} \in k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ und $\widetilde{x} = \tilde{k}'\tilde{\theta}' \in \Lambda_{\tilde{r}'\tilde{p}'}$, wobei $\tilde{k}, \tilde{k}' \in K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$, $\tilde{\theta} \in \Theta_{\tilde{r}\tilde{p}}$, $\tilde{\theta}' \in \Theta_{\tilde{r}\tilde{p}'}$. Dann folgt

$$\tilde{\theta}' = (\tilde{k}')^{-1}k\tilde{k}\tilde{\theta} = k''\tilde{\theta} \tag{6.2.14}$$

mit $k'' := (\tilde{k}')^{-1}k\tilde{k} \in K^\sigma$. Da $\tilde{\theta}', \tilde{\theta} \in \Theta_{\tilde{r}\tilde{p}} \cap (X_{\tilde{r}})_{reg}$ reguläre Linearkombinationen primitiver Idempotenter sind, impliziert (6.2.14) $k''(\Theta_{\tilde{r}}) = \Theta_{\tilde{r}}$, also $kX_{\tilde{r}} = X_{\tilde{r}}$. Es folgt

$$k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} = \Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'} \ ,$$

weil die offenen Kegel von $X_{\tilde{r}}$ eine Partition von $(X_{\tilde{r}})_{reg}$ bilden. Nun ergibt sich aus $X_{\tilde{r}} + s = X_{\tilde{r}}$ noch $s = 0$ und damit $F = F'$.

Da $\Xi = F(r, p, id_X, 0)$ selbst eine Facette von Ξ ist, überdeckt die Vereinigung aller Facetten $\overline{\Xi}$ und es folgt die Behauptung. □

Die folgende Präposition ist ein Hilfssatz für einen Beweisschritt im danach folgenden Lemma 6.2.16. Sie überträgt das Resultat aus Lemma 4.2.1 auf Folgen im Rand des Kegels $\Lambda_p^\#$.

Präposition 6.2.15 *Ist $\xi^l = k\vartheta^l \in \partial\Lambda_p^\#$ für alle $l \in \mathbb{N}$, so daß $k \in K^\sigma$ und $\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#} \tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^\#$, dann gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\xi_{\tilde{r}}^l \notin (X_{\tilde{r}}^\#)_{reg}$$

für alle $l \geq l_0$.

Beweis: Sei zunächst ein $l \in \mathbb{N}$ fest. Ist $\xi^l \in \partial\Lambda_p^\#$, so ist $\vartheta^l \in \partial\Theta_{rp}^\#$. Da

$$\partial\Theta_{rp}^\# = \partial\left(\langle -e_1^\#, \ldots, -e_p^\#, e_{p+1}^\#, \ldots, e_r^\# \rangle_{\mathbb{R}_+}\right) \ ,$$

gibt es Koeffizienten $\mu_1^l, \ldots, \mu_r^l \in \overline{\mathbb{R}}_+$ mit

$$\vartheta^l = \sum_{j=1}^{p} \mu_j^l(-e_j^\#) + \sum_{j=p+1}^{r} \mu_j^l e_j^\# \ ,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschwindet. Damit gibt es eine echte Teilmenge $\tilde{R}^l \subset \{1, \ldots, r\}$, so daß $\mu_j^l \neq 0$ für alle $j \in \tilde{R}^l$ und $\mu_j^l = 0$ für alle $j \notin \tilde{R}^l$. Sei $\vec{e}_{\tilde{R}^l}^{\,\#} := \sum_{j\in\tilde{R}^l} e_j^\#$ und $\xi_{\tilde{R}^l}^l := P_{1,\vec{e}_{\tilde{R}^l}^\#}(\xi^l) \in (X_{\tilde{R}^l}^\#)_{reg}$. Konvergiert nun $\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#} \tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^\#$, dann existiert wegen Lemma 4.2.1 ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\{\tilde{r}+1, \ldots, r\} \subset \tilde{R}^l$, also

$$\{j : \ \mu_j^l = 0\} \subset \{1, \ldots, \tilde{r}\}$$

für alle $l \geq l_0$. Wäre nun $\xi_{\tilde{r}}^l \in (X_{\tilde{r}}^\#)_{reg}$ für ein $l \geq l_0$, dann wäre $\det_{\tilde{r}}(\xi_{\tilde{r}}^l)^\# \neq 0$ und mit der Determinantenentwicklung aus dem Beweis von Lemma 4.2.1 würde

$$\xi^l \in X_{reg}^\#$$

folgen, was im Widerspruch zu $\xi^l \in \partial\Lambda_p^\#$ steht. Also ist $\xi_{\tilde{r}}^l \notin (X_{\tilde{r}}^\#)_{reg}$ für alle $l \geq l_0$ und die Präposition ist bewiesen. □

Das folgende Lemma enthält die wesentlichen technischen Vorbereitungen für den Beweis des danach folgenden Theorems 6.2.23.

Lemma 6.2.16 *Es existiert eine feste Funktion $\psi \in \mathcal{C}_0^p(X^\#)$, so daß für alle Facetten $F(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s) \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$ die Funktion $(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^\#(\psi)$ ein Element von $\mathcal{C}_c(kX_{\tilde{r}}^\#)$ ist und für alle nicht konvexen Facetten $F'(\tilde{r}, \tilde{p}', k', s)$ die Funktion $(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}'}^{k'})^\#(\psi)$ nicht verschwindet.*

Beweis: Für beliebiges $\epsilon > 0$ sei $U_\epsilon(0) := \{\xi \in X^\# : \ ||\xi|| < \epsilon\}$ und

$$U_\epsilon^j := j \cdot \vec{e}_{\tilde{r}}^{\,\#} + U_\epsilon(0)$$

für alle $j = 1, \ldots, \tilde{r}$. Sei nun $j \in \{1, \ldots, \tilde{r}\}$ und $\phi_j \in \mathcal{C}_c(X^\#)$, so daß $\int_{X^\#} \phi_j(\eta)\, d\eta = 0$ und

$$Tr\ddot{a}ger(\phi_j) \subset U_\epsilon^j \ .$$

Für eine beliebige Facette $F = F(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s) \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$ sei $\tilde{\psi}_j := (\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^\#(\psi_j)$, und für ein beliebiges $\tilde{\xi} \in X_{\tilde{r}}^\#$ mit $\tilde{\psi}_j(\tilde{\xi}) \neq 0$ sei $\tilde{\xi} = \tilde{k}\tilde{\vartheta}$, $\tilde{k} \in K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$, $\tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^\#$, die Spektralzerlegung von $\tilde{\xi}$. Sei $\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#} \tilde{\vartheta}$ und die Folge $(\vartheta^l)_{l \in \mathbb{N}}$ wie in Präposition 4.2.6 konstruiert. Dann zeigt Satz 4.2.15, daß $\psi_j(\xi^l) \to \tilde{\psi}_j(\tilde{\xi})$, mit $\xi^l := \tilde{k}\vartheta^l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Deshalb kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $l \geq l_0$

$$\int_{\xi^l - \Lambda_p^\#} \phi_j(\eta)\, d\eta = \psi_j(\xi^l) \neq 0 \ . \tag{6.2.17}$$

Sei von nun an $l \geq l_0$ beliebig. Da $\int_{X^\#} \phi_j(\eta)\, d\eta = 0$ kann U_ϵ^j keine Teilmenge von $\xi^l - \Lambda_p^\#$ sein und wegen (6.2.17) auch keine Teilmenge des Komplementes von $\xi^l - \Lambda_p^\#$. Deshalb existiert ein

$$\zeta^l \in U_\epsilon^j \cap \partial(\xi^l - \Lambda_p^\#) = U_\epsilon^j \cap (\xi^l - \partial\Lambda_p^\#) \ ,$$

und es folgt

$$\xi^l = \tilde{k}\vartheta^l = \zeta^l + \beta^l \in \zeta^l + \partial\Lambda_p^\# \subset U_\epsilon^j + \partial\Lambda_p^\# \ , \tag{6.2.18}$$

mit einer geeigneten Folge $(\beta^l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \partial\Lambda_p^\#$. Die Einschränkung von (6.2.18) auf $kX_{\tilde{r}}$ ergibt

$$\tilde{\xi} = (\xi^l)_{\tilde{r}} + (\beta^l)_{\tilde{r}} \ . \tag{6.2.19}$$

Es gilt $\vartheta^l \xrightarrow{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}^\#} \tilde{\vartheta}$ mit $\vartheta_{\tilde{r}}^l = \tilde{\vartheta}$ für alle $l \geq l_0$. Mit Korollar 6.2.15 folgt aus (6.2.19)

$$\tilde{k}^{-1}\beta^l = \vartheta^l + \tilde{k}^{-1}\zeta^l \ ,$$

daß $\tilde{k}^{-1}(\beta^l)_{\tilde{r}} \in (kX_{\tilde{r}}^\#)_{sing}$. Also existiert eine Zerlegung

$$\tilde{\xi} = \tilde{\zeta}^l + \tilde{\beta}^l \subset \tilde{U}_\epsilon^j + (kX_{\tilde{r}}^\#)_{reg}$$

mit $\tilde U_\epsilon^j := P_{1,\vec e_{\tilde r}^{\#}}(U_j^\epsilon)$. Es sei $(\tilde k_0^l)^{-1}\tilde\beta_0^l = \tilde\beta^l$, $\tilde k_0^l \in K_{\tilde r}^{\tilde\sigma}$, $\tilde\beta_0^l \in (k\Theta_{\tilde r}^{\#})_{sing}$ die Spektralzerlegung von $\tilde\beta^l \in kX_{\tilde r}^{\#}$. Dann gilt wegen der $K_{\tilde r}^{\tilde\sigma}$-Invarianz von $\tilde U_\epsilon(0) := P_{1,\vec e_{\tilde r}}(U_\epsilon(0))$

$$\tilde\xi_0 := \tilde k_0\tilde\xi = \tilde k_0 kj\vec e_{\tilde r}^{\#} + \tilde o^l + \tilde\beta_0^l \ , \tag{6.2.20}$$

wobei $\tilde o_0^l \in \tilde U_\epsilon(0)$ geeignet ist.

Mit $(k'')^\alpha := Ad(\alpha)(k'')$ folgt für alle $k'' \in K^\sigma, \zeta \in X^{\#}$

$$\alpha(k''\zeta) = (\alpha\circ k\circ\alpha)(\alpha\zeta) = (k'')^\alpha\zeta \ .$$

Da $\vec e_{\tilde r}^{\#}$ und $\tilde\beta_0^l$ wegen der Konvention 1.2.12 invariant unter α sind, folgt hieraus mit Gleichung 6.2.20:

$$\begin{aligned}\tilde\xi_0\diamond(\alpha\tilde\xi_0) \;=\;& j^2\tilde k_0 k\vec e_{\tilde r}^{\#}\diamond(\tilde k_0 k)^\alpha\vec e_{\tilde r}^{\#} + j\tilde k_0 k\vec e_{\tilde r}^{\#}\diamond(\alpha\tilde o^l) + j\tilde o^l\diamond(\tilde k_0 k)^\alpha\vec e_{\tilde r}^{\#} + \tilde o^l\diamond(\alpha\tilde o^l)\\ &+\tilde\beta_0^l\diamond(\alpha\tilde o^l) + \tilde o^l\diamond\tilde\beta_0^l + j\tilde\beta_0^l\diamond(\tilde k_0 k)^\alpha\vec e_{\tilde r}^{\#} + j\tilde k_0 k\vec e_{\tilde r}^{\#}\diamond\tilde\beta_0^l + \tilde\beta_0^l\diamond\tilde\beta_0^l \ .\end{aligned}$$

Für beliebiges $k'' \in K^\sigma \subset \Gamma(X)$ und $\zeta \in X^{\#}$ gilt zum einen

$$(k''\zeta)^{-1} = \Big((k'')^\lambda\Big)^{-1}\zeta^{-1}$$

und wegen Definition 1.2.13 und Korollar 1.2.15 zum anderen

$$Ad(\alpha)(k'') = Ad(\alpha)\Big((k'')^{\lambda_\alpha}\Big)^{-1} = Ad(\alpha)Ad(\alpha)\Big((k'')^\lambda\Big)^{-1} = \Big((k'')^\lambda\Big)^{-1} \ .$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\tilde k_0^\alpha k^\alpha\vec e_{\tilde r}^{\#} &= \Big((\tilde k_0 k)^\lambda\Big)^{-1}\vec e_{\tilde r}^{\#}\\ &= \Big((\tilde k_0 k)^\lambda\Big)^{-1}(\vec e_{\tilde r}^{\#})^{-1}\\ &= \Big(\tilde k_0 k\vec e_{\tilde r}^{\#}\Big)^{-1}\end{aligned}$$

und damit schließlich

$$j\tilde k_0 k\vec e_{\tilde r}^{\#}\diamond j(\tilde k_0 k)^\alpha\vec e_{\tilde r}^{\#} = j^2\vec e_{\tilde r}^{\#} \ .$$

Da $\tilde k_0$ die Bilinearform λ_α invariant läßt, gilt:

$$\tilde o_1^l := j\tilde k_0 k\vec e_{\tilde r}^{\#}\diamond(\alpha\tilde o^l) + \tilde o^l\diamond(\alpha\tilde o^l) + \tilde o^l\diamond j(\tilde k_0 k)^\alpha\vec e_{\tilde r}^{\#} \in \tilde U_{3j\epsilon}(0) \ .$$

Dann ergibt sich mit $\epsilon_1 := 3j\epsilon$ und

$$\tilde\beta_1^l := \tilde\beta_0^l\diamond\Big((\alpha\tilde o^l) + \tilde o^l + j(\tilde k_0 k)^\alpha\vec e_{\tilde r}^{\#} + j\tilde k_0 k\vec e_{\tilde r}^{\#} + \tilde\beta_0^l\Big) \in (X_{\tilde r}^{\#})_{sing}$$

die Darstellung

$$\tilde\xi_0\diamond(\alpha\tilde\xi_0) = j^2\vec e_{\tilde r}^{\#} + \tilde o_1^l + \tilde\beta_1^l \tag{6.2.21}$$

mit $\tilde{o}_1^l \in \tilde{U}_{\epsilon_1}(0)$ und $\tilde{\beta}_1^l \in (X_{\tilde{r}}^{\#})_{sing}$. Da $\tilde{\xi}_0 = \tilde{k}_0 \tilde{k} \tilde{\vartheta}$ und wegen (1.2.8) $\tilde{\xi}_0 \diamond (\alpha \tilde{\xi}_0) \in X_+$ gibt es $\tilde{\vartheta}_+ \in (X_{\tilde{r}}^{\#})_+$ und $\tilde{k}_+ \in Aut\left((X_{\tilde{r}}^{\#})_+\right)$ mit

$$\tilde{k}_+ \tilde{\vartheta}_+ = \tilde{\xi}_0 \diamond (\alpha \tilde{\xi}_0) \ .$$

Wegen der Invarianz von $\Theta_{\tilde{r}}^{\#}$ unter α gilt $\tilde{\vartheta}_+ = \tilde{\vartheta}^2$. Aus Gleichung 6.2.21 folgt nun

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_+ &= \tilde{k}_+^{-1}(j^2 \vec{e}_{\tilde{r}}^{\,\#} + \tilde{o}_1^l + \tilde{\beta}_1^l) \\ &= j^2 \vec{e}_{\tilde{r}}^{\,\#} + \tilde{o}_2^l + \tilde{\beta}_2^l \end{aligned}$$

mit $\tilde{k}_+^{-1} \tilde{o}_1^l =: \tilde{o}_2^l \in \tilde{U}_{\epsilon_1}(0)$ und $\tilde{k}_+^{-1} \tilde{\beta}_1^l =: \tilde{\beta}_2^l \in (X_{\tilde{r}}^{\#})_{sing}$, und damit

$$\tilde{\vartheta}_+ - j^2 \vec{e}_{\tilde{r}}^{\,\#} = \tilde{o}_2^l + \tilde{\beta}_2^l \ .$$

Da $\tilde{o}_2^l \in \tilde{U}_{\epsilon_1}(0)$ und $\tilde{\vartheta}_+ - j^2 \vec{e}_{\tilde{r}}^{\,\#} \in \Theta_{\tilde{r}}^{\#}$ folgt für den „außerdiagonalen“ Anteil von $\widetilde{\beta}_2^l$

$$\left|\left|\tilde{\beta}_2^l - \sum_{i=1}^{\tilde{r}} (\tilde{\beta}_2^l)_{ii} e_i^{\#}\right|\right|_\infty \leq \mu_0 \, \epsilon_1 \ ,$$

wobei $\mu_0 \geq 0$ geeignet ist. Wählt man ϵ_1 klein genug, so muß für wenigstens ein $i_j \in \{1, \ldots, \tilde{r}\}$ die Bedingung $(\tilde{\beta}_2^l)_{i_j i_j} < \frac{1}{10}$ erfüllt sein, da sonst mit Lemma 4.2.1 der Widerspruch $\tilde{\beta}_2^l \in (X_{\tilde{r}}^{\#})_{reg}$ folgen würde. Damit gilt für alle $j = 1, \ldots, \tilde{r}$:

$$|(\tilde{\vartheta}_+)_{i_j} - j^2| < \frac{1}{10} \ . \tag{6.2.22}$$

Damit Gleichung 6.2.22 für alle $j \in \{1, \ldots, \tilde{r}\}$ gleichzeitig erfüllt sein kann, muß

$$\{1, \ldots, \tilde{r}\} = \{i_1, \ldots, i_{\tilde{r}}\}$$

gelten. So erhält man zunächst $||\tilde{\vartheta}_+||_\infty \leq \tilde{r} + 1$ und schließlich

$$||\tilde{\vartheta}||_\infty \leq \sqrt{\tilde{r} + 1} \leq \tilde{r} + 1 \ .$$

Da $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}}$ kompakt ist, gibt es eine geeignete kompakte Menge $\tilde{O} \subset \Theta_{\tilde{r}}^{\#}$, so daß $K_{\tilde{r}}^{\tilde{\sigma}} \cdot \{\tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{r}}^{\#} : \ ||\tilde{\vartheta}||_\infty < \tilde{r} + 1\} \subset \tilde{O}$. Für

$$\psi := \prod_{j=1}^{\tilde{r}} \psi_j$$

folgt nun

$$(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^{\#}(\psi) = (\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^{\#}\left(\prod_{j=1}^{\tilde{r}} \psi_j\right) = \prod_{j=1}^{\tilde{r}} (\pi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k)^{\#}(\psi_j) = \prod_{j=1}^{\tilde{r}} \tilde{\psi}_j$$

und

$$Träger\Big((\pi^k_{\tilde r\tilde p})^\#(\psi)\Big) = Träger\Big(\prod_{j=1}^{\tilde r}\tilde\psi_j\Big) \subset \tilde O\ .$$

Sei nun $F' = F'(\tilde r, \tilde p', k', s)$ eine nicht konvexe Facette aus $\mathbb{F}_{\tilde r}$. Die Zusatzbedingung $(\pi^{k'}_{\tilde r\tilde p'})^\#(\psi) \neq 0$ ist einfach erfüllbar, da für nicht konvexe Kegel $\Lambda_p^\#$ das Innere von $\bigcap_{j=1}^{\tilde r}\big(U^j_\epsilon + \partial\Lambda_p^\#\big)$ nie leer ist. □

Theorem 6.2.23 *Seien $k\Lambda_{\tilde r\tilde p}$, $k'\Lambda_{\tilde r'\tilde p'}$ zwei beliebige allgemeine Facetten von Λ_p und s, s' aus iX. Dann sind die Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r, \tilde p, k, s)$ und $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r', \tilde p', k', s')$ genau dann inäquivalent, wenn die Facetten $F(\tilde r, \tilde p, k, s)$ und $F(\tilde r', \tilde p', k', s')$ verschieden sind.*

Beweis: Seien $F := F(\tilde r, \tilde p, k, s)$ und $F' := F(\tilde r', \tilde p', k', s')$ zwei verschiedene Facetten von Ξ und $\Pi_{\mathcal{T}} := \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r, \tilde p, k, s)$, beziehungsweise $\Pi'_{\mathcal{T}} := \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde r', \tilde p', k', s')$.

Sei zunächst $\tilde r = \mathrm{Rang}(F) \neq \mathrm{Rang}(F') = \tilde r'$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde r > \tilde r'$. Dann gibt es eine eindimensionale Facette $\tilde k k\Lambda_{\tilde r''\tilde p''}$ von $k\Lambda_{\tilde r\tilde p}$ mit $\tilde k \in K^{\tilde\sigma}_{\tilde r}$, so daß die Kardinalität der Schnittmenge

$$(i\tilde k k X_{\tilde r''} + s) \cap (ik'X_{\tilde r'} + s')$$

gerade eins ist. Nun wählt man ein $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$, so daß

$$(\varrho_s\varphi)\Big|_{i\tilde k kX_{\tilde r''}} = \varphi^{\tilde k k}_{\tilde r''s} \neq 0 \in \mathcal{C}_0(i\tilde k kX_{\tilde r''})$$

und

$$(\varrho_{s'}\varphi)\Big|_{ik'X_{\tilde r'}} = \varphi^{k'}_{\tilde r's'} = 0 \in \mathcal{C}_0(ik'X_{\tilde r'})\ .$$

Für die klassische Hardy-Toeplitz Erweiterung der kompakten Operatoren auf $H^2_+(i\mathbb{R})$ gilt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}\Big(H^2_+(i\mathbb{R})\Big) \longrightarrow \mathcal{T}\Big(H^2_+(i\mathbb{R})\Big) \longrightarrow \mathcal{C}_0(i\mathbb{R}) = \mathcal{T}\Big(H^2_+(i\mathbb{R})\Big)/\mathcal{K}\Big(H^2_+(i\mathbb{R})\Big) \longrightarrow 0$$

ist eine exakte Sequenz von C*-Algebren und

$$\Big\|\mathcal{T}_{\mathbb{R}_+}(\varphi')\Big\|_{\mathcal{T}(H^2_+(i\mathbb{R}))/\mathcal{K}(H^2_+(i\mathbb{R}))} = ||\varphi'||_\infty$$

für alle $\varphi' \in \mathcal{C}_0(i\mathbb{R})$. Da $\tilde k k\Lambda_{\tilde r''\tilde p''}$ eindimensional ist, gilt $i\tilde k kX_{\tilde r''} \cong i\mathbb{R}$ und wegen $\varphi^{\tilde k k}_{\tilde r''s} \neq 0$ folgt

$$\Big\|T_{\tilde k k\Lambda_{\tilde r''\tilde p''}}(\varphi^{\tilde k k}_{\tilde r''s})\Big\|_{\mathcal{T}(H^2_{\tilde p''}(i\tilde k kX_{\tilde r''}))/\mathcal{K}(H^2_{\tilde p''}(i\tilde k kX_{\tilde r''}))} \neq 0\ . \qquad (6.2.24)$$

Also ist mit Korollar 6.2.10

$$\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r}'', \tilde{p}'', \tilde{k}, 0)\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)\left(T_{\Lambda_p}(\varphi)\right)\Big) = \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r}'', \tilde{p}'', \tilde{k}k, s)\left(T_{\Lambda_p}(\varphi)\right)$$

und mit Korollar 6.2.8 folgt

$$\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r}'', \tilde{p}'', \tilde{k}k, s)\left(T_{\Lambda_p}(\varphi)\right) = T_{\tilde{k}k\Lambda_{\tilde{r}''\tilde{p}''}}(\varphi^{\tilde{k}k}_{\tilde{r}''s}) \overset{(6.2.24)}{\neq} 0 \ ,$$

was zeigt, daß

$$T_{\Lambda_p}(\varphi) \notin \mathrm{Kern}\,(\Pi_{\mathcal{T}}) \ .$$

Für $\Pi'_{\mathcal{T}}$ ergibt sich wegen $\varphi^{k'}_{\tilde{r}'s'} = 0$ allerdings

$$T_{\Lambda_p}(\varphi) \in \mathrm{Kern}\,(\Pi'_{\mathcal{T}}) \ .$$

Die damit bewiesene Ungleichheit der Kerne von $\Pi_{\mathcal{T}}$ und $\Pi'_{\mathcal{T}}$ impliziert die Inäquivalenz dieser Darstellungen.

Im Fall $\tilde{r} = \mathrm{Rang}(F) = \mathrm{Rang}(F') = \tilde{r}'$, ist $X_{\tilde{r}} = X_{\tilde{r}'}$. Dann sind entweder die affinen Räume $ikX_{\tilde{r}} + s$ und $ik'X_{\tilde{r}} + s'$, oder aber die Facetten $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$ und $k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ voneinander verschieden. Ist $ikX_{\tilde{r}} + s \neq ik'X_{\tilde{r}} + s'$, so existiert wieder eine geeignete eindimensionale Facette $\tilde{k}k\Lambda_{\tilde{r}''\tilde{p}''}$, $\tilde{k} \in K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$, so daß die Kardinalität der Schnittmenge

$$(i\tilde{k}kX_{\tilde{r}''} + s) \cap (ik'X_{\tilde{r}} + s')$$

eins ist, und analog dem Beweis im Fall $\mathrm{Rang}(F) \neq \mathrm{Rang}(F')$ folgt die Inäquivalenz von $\Pi_{\mathcal{T}}$ und $\Pi'_{\mathcal{T}}$.

Sei nun also $ikX_{\tilde{r}} + s = ik'X_{\tilde{r}} + s'$ und $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} \neq k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$. Dann ist $k^{-1}k' \in K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$ und $s - s' \in X_{\tilde{r}}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann in diesem Fall Λ_p als nicht konvexer Kegel angenommen werden, denn für konvexe Kegel wurde in Präposition 4.1.16 gezeigt, daß keine Facetten $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} \neq k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ mit $kX_{\tilde{r}} = k'X_{\tilde{r}}$ existieren. Um die Inäquivalenz von $\Pi_{\mathcal{T}}$ und $\Pi'_{\mathcal{T}}$ nachzuweisen, wählt man $\psi \in \mathcal{C}^p_0(X^\#)$, so daß $(\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}})^\#(\psi) \in \mathcal{C}_c(kX^\#_{\tilde{r}})$ und $\tilde{\psi}' := (\pi^{k'}_{\tilde{r}\tilde{p}'})^\#(\psi) \neq 0 \in \mathcal{C}^{\tilde{p}'}_0(k'X^\#_{\tilde{r}})$. Eine solche Funktion wurde in Lemma 6.2.16 explizit konstruiert. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gebe es eine Stelle an der $\tilde{\psi}'$ positiv ist. Dann sei O eine offene Menge in $kX^\#_{\tilde{r}}$ mit $\tilde{\psi}' > 0$ auf O und weiterhin $R > 0$, so daß $U_R(0)$ den Träger von $\tilde{\psi}'$ enthält. Sei $\phi \in \mathcal{C}_c(X^\#) \subset L^1(X^\#)$ mit $\tilde{\phi} := \phi|_{kX^\#_{\tilde{r}}} \geq 0$ und $\int_{X^\#} \phi(\eta)\, d\eta = 1$ und

$$Träger(\phi) \subset U_\epsilon\Big(l \cdot k'(-e^\#_1 - \ldots - e^\#_{\tilde{p}'} + e^\#_{\tilde{p}'+1} + \ldots + e\tilde{r}^\#)\Big) = U_\epsilon(l \cdot k'\,\vec{e}^{\,\#}_{\tilde{r}\tilde{p}'})$$

mit $l \in \mathbb{N}$ geeignet. Man definiert

$$T := \chi_p\, \ell_\phi \psi\, \chi_p \in Ad(\mathcal{F})\Big(\mathcal{T}\left(H^2_p(iX)\right)\Big)$$

und erhält für $\tilde\rho \in L^2(kX^{\#}_{\tilde r})$ und $\tilde\xi \in kX^{\#}_{\tilde r}$ gemäß (4.3.10)

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathcal{T}}(T)(\tilde\rho)(\tilde\xi) &= (\chi^k_{\tilde r\tilde p}\,\ell_{\tilde\phi}\tilde\psi\,\chi^k_{\tilde r\tilde p})(\tilde\rho)(\tilde\xi)\\ &= \chi^k_{\tilde r\tilde p}(\tilde\xi)\int_{\tilde\xi - k\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p}}\tilde\phi(\tilde\eta)(\tilde\psi\tilde\rho)(\tilde\xi-\tilde\eta)\,d\tilde\eta\ .\end{aligned}$$

Dies zeigt für alle $\tilde\rho \in L^2(kX^{\#}_{\tilde r})$:

$$\begin{aligned}Tr\ddot{a}ger\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(T)(\tilde\rho)\Big) &\subset k\Lambda_{\tilde r\tilde p}\cap\Big(Tr\ddot{a}ger(\tilde\phi)+Tr\ddot{a}ger(\tilde\psi)\Big)\\ &\subset k\Lambda_{\tilde r\tilde p}\cap\Big(U_\epsilon(l\cdot k'\,\vec e^{\,\#}_{\tilde r\tilde p'})+U_R(0)\Big)\\ &=: \tilde O_0\ .\end{aligned}$$

Lemma 4.2.1 besagt jedoch, daß

$$U_\epsilon(l\cdot k'\,\vec e^{\,\#}_{\tilde r\tilde p'})+U_R(0)\subset k'\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p'}$$

für $\epsilon > 0$ geeignet klein und $l \in \mathbb{N}$ geeignet groß. Deshalb folgt

$$\Pi_{\mathcal{T}}(T) = 0\ . \qquad (6.2.25)$$

Nun wählt man $\tilde\rho \in L^2(kX^{\#}_{\tilde r})$ mit $\tilde\rho > 0$ auf O, $\tilde\xi \in k'\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p'}$ und $\epsilon > 0$ klein genug, so daß $U_\epsilon(\tilde\xi - l\cdot k'\,\vec e^{\,\#}_{\tilde r\tilde p'}) \subset O$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, l groß genug, so daß

$$\begin{aligned}\Pi'_{\mathcal{T}}(T)(\tilde\rho)(\tilde\xi) &= \chi^{k'}_{\tilde r\tilde p'}\int_{\tilde\xi - k'\Lambda^{\#}_{\tilde r\tilde p'}}\tilde\phi(\tilde\eta)(\tilde\psi\tilde\rho)(\tilde\xi-\tilde\eta)\,d\tilde\eta\\ &\geq 1\cdot\int_{Tr\ddot{a}ger(\tilde\phi)}\phi(\tilde\eta)(\tilde\psi\tilde\rho)(\tilde\xi-\tilde\eta)\,d\tilde\eta\\ &> 0\ ,\end{aligned}$$

da $\tilde\xi - \tilde\eta \in O$ für alle $\tilde\eta \in Tr\ddot{a}ger(\tilde\phi)$. Dies zeigt, daß

$$\Pi'_{\mathcal{T}}(T) \neq 0\ ,$$

und mit (6.2.25) folgt die Inäquivalenz der Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}$ und $\Pi'_{\mathcal{T}}$.

Sei nun umgekehrt $F = F'$. Es folgt direkt, daß $\tilde{r} = \tilde{r}'$ und $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} = k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$. Hieraus ergibt sich wiederum $kX_{\tilde{r}} = k'X_{\tilde{r}'}$ und wegen $kX_{\tilde{r}} + s = k'X_{\tilde{r}'} + s'$, folgt $s - s' \in ikX_{\tilde{r}}$. Da $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_p f}) = \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} f^k_{\tilde{r}}}$ mit $E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} = \mathcal{F}^{-1}(\chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}})$ und $f^k_{\tilde{r}} = f|_{ikX_{\tilde{r}}}$ (Lemma 4.1.21 und Satz 4.3.2), folgt wegen $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} = k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ zunächst $E^k_{\tilde{r}\tilde{p}} = E^{k'}_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ und $f^k_{\tilde{r}} = f^{k'}_{\tilde{r}}$ und damit schließlich

$$\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} = \pi^{k'}_{\tilde{r}\tilde{p}'} \; . \tag{6.2.26}$$

Wegen $s - s' \in ikX_{\tilde{r}}$ induziert der Translationsoperator $\varrho_{s-s'}$ analog (3.1.9) einen unitären Hilbertraumisomorphismus

$$\varrho_{s-s'} : H^2_p(iX) \longrightarrow H^2_p(iX) \; .$$

Da

$$\begin{aligned}
\left(\varrho_{s-s'} \circ \nu^k_{\tilde{r}s}(g)\right)(\tilde{h}) &= \varrho_{s-s'}\left(\left.(\varrho_s g)\right|_{ikX_{\tilde{r}}} \cdot \tilde{h}\right) \\
&= \left.(\varrho_{s'} g)\right|_{ikX_{\tilde{r}}} \cdot (\varrho_{s-s'}\tilde{h}) \\
&= \left.(\varrho_{s'} g)\right|_{ik'X_{\tilde{r}}} \cdot (\varrho_{s-s'}\tilde{h}) \\
&= \nu^{k'}_{\tilde{r}s'}(g)(\varrho_{s-s'}\tilde{h})
\end{aligned}$$

für alle $\tilde{h} \in H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})$, $g \in \mathcal{C}^\infty_c(iX)$, und da wegen (6.2.26) $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} = \pi^{k'}_{\tilde{r}\tilde{p}'}$, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}) & \stackrel{\varrho_{s-s'}}{\longrightarrow} & H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}) \\
{\scriptstyle \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\, \pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}(\ell_{E_p f})\nu^k_{\tilde{r}s}(g)\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle \ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}\, \pi^{k'}_{\tilde{r}\tilde{p}'}(\ell_{E_p f})\nu^{k'}_{\tilde{r}s'}(g)\,\ell_{E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}} \\
H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}) & \stackrel{\varrho_{s-s'}}{\longrightarrow} & H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})
\end{array}$$

für alle $g \in \mathcal{C}_0(iX)$, $f \in A(iX)$ und es folgt

$$\Pi_{\mathcal{T}} \equiv \Pi'_{\mathcal{T}} \; .$$

Mit diesem letzten Schritt ist der Beweis des Theorems vollständig erbracht. □

Im Zusammenhang mit Beispiel 4.1.13 wurde die Frage diskutiert, ob zwei Facetten unterschieden werden müssen, wenn sie denselben Vektorraum $kX_{\tilde{r}}$ erzeugen. Das Theorem 6.2.23 zeigt insbesondere, daß zwei solche Facetten im Rahmen der hier vorgestellten Theorie verschieden sind, weil die zugehörigen Darstellungen nicht äquivalent sind. Tatsächlich stellte dieser Fall den schwierigsten im Beweis des Theorems dar.

Korollar 6.2.27

1. $\nu^k_{\tilde{r}s} = \nu^{k'}_{\tilde{r}s}$ *für alle* $s \in iX$, $(k'k^{-1}) \in K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$.

2. $\nu^k_{\tilde{r}s} \cong \nu^{k'}_{\tilde{r}s'}$ *für alle* $s - s' \in ikX_{\tilde{r}}$, $k'k^{-1} \in K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$.

3. $\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} = \pi^{k'}_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ *für alle allgemeinen Facetten* $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} = k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$.

4. $Ad(k'k^{-1})\,\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r},\tilde{p},k,s)\,Ad(k(k')^{-1}) = \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r},\tilde{p},k',s)$ *für alle allgemeinen Facetten* $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}, k'\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'}$ *und alle* $s \in iX$.

Beweis: Die Behauptungen 1 bis 3 wurden im letzten Teil des Beweises von Theorem 6.2.23 gezeigt. Behauptung 4 folgt aus der Definition von $\Pi_{\mathcal{T}}$ und der in Korollar 6.2.8 gezeigten Form dieser Darstellung. Man beachte, daß dies nicht die Äquivalenz von $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r},\tilde{p},k,s)$ und $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r},\tilde{p},k',s)$ bedeutet. $\square$

Bemerkung 6.2.28 Es sei $P_c := \{0 \le \tilde{p} \le p : \ \tilde{r} - \tilde{p} \le r - p\}$. Dann definiert

$$(\tilde{p},k,s) \sim (\tilde{p}',k',s') \Longleftrightarrow k(\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}} + iX_{\tilde{r}}) + s = k'(\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}'} + iX_{\tilde{r}}) + s'$$

eine abgeschlossene Äquivalenzrelation auf $P_c \times iX \times K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$. Die Überlegungen zum Beweis der Äquivalenz der Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}(F)$ und $\Pi_{\mathcal{T}}(F')$, falls $F \neq F'$, zeigen insbesondere, daß sich $\mathbb{F}_{\tilde{r}}$ bijektiv auf die Menge

$$(P_c \times iX \times K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}})/\sim \tag{6.2.29}$$

abbilden läßt. Da die Äquivalenzrelation abgeschlossen ist, ist $\mathbb{F}_{\tilde{r}}$ mit der Quotiententopologie von $(P_c \times iX \times K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}})/\sim$ ein lokal kompakter Raum.

Da zwei Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r},\tilde{p},k,s)$ und $\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r}',\tilde{p}',k',s')$ genau dann inäquivalent sind, falls die Facetten $F(\tilde{r},\tilde{p},k,s)$ und $F(\tilde{r}',\tilde{p}',k',s')$ verschieden sind, besteht eine bijektive Beziehung zwischen einem maximalen System paarweise inäquivalenter Darstellungen und der Menge aller verschiedenen Facetten von Ξ. Dies respektierend definiert man:

Definition 6.2.30 Sei $F = F(\tilde{r},\tilde{p},k,s)$ eine Facette von Ξ. Dann seien folgende durch F induzierten Objekte definiert:

1. Die Jordan-Algebra $iX_F := ikX_{\tilde{r}}$, die Diagonale $\Theta_F := \Theta_{\tilde{r}}$ und die Facette $\Lambda_F := k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$.

2. Die Spektralgruppe $K^{\sigma}_F := K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}}$.

3. Die charakteristische Funktion $\chi_F := \chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$ von F und das distributive Maß $E_F := E^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$.

4. Der Hardy-Raum $H^2_F(iX_F) := H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})$.

5. Die Hardy-Faltungsoperatoren $C^*_F(iX_F) := C^*_{\tilde{r}\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}})$, die Hardy-Multiplikatoren $\mathcal{C}^F_0(X^\#_F) := \mathcal{C}^{\tilde{p}}_0(X^\#_{\tilde{r}})$, die Hardy-Toeplitz Vervollständigung der kompakten Operatoren $\mathcal{K}_F(L^2(iX_F)) := \mathcal{K}_{\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}}(L^2(ikX_{\tilde{r}}))$ und die Hardy-Toeplitz C*-Algebra $\mathcal{T} := \mathcal{T}(H^2_{\tilde{p}}(ikX_{\tilde{r}}))$.

6. Die Darstellung $\pi_F := \pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}} : C^*_p(iX) \longrightarrow C^*_F(iX_F) \subset \mathcal{L}(L^2(iX_F))$ der Hardy-Faltungsoperatoren, wie sie in Satz 4.3.2 konstruiert wurde.

7. Die Darstellung $\nu_F := \nu^k_{\tilde{r}s} : A(iX) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(iX_F))$ der Fourier-Algebra, wie sie in Lemma 5.2.7 konstruiert wurde.

8. Die Darstellung $\Pi(F) := \Pi(\tilde{r},\tilde{p},k,s) : C^*_p(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(iX_F))$ des Cokreuzproduktes $C^*_p(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$, wie sie in Satz 5.2.11 konstruiert wurde.

9. Die Darstellung $\Pi_{\mathcal{K}}(F) := \Pi_{\mathcal{K}}(\tilde{r},\tilde{p},k,s) : \mathcal{K}_{\Lambda_p}(L^2(iX)) \longrightarrow \mathcal{K}_F(L^2(iX_F))$ der Hardy-Toeplitz Vervollständigung, wie sie in Lemma 6.2.3 konstruiert wurde.

10. Die Darstellung $\Pi_{\mathcal{T}}(F) := \Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r},\tilde{p},k,s) : \mathcal{T}(H^2_p(iX)) \longrightarrow \mathcal{T}(H^2_F(iX_F))$ der Hardy-Toeplitz C*-Algebra, wie sie in Satz 6.2.6 konstruiert wurde.

Man beachte, daß nur für die Darstellungen aus $\{\Pi_{\mathcal{T}}(F) : F \in \mathbb{F}\}$ die paarweise Inäquivalenz gezeigt wurde. Diese Eigenschaft gilt aufgrund der Definitionen und Konstruktionen auch für $\{\Pi(F) : F \in \mathbb{F}\}$ und $\{\Pi_{\mathcal{K}}(F) : F \in \mathbb{F}\}$, ist im allgemeinen aber falsch für $\{\pi_F : F \in \mathbb{F}\}$ und $\{\nu_F : F \in \mathbb{F}\}$. Dies ergibt sich insbesondere auch aus dem Korollar 6.2.27.

Kapitel 7

Strukturtheorie der Hardy-Toeplitz C*-Algebra

In diesem Kapitel werden die Hauptresultate der Arbeit bewiesen. Es zeigt sich, daß die Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}(F)$, $F \in \mathbb{F}$, das gesamte Spektrum der Hardy-Toeplitz C*-Algebra $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ konstituieren. Damit steht $Spec(\mathcal{T}(H_p^2(iX)))$ in einer bijektiven Beziehung zu den (relativ ihres affinen Tangentialraumes) offenen Facetten F von $\overline{\Xi}$. Hierbei ist Ξ selbst als Facette mit eingeschlossen.

Dieses Resultat ist eine Konsequenz des abschließenden Strukturtheorems 7.2.14, welches eine durch die faciale Randstruktur von Ξ bestimmte, explizite Kompositionsreihe von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ angibt. Jeder Faktor steht in direktem Zusammenhang mit bestimmten Facetten von Ξ; genauer gesagt ist er die C*-Algebra des stetigen Feldes kompakter Operatoren auf den Hardy-Räumen der Facetten festen Ranges. Damit ergibt sich als Gesamtlänge der Kompositionsreihe gerade der Rang der Jordan-Algebra.

Diese Ergebnisse erfordern zum einen die Definition geeigneter Subsysteme der konstruierten Darstellungen, die der Stratifikation von Ξ angepaßt sind; zum anderen aber auch die Kontrolle der Summendarstellungen, die durch diese definiert werden. Deshalb wird im ersten Abschnitt die Darstellungstheorie von Cokreuzprodukten noch einmal aufgenommen, um zwei allgemein formulierte Resultate über Summendarstellungen zu beweisen.

7.1 Summendarstellungen von Cokreuzprodukten

Im gesamten Abschnitt sei δ eine Coaktion einer lokalkompakten Gruppe S auf einer C*-Algebra $\mathcal{B}$ und $(\pi_j, W_j)_{j\in J}$ eine Familie covarianter Paare für das System $(\mathcal{B}, S, \delta)$. Für jedes $j \in J$ sei H_j der Darstellungsraum von π_j und ν_j die gemäß Theorem 5.2.2 durch W_j eindeutig bestimmte nicht degenerierte Darstellung von $A(S)$ auf H_j.

Definition 7.1.1 Im Sinne von [D1, 2.2.3] seien:

1. $H^J := \bigoplus_{j\in J} H_j$ sei die direkte Summe der Hilberträume $H_j,\ j \in J$.
2. $\pi^J := \bigoplus_{j\in J} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(H^J)$ sei die direkte Summe der Darstellungen $\pi_j,\ j \in J$.
3. $\nu^J := \bigoplus_{j\in J} : A(S) \longrightarrow \mathcal{L}(H^J)$ sei die direkte Summe der Darstellungen $\nu_j,\ j \in J$.

Bemerkung 7.1.2 Da alle π_j und alle $\nu_j,\ j \in J$, nicht degenerierte Darstellungen sind, ist auch π^J eine nicht degenerierte Darstellung von $\mathcal{B}$, und ν^J eine nicht degenerierte Darstellung von $A(S)$.

Lemma 7.1.3 *Es gilt:*

$$\bigoplus_{j\in J} \Pi(\pi_j, \nu_j)\Big(\delta(b)(1\otimes g)\Big) = \pi^J(b)\,\nu^J(g)$$

für alle $b \in \mathcal{B}, g \in A(S)$.

Beweis: Seien $b \in \mathcal{B}$ und $g \in A(S)$ beliebig. Dann folgt mit Theorem 5.2.6

$$\bigoplus_{j\in J} \Pi(\pi_j, \nu_j)\Big(\delta(b)(1\otimes g)\Big) = \bigoplus_{j\in J}\Big(\pi_j(b)\nu_j(g)\Big)\ ,$$

und für eine beliebige Familie $h^J := (h_j)_{j\in J}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{j\in J}\Big(\pi_j(b)\nu_j(g)\Big)(h^J) &= \Big(\pi_j(b)\nu_j(g)(h_j)\Big)_{j\in J} \\
&= \left(\left(\bigoplus_{j\in J}\pi_j(b)\right)\left(\bigoplus_{j\in J}\nu_j(g)\right)\right)(h^J) \\
&= \Big(\pi^J(b)\nu^J(g)\Big)(h^J)\ ,
\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Satz 7.1.4 *Für die Summendarstellungen π^J und ν^J gilt:*

$$\Pi(\pi^J,\nu^J) = \bigoplus_{j\in J} \Pi(\pi_j,\nu_j) \ ,$$

und es gibt einen eindeutig bestimmten unitären Operator $W^J \in \mathcal{L}(H^J)\overline{\otimes} W^*(S)$, so daß

$$S_f(W^J) = \nu^J(f)$$

für alle $f \in A(S)$.

Beweis: Da alle $\Pi(\pi_j,\nu_j)$, $j \in J$, nicht degenerierte Darstellungen von $\mathcal{B} \otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)$ sind, ist auch $\bigoplus_{j\in J}\Pi(\pi_j,\nu_j)$ eine nicht degenerierte Darstellung von $\mathcal{B} \otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)$. Daher gibt es wegen Theorem 5.2.6 ein eindeutig bestimmtes Paar (π_0^J,ν_0^J) für das System $(\mathcal{B},S,\delta)$, so daß

$$\bigoplus_{j\in J} \Pi(\pi_j,\nu_j)\Big(\delta(b)(1\otimes g)\Big) = \Pi_0^J(b)\nu_0^J(g) \tag{7.1.5}$$

für alle $b \in \mathcal{B}$ und $g \in \mathcal{C}_0(S)$. Wegen Theorem 5.2.2 gibt es weiterhin einen unitären Operator $W_0^J \in \mathcal{L}(H^J)\overline{\otimes} W^*(S)$, der durch die Bedingung

$$\nu_0^J(f) = S_f(W_0^J) \text{ für alle } f \in A(S)$$

eindeutig bestimmt ist. Außerdem gilt:

$$\bigoplus_{j\in J} \Pi(\pi_j,\nu_j) = \Pi(\pi_0^J,\nu_0^J) \ .$$

Da $\Pi(\pi_0^J,\nu_0^J)$ durch (7.1.5) eindeutig bestimmt ist, folgt mit Lemma 7.1.3

$$\Pi(\pi^J,\nu^J) = \bigoplus_{j\in J} \Pi(\pi_j,\nu_j) \ .$$

Also ist $W^J := W_0^J$ der gemäß Theorem 5.2.2 eindeutig bestimmte unitäre Operator aus $\mathcal{L}(H^J)\overline{\otimes} W^*(S)$, so daß $\nu^J(f) = S_f(W^J)$ für alle $f \in A(iX)$. □

Bemerkung 7.1.6 Da π nicht degeneriert ist, ist auch $\pi\overline{\otimes}\, id_{\mathcal{K}(L^2(S))}$ eine nicht degenerierte Darstellung von $\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{K}(L^2(S))$ auf $H\,\overline{\otimes} L^2(S)$. Deshalb existiert mit [LPRS, Abschnitt 1] die strikte Fortsetzung von $\pi\overline{\otimes}\, id_{\mathcal{K}(L^2(S))}$ nach $\mathcal{M}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{K}(L^2(S)))$ und damit auch

$$\pi \otimes_\delta id_{\mathcal{K}(L^2(S))} := \mathcal{M}\Big((\pi\overline{\otimes}\, id_{\mathcal{K}(L^2(S))})\Big)\Big|_{\mathcal{B}\otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)} \ .$$

Lemma 7.1.7 *Sei S eine lokalkompakte Gruppe und (π, W) ein covariantes Paar für das System $(\mathcal{B}, \delta, S)$. Dann gilt:*

$$\Big(Ad(W^*) \circ \mathcal{M}(\pi \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(S))})\Big)(T)(h_1 \otimes h_2)(s) = h_2(s)\Big(\Pi(\pi, \nu \circ \ell_{s^{-1}})(T)\Big)(h_1)$$

für alle $T \in \mathcal{B} \otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)$, $h_1 \in H, h_2 \in L^2(S)$ und $s \in S$.

Beweis: Es sei

$$\mathcal{B}' := C^*\Big(\pi(b)\nu(g) : \ b \in \mathcal{B}, g \in \mathcal{C}(S)\Big) \subset \mathcal{L}(H) \ .$$

Der Beweis von [LPRS, Theorem 3.7] zeigt für die Abbildung

$$\Big(Ad(W^*)\mathcal{M}(\pi \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(S))})\Big)\Big|_{\mathcal{B}\otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)} : \mathcal{B} \otimes_\delta \mathcal{C}_0(S) \longrightarrow \mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}') \ ,$$

daß für alle $b \in \mathcal{B}, g \in \mathcal{C}_0(S)$

$$\Big(Ad(W^*) \circ \mathcal{M}(\pi \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(S))})\Big)\Big(\delta(b)(1 \otimes g)\Big) \tag{7.1.8}$$

wie ein Multiplikationsoperator mit der stetigen Funktion

$$\Big(s \longmapsto \pi(b)\nu(\ell_{s^{-1}}g)\Big) \in \mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}')$$

wirkt. $\mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}')$ kann als C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(H \otimes L^2(S)) = \mathcal{L}(L^2(S, H))$ mit

$$\mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}') = \tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{B}' \overline{\otimes} \mathcal{C}_0(S))$$

realisiert werden (Beispiel 5.1.4). Diese Realisierung funktioniert wie folgt: Sei h aus $L^2(S, H)$ gegeben als $h = h_1 \otimes h_2, \ h_1 \in H, h_2 \in L^2(S)$, also

$$h(s) = h_2(s)\, h_1 \in H$$

für alle $s \in S$. Sei nun $f \in \mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}')$ beliebig. Dann gilt $f(h) = f \cdot h \in L^2(S, H)$ mit

$$(f \cdot h)(s) = f(s)\, h(s) = h_2(s)\, f(s)(h_1) \in H$$

für alle $s \in S$. Da $\mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}')$ eine abgeschlossene C*-Algebra ist, folgt aus (7.1.8)

$$\Big(Ad(W^*) \circ \mathcal{M}(\pi \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(S))})\Big)\Big(\mathcal{B} \otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)\Big) \subset \mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}') \ .$$

Sei nun $T \in \mathcal{B} \otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)$ beliebig und

$$\Big(Ad(W^*) \circ \mathcal{M}(\pi \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(S))})\Big)(T) =: f_T \in \mathcal{C}_b(S, \mathcal{B}') \ . \tag{7.1.9}$$

Dann folgt aus (7.1.8) weiter

$$f_T(s) = \Pi(\pi, \nu \circ \ell_{s^{-1}})(T)$$

und damit

$$\Big(Ad(W^*) \circ \mathcal{M}(\pi \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(S))})\Big)(T)(h_1 \otimes h_2)(s) = h_2(s)\Big(\Pi(\pi, \nu \circ \ell_{s^{-1}})(T)\Big)(h_1)$$

für alle $s \in S$, also die Behauptung des Lemmas. □

7.2 Idealstrukturen in $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$

Definition 7.2.1 Für eine Facette $F = F(\tilde r, \tilde p, k, s) \in \mathbb{F}_{\tilde r}$ von Ξ und $j \in \{0, \dots, \tilde r\}$ sei $\mathbb{F}_j(F)$ die Menge aller Facetten $\tilde F$ von $F = k\Lambda_{\tilde r \tilde p} + ikX_{\tilde r} + s$ mit $\mathrm{Rang}(\tilde F) = j$.

Bemerkung 7.2.2 In Übereinstimmung mit Definition 6.2.11 gilt für die Facette $\Xi \in \mathbb{F}_r$: $\mathbb{F}_j(\Xi) = \mathbb{F}_j$ und es ist klar, daß $\mathbb{F}_j(F) \subset \mathbb{F}_j = \mathbb{F}_j(\Xi)$ für jede Facette F von Ξ.

Sind F und F' zwei verschiedene Facetten von Ξ, dann sind auch $\mathbb{F}_j(F)$ und $\mathbb{F}_j(F')$ verschieden und wenn $\overline{F} \cap \overline{F}' = \emptyset$ folgt $\mathbb{F}_j(F) \cap \mathbb{F}_j(F') = \emptyset$.

Definition 7.2.3 Sei $F = F(\tilde r, \tilde p, k, s)$ eine Facette von Ξ und $\tilde F \in \mathbb{F}_{\tilde r - 1}(F)$. Dann seien die folgenden, bezüglich F relativen, Darstellungen definiert:

1. $\pi_{\tilde F}^F : C_F^*(iX_F) \longrightarrow C_{\tilde F}^*(iX_{\tilde F}) \subset \mathcal{L}(L^2(iX_{\tilde F}))$ sei die analog Satz 4.3.2 konstruierte Limesdarstellung von $C_F^*(iX_F)$ bezüglich der Facette $\tilde F$ von F.

2. $\nu_{\tilde F}^F : A(iX_F) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(iX_{\tilde F}))$ sei die analog Lemma 5.2.7 definierte Darstellung von $A(iX_F)$ bezüglich der Facette $\tilde F$ von F.

3. $\Pi(F, \tilde F) := \Pi(\pi_{\tilde F}^F, \nu_{\tilde F}^F) : C_F^*(iX_F) \otimes_{\delta_{iX_F}} \mathcal{C}(iX_F) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(iX_{\tilde F}))$ sei die gemäß Satz 5.2.11 aus $\pi_{\tilde F}^F$ und $\pi_{\tilde F}^F$ abgeleitete Darstellung des Cokreuzproduktes $C_F^*(iX_F) \otimes_{\delta_{iX_F}} \mathcal{C}(iX_F)$.

4. $\Pi_{\mathcal{K}}(F, \tilde F) : \mathcal{K}_F(L^2(iX_F)) \longrightarrow \mathcal{K}_{\tilde F}(L^2(iX_{\tilde F}))$ sei die analog Lemma 6.2.3 konstruierte Darstellung der Hardy-Toeplitz Vervollständigung von $\mathcal{K}(L^2(iX_F))$.

5. $\Pi_{\mathcal{T}}(F, \tilde F) : \mathcal{T}(H_F^2(iX_F)) \longrightarrow \mathcal{T}(H_{\tilde F}^2(iX_{\tilde F}))$ sei die analog Satz 6.2.6 konstruierte Darstellung der Hardy-Toeplitz C*-Algebra über $H_F^2(iX_F)$.

Bemerkung 7.2.4 Im Fall $F = \Xi$, der in obiger Definition enthalten ist, ergibt sich $\nu_{\tilde F}^F = \nu_{\tilde F}$ und entsprechende Identitäten für die übrigen Darstellungen der Definition 7.2.3.

Sei nun $F \in \mathbb{F}_{\tilde r}$ eine beliebige Facette von Ξ mit $\mathrm{Rang}(F) = \tilde r$. Dann ist

$$\pi^F := \bigoplus_{\tilde F \in \mathbb{F}_{\tilde r - 1}(F)} \pi_{\tilde F}^F : C_F^*(iX_F) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\bigoplus_{\tilde F \in \mathbb{F}_{\tilde r - 1}(F)} L^2(iX_{\tilde F}) \right)$$

eine nicht degenerierte Darstellung von $C_F^*(iX_F)$ auf $\bigoplus_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} L^2(iX_{\tilde{F}}) =: H^F$, und

$$\nu^F := \bigoplus_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \nu_{\tilde{F}}^F : A(iX_F) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\bigoplus_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} L^2(iX_{\tilde{F}})\right)$$

eine nicht degenerierte Darstellung von $A(iX_F)$ auf H^F. Für alle $\tilde{F} \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)$ und $s \in iX$ ist $\tilde{F} + s \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)$ und $\nu_{\tilde{F}}^F \circ \ell_{-s} = \nu_{\tilde{F}+s}^F$. Nun setzt man $J := \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)$. Dann gilt wegen Satz 7.1.4 für alle $s \in iX$

$$\Pi(\pi^F, \nu^F \circ \ell_{-s}) = \bigoplus_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \Pi(\pi_{\tilde{F}}^F, \nu_{\tilde{F}}^F \circ \ell_{-s}) \tag{7.2.5}$$

und wegen Lemma 7.1.7

$$\begin{aligned}&\Big(Ad(W^F)^* \circ \mathcal{M}(\pi^F \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(iX))})\Big)(T)(h_1 \otimes h_2)(s)\\ &= \ h_2(s)\Big(\Pi(\pi^F, \nu^F \circ \ell_{-s})(T)\Big)(h_1)\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

für alle $h_1 \in H^F, h_2 \in L^2(iX)$ und $s \in iX$. Man beachte, daß im Unterschied zu Lemma 7.1.7 wegen der additiven Struktur von iX nun wieder die additive Notation verwendet wird. Analog Satz 5.1.12 existiert eine Coaktion

$$\delta_{iX_F} : C_F^*(iX_F) \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}\Big(C_F^*(iX_F)\overline{\otimes} C^*(iX_F)\Big)$$

von iX_F auf $C_F^*(iX_F)$ und entsprechend Bemerkung 7.1.6 sei

$$\pi^F \otimes_{\delta_{iX_F}} id_{\mathcal{K}(L^2(iX))} := \mathcal{M}\Big(\pi^F \overline{\otimes} id_{\mathcal{K}(L^2(iX))}\Big)\Big|_{C_F^*(iX_F)\otimes_{\delta_{iX_F}}\mathcal{C}_0(iX_F)} . \tag{7.2.7}$$

Wegen [LPRS, Proposition 4.9] ist das *-Ideal Kern(π^F) von $C_F^*(iX_F)$ im Sinne von [LPRS, Definition 4.1] ein invariantes Ideal unter δ_{iX_F}. Das bedeutet:

$$\delta_{iX_F}\Big(\mathrm{Kern}(\pi^F)\Big) \subset \tilde{\mathcal{M}}\Big(\mathrm{Kern}(\pi^F)\overline{\otimes} C^*(iX_F)\Big)$$

und

$$\delta_{Kern(\pi^F)} := \delta_{iX_F}\Big|_{Kern(\pi^F)}$$

ist eine Coaktion von iX_F auf Kern(π^F). Deshalb existiert das Cokreuzprodukt

$$\mathrm{Kern}(\pi^F)\otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}}\mathcal{C}_0(iX_F) \subset \mathcal{M}\Big(\mathrm{Kern}(\pi^F)\overline{\otimes} C^*(iX_F)\Big) .$$

Lemma 7.2.8 *Sei $\tilde r \in \{0,\dots,r\}$ und $F \in \mathbb{F}_{\tilde r}$. Dann gilt:*

$$\bigcap_{\tilde F \in \mathbb{F}_{\tilde r -1}(F)} \mathrm{Kern}\Big(\Pi(\pi^F_{\tilde F}, \nu^F_{\tilde F})\Big) \subset \mathrm{Kern}(\pi^F) \otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}} \mathcal{C}_0(iX_F) \ .$$

Beweis: Sei $T \in \bigcap_{\tilde F \in \mathbb{F}_{\tilde r -1}(F)} \mathrm{Kern}(\Pi(\pi^F_{\tilde F}, \nu^F_{\tilde F}))$ beliebig. Da

$$\Big(Ad(W^F)^* \circ \mathcal{M}(\pi^F \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(iX))})\Big) \in \mathcal{L}\Big(H \otimes L^2(iX_F)\Big) = \mathcal{L}\Big(L^2(iX_F, H)\Big) \ ,$$

wählt man einen beliebigen Erzeuger $h_1 \otimes h_2$ von $H \otimes L^2(iX_F)$ mit $h_1 \in H$ und $h_2 \in L^2(iX_F)$. Seien $s \in iX_F$, $\tilde F \in \mathbb{F}_{\tilde r -1}(F)$ beliebig und $\tilde F' := \tilde F + s$. Dann gilt wegen $\pi^F_{\tilde F} \circ \ell_{-s} = \pi^F_{\tilde F'}$

$$\Pi(\pi^F_{\tilde F}, \nu^F_{\tilde F} \circ \ell_{-s}) = \Pi(\pi^F_{\tilde F}, \nu^F_{\tilde F'})$$

und es folgt

$$\Pi(\pi^F_{\tilde F}, \nu^F_{\tilde F} \circ \ell_{-s})(T) = 0 \ ,$$

was mit (7.2.5)

$$\Pi(\pi^F, \nu^F \circ \ell_{-s})(T) = 0$$

impliziert. Wegen (7.2.6) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} &\Big(Ad(W^F)^* \circ \mathcal{M}(\pi^F \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(iX))})\Big)(T)(h_1 \otimes h_2)(s) \\ = \;& h_2(s)\Big(\Pi(\pi^F, \nu^F \circ \ell_{-s})(T)\Big)(h_1) \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

für alle $s \in iX_F$, also

$$\Big(Ad(W^F)^* \circ \mathcal{M}(\pi^F \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(iX))})\Big)(T)(h_1 \otimes h_2) = 0 \in L^2(iX_F, H) \ .$$

Da $h_1 \in H$ und $h_2 \in L^2(iX_F)$ beliebig waren, folgt

$$\Big(Ad(W^F)^* \circ \mathcal{M}(\pi^F \otimes id_{\mathcal{K}(L^2(iX))})\Big)(T) = 0 \in \mathcal{L}\Big(H \otimes L^2(iX_F)\Big) \ ,$$

und da W^F unitär ist

$$T \in \mathrm{Kern}\left(\pi^F \otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}} id_{\mathcal{K}(L^2(iX))}\right) \ .$$

Analog [LPRS, Proposition 4.8] folgt

$$\mathrm{Kern}\left(\pi^F \otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}} id_{\mathcal{K}(L^2(iX))}\right) = \mathrm{Kern}(\pi^F) \otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}} \mathcal{C}_0(iX_F) \ ,$$

und das Lemma ist bewiesen. $\square$

Lemma 7.2.9 *Es sei $F \in \mathbb{F}$ und $f \in A(iX_F)$, so daß $\ell_{E_F f} \in \mathrm{Kern}(\pi^F)$. Dann gilt:*

$$(E_F f)^{\#}\Big|_{\Lambda_F^{\#}} \in \mathcal{C}_0(\Lambda_F^{\#}) \ .$$

Beweis: Sei $f \in A(iX_F)$, so daß $\ell_{E_F f} \in \mathrm{Kern}(\pi^F)$. Dann liegt $\ell_{E_F f} \in \mathrm{Kern}(\pi_{\tilde{F}}^F)$ für alle $\tilde{F} \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)$ und wegen Präposition 6.2.10 gilt sogar

$$\ell_{E_F f} \in \mathrm{Kern}(\pi_{\tilde{F}}^F)$$

für alle $\tilde{F} \in \bigcup_{i=0}^{\tilde{r}-1} \mathbb{F}_i(F)$. Es sei $\psi := (E_F f)^{\#} \in \mathcal{C}_0^F(X_F^{\#})$.

Nimmt man nun an, daß $\psi|_{\Lambda_F^{\#}} \notin \mathcal{C}_0(\Lambda_F^{\#})$, dann gibt es eine Folge $(\xi^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \Lambda_F^{\#}$ und ein $\epsilon > 0$, so daß $\lim_{l\to\infty} ||\xi^l||_{\lambda_\alpha} = \infty$, aber

$$|\psi(\xi^l)| > \epsilon$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Wegen Satz 1.2.35 gibt es Folgen $(k^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset K_F^\sigma$ und $(\vartheta^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \Theta_F^{\#}$ mit $\xi^l = k^l\vartheta^l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Da K_F^σ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(k^{j_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $k \in K_F^\sigma$ mit $\lim_{l\to\infty} k^{j_l} = k$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $k^{j_l} = k^l$ für alle $l \in \mathbb{N}$ annehmen. Da $\dim \Theta_F^{\#} = \tilde{r} < \infty$, gibt es eine Teilfolge $(\vartheta^{j_l})_{l\in\mathbb{N}} \subset (\vartheta^l)_{l\in\mathbb{N}}$, ein $\tilde{F} \in \bigcup_{i=0}^{\tilde{r}-1} \mathbb{F}_i(F)$ und ein $\tilde{\vartheta} \in \Theta_{\tilde{F}}^{\#}$, so daß

$$\vartheta^{j_l} \xrightarrow{\tilde{F}} \tilde{\vartheta} \ .$$

Wegen $\psi \in \mathrm{Kern}\Big(Ad(\mathcal{F}_F)\pi_{\tilde{F}}^F Ad(\mathcal{F}_F^{-1})\Big)$ folgt mit (4.2.22)

$$\lim_{l\to\infty} \psi(k\vartheta^{j_l}) = \Big(Ad(\mathcal{F}_F)\pi_{\tilde{F}}^F Ad(\mathcal{F}_F^{-1})\Big)(\psi)(k\tilde{\vartheta}) = 0 \ ,$$

und aufgrund der stetigen Operation von K_F^σ auf $\mathcal{C}_0^F(X_F^{\#})$ gemäß Korollar 3.4.17 gilt

$$\lim_{l\to\infty} \left|\psi(k^{j_l}\vartheta^{j_l}) - \psi(k\vartheta^{j_l})\right| = 0 \ .$$

Damit ergibt sich der Widerspruch

$$0 = \lim_{l\to\infty} \left(\left|\psi(k^{j_l}\vartheta^{j_l}) - \psi(k\vartheta^{j_l})\right| - \left|\psi(k\vartheta^{j_l})\right|\right) \geq \lim_{l\to\infty} \left|\psi(k^{j_l}\vartheta^{j_l})\right| > \epsilon$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 7.2.10 *Für $F \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$ gilt:*

$$\ell_{E_F}\left(\bigcap_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F})\Big)\right)\ell_{E_F} \subset \mathcal{K}\Big(H^2(iX_F)\Big)\ .$$

Beweis: Mit der Konstruktion in (6.2.1) gilt $\Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F}) = \Pi(F,\tilde{F})\circ\Psi^{-1}$ für alle $\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)$. Da Ψ ein Isomorphismus ist, folgt

$$\begin{aligned}\bigcap_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F})\Big) \quad &\subset \quad \Psi\left(\bigcap_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \mathrm{Kern}\Big(\Pi(\pi^F_{\tilde{F}},\nu^F_{\tilde{F}})\Big)\right)\\ &\overset{Lemma\ 7.2.8}{\subset} \quad \Psi\Big(\mathrm{Kern}(\pi^F)\otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}}\mathcal{C}_0(iX_F)\Big)\ .\end{aligned}$$

Hierbei ist gemäß Lemma 5.1.14

$$\Psi\Big(\mathrm{Kern}(\pi^F)\otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}}\mathcal{C}_0(iX_F)\Big) = C^*\Big(\ell_{E_Ff}\,g:\ \ell_{E_Ff}\in\mathrm{Kern}(\pi^F), g\in\mathcal{C}_0(iX_F)\Big)\ .$$

Sei nun $\ell_{E_Ff}\,g$ ein typischer Erzeuger von $\Psi\Big(\mathrm{Kern}(\pi^F)\otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}}\mathcal{C}_0(iX_F)\Big)$. Dann ist wegen Lemma 7.2.9 $(E_Ff)^\#|_{\Lambda_F^\#}\in\mathcal{C}_0(\Lambda_F^\#)$, und es gibt ein $\psi\in\mathcal{C}_0(X_F^\#)$ mit $\psi|_{\Lambda_F^\#} = (E_Ff)^\#|_{\Lambda_F^\#}$. Da $A(X_F^\#)$ dicht in $\mathcal{C}_0(X_F^\#)$ liegt, kann man eine Folge $(\psi^l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $A(X_F^\#)$ wählen, die gleichmäßig gegen ψ konvergiert. Damit konvergiert $\chi_F\psi^l$ gleichmäßig gegen $\chi_F(E_Ff)^\#$ und Anwendung von $Ad(\mathcal{F}_F^{-1})$ ergibt

$$\lim_{l\to\infty}\ell_{E_F}\,\ell_{(\psi^l)^\#}\,g = \ell_{E_F}\,\ell_{E_Ff}\,g\ .$$

Wegen $\psi^l\in A(X_F^\#)$ ist $\ell_{(\psi^l)^\#}\in C^*(iX_F)$ und mit Bemerkung 5.1.16

$$\ell_{E_F}\,\ell_{(\psi^l)^\#}\,g\in\ell_{E_F}\,\mathcal{K}\Big(L^2(iX_F)\Big)$$

für alle $l\in\mathbb{N}$. Da $\ell_{E_F}\,\mathcal{K}(L^2(iX_F))$ abgeschlossen ist, ist auch $\ell_{E_F}\,\ell_{E_Ff}\,g$ ein Element von $\ell_{E_F}\,\mathcal{K}(L^2(iX_F))$.

Ein beliebiges Element $T\in\Psi\Big(\mathrm{Kern}(\pi^F)\otimes_{\delta_{Kern(\pi^F)}}\mathcal{C}_0(iX_F)\Big)$ läßt sich approximieren durch eine Folge von Summen von Produkten von typischen Erzeugern. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei

$$T = \lim_{l\to\infty}\sum_{i=0}^{i_0}\prod_{j=0}^{j_0}\ell_{E_Ff_{lij}}\,g_{lij}$$

mit $\ell_{E_F f_{lij}} \in \mathrm{Kern}(\pi^F), g_{lij} \in \mathcal{C}_0(iX_F)$ für alle $l, i, j \in \mathbb{N}$. Dann ist wie oben gezeigt

$$\ell_{E_F}\, \ell_{E_F f_{li0}}\, g_{li0} \in \ell_{E_F}\, \mathcal{K}\Big(L^2(iX_F)\Big)$$

für alle $l, i \in \mathbb{N}$, und weil $\mathcal{K}(L^2(iX_F))$ ein Ideal in $\mathcal{L}(L^2(iX_F))$ ist, gilt auch

$$\ell_{E_F} \sum_{i=0}^{i_0} \prod_{j=0}^{j_0} \ell_{E_F f_{li0}}\, g_{li0} \in \ell_{E_F}\, \mathcal{K}\Big(L^2(iX_F)\Big)$$

für alle $l \in \mathbb{N}$. Mit der Abgeschlossenheit von $\ell_{E_F}\, \mathcal{K}(L^2(iX_F))$ folgt zunächst

$$\ell_{E_F}\, T \in \ell_{E_F}\, \mathcal{K}\Big(L^2(iX_F)\Big)\ .$$

Da in Korollar 6.1.10 gezeigt wurde, daß $\ell_{E_F}\, \mathcal{K}(L^2(iX_F))\, \ell_{E_F} = \mathcal{K}(H^2_F(iX_F))$, ist der Beweis vollständig. □

Nach dieser letzten technischen Vorbereitung kann nun eine erste Aussage bewiesen werden, welche die Idealstruktur von $\mathcal{T}(H^2_F(iX_F))$ zu den definierten Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}(F), F \in \mathbb{F}$, in Beziehung setzt. Betrachtet man nämlich im folgenden Satz den Spezialfall $F = \Xi$, so ergibt sich folgendes Resultat: Die kompakten Operatoren auf $H^2_p(iX)$, welche wegen Korollar 6.1.10 ein Ideal in $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$ bilden, sind genau diejenigen Hardy-Toeplitz-Operatoren, welche im Kern aller Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}(F)$ mit $\mathrm{Rang}(F) = r - 1$ liegen.

Satz 7.2.11 *Für $F \in \mathbb{F}$ mit $\mathrm{Rang}(F) = \tilde{r}$ gilt:*

$$\bigcap_{\tilde{F} \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(F, \tilde{F})\Big) = \mathcal{K}\Big(H^2_F(iX_F)\Big)\ .$$

Beweis: Sei $\ell_f\, g$ ein typischer Erzeuger von $\mathcal{K}(L^2(iX_F))$ mit $f \in L^1(iX_F)$ und $g \in \mathcal{C}_0(iX_F)$ (vergleiche Bemerkung 5.1.16) und $\tilde{F} \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)$. Dann zeigt Satz 3.4.5, daß $f^\# \in \mathcal{C}^F_0(X^\#_F)$. Deshalb gilt für beliebiges $\tilde{\xi} = \tilde{k}\tilde{\vartheta} \in K^\sigma_{\tilde{F}} \cdot \Theta^\#_{\tilde{F}}$ und für jede beliebige Folge $\vartheta^l \xrightarrow{\tilde{F}} \tilde{\vartheta}$:

$$(\pi^F_{\tilde{F}})^\#(f^\#)(\tilde{k}\tilde{\vartheta}) = \lim_{l\to\infty} f^\#(\tilde{k}\vartheta^l)\ .$$

Da aber $f^\# \in \mathcal{C}_0(X^\#_F)$, folgt $\lim_{l\to\infty} f^\#(\tilde{k}\vartheta^l) = 0$. Damit ist

$$\Pi_{\mathcal{K}}(F, \tilde{F})(\ell_f\, g) = \pi^F_{\tilde{F}}(\ell_f)\nu^F_{\tilde{F}}(g) = 0 \cdot \nu^F_{\tilde{F}}(g) = 0\ ,$$

also insgesamt $\mathcal{K}(L^2(iX_F)) \subset \bigcap_{\tilde{F} \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \mathrm{Kern}(\Pi_{\mathcal{K}}(F, \tilde{F}))$, und wegen (6.2.7) folgt

$$\mathcal{K}\Big(H^2(iX_F)\Big) \subset \bigcap_{\tilde{F} \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(F, \tilde{F})\Big)\ .$$

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen sei

$$\ell_{E_F}\, T\, \ell_{E_F} \in \bigcap_{\tilde{F}\in\mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)} \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(F,\tilde{F})\Big)$$

und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $T^* = T$. Wegen Präposition 6.2.5 gilt:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F})\,(T\,\ell_{E_F}\,T\,\ell_{E_F}\,T) \\
&= \Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F})(T)\;\Pi_{\mathcal{T}}(F,\tilde{F})\,(\ell_{E_F}\,T\,\ell_{E_F})\;\Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F})(T) \\
&= \Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F})(T)\;0\;\Pi_{\mathcal{K}}(F,\tilde{F})(T) \\
&= 0\,. \qquad (7.2.12)
\end{aligned}$$

Das Gelfand-Naimark Theorem für die Calkin C*-Algebra $\mathcal{L}(H_F^2(iX_F))/\mathcal{K}(H_F^2(iX_F))$ impliziert

$$\Big|\Big|\ell_{E_F}\,T\,\ell_{E_F}\Big|\Big|^3_{\mathcal{L}(H_F^2(iX_F))/\mathcal{K}(H_F^2(iX_F))} = \Big|\Big|(\ell_{E_F}\,T\,\ell_{E_F})^3\Big|\Big|_{\mathcal{L}(H_F^2(iX_F))/\mathcal{K}(H_F^2(iX_F))}$$

und mit (7.2.12) folgt $\ell_{E_F}\,T\,\ell_{E_F} = 0$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Definition 7.2.13 Eine C*-Algebra $\mathcal{B}$ heißt auflösbar mit Länge l, falls es eine Kompositionsreihe

$$\{0\} = I_0 \lhd I_1 \lhd I_2 \lhd \ldots \lhd I_l \lhd I_{l+1} = \mathcal{B}$$

gibt, so daß für jedes $j = 0,\ldots,l$ der Quotient I_{j+1}/I_j isomorph ist zu einer C*-Algebra der Form $\mathcal{C}_0(O_j)\otimes\mathcal{K}(H_j)$, wobei O_j ein lokal kompakter Hausdorffraum und H_j ein separabler Hilbertraum ist.

Theorem 7.2.14 (Struktursatz) *Die Hardy-Toeplitz C*-Algebra $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ ist auflösbar mit Länge r. Die Ideale*

$$I_j := \bigcap_{F\in\mathbb{F}_{r-j}} \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(F)\Big)\ ,$$

$j = 0,\ldots,r$, definieren eine Kompositionsreihe

$$\{0\} = I_0 \lhd I_1 = \mathcal{K}\Big(H_p^2(iX)\Big) \lhd I_2 \lhd \ldots \lhd I_r \lhd I_{r+1} := \mathcal{T}\Big(H_p^2(iX)\Big)$$

von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$, so daß C-Isormophismen*

$$I_{j+1}/I_j \cong \mathcal{C}_0(\mathbb{F}_{r-j})\otimes\mathcal{K}(H_j)\ , \qquad (7.2.15)$$

existieren, wobei H_j ein separabler Hilbertraum ist. Insbesondere ist H_r eindimensional und es gilt:

$$\mathcal{T}\Big(H_p^2(iX)\Big)/I_r \cong \mathcal{C}_0(iX)\ . \tag{7.2.16}$$

Beweis: Wegen Präposition 6.2.10 gelten für alle $j = 0, \ldots, r$ die Inklusionen $I_j \subset I_{j+1}$. Im Fall $j = 0$ ist $\mathbb{F}_{r-j} = \{\Xi\}$ und $\Pi_{\mathcal{T}}(\Xi)$ die Identität auf $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$, da sowohl π_Ξ als auch ν_Ξ die Identität auf $C_p^*(iX)$ beziehungsweise auf $A(iX)$ sind. Damit ist $\bigcap_{F\in\mathbb{F}_0} \mathrm{Kern}(\Pi_{\mathcal{T}}(F)) \subset \mathrm{Kern}(id_{\mathcal{T}(H_p^2(iX))}) = \{0\}$. Im Fall $j = 1$ ergibt die Anwendung von Satz 7.2.11 sofort $I_1 = \mathcal{K}(H_p^2(iX))$, was zunächst den Beweis der behaupteten Filtrierung abschließt.

Um die allgemeine Form (7.2.15) der Quotienten zu zeigen, sei $j \in \{0, \ldots, r\}$ beliebig. Damit die gewohnten Notationen beibehalten werden können, sei für die Dauer des Beweises $\tilde{r} := r - j$. Dann definiert $\mathcal{H}^{\tilde{r}} := (H_F^2(iX_F))_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}}$ ein stetiges Feld von Hilberträumen über $\mathbb{F}_{\tilde{r}}$ (vergleiche Bemerkung 6.2.28) im Sinne von [D1, Definition 10.1.2]. Die Konstruktion aus [D1, 10.7.2] liefert das zugehörige Feld elementarer C*-Algebren

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) := \Big(\mathcal{K}\left(H_F^2(iX_F)\right)\Big)_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}}\ .$$

Dieses wiederum definiert gemäß [D1, 10.4.1] die C*-Algebra

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) &:= \Big(\mathcal{K}\left(H_F^2(iX_F)\right)\Big)_{(F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}})_0} \\ &:= \Big\{b \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) :\ F \longmapsto ||b(F)||_{\mathcal{K}(H_F^2(iX_F))} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{F}_{\tilde{r}})\Big\}\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

mit der Norm

$$||b||_{\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})} := \sup_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}} ||b(F)||_{\mathcal{K}(H_F^2(iX_F))}$$

für alle $b \in \mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$. Sei nun $\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}} := (\Pi_{\mathcal{T}}(F))_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}}$. Dann gilt

$$\mathrm{Kern}(\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}) = I_{r-\tilde{r}}$$

und es bleibt

$$\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}(I_{r-(\tilde{r}-1)}) = \mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$$

zu zeigen.

Behauptung 1: *$\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}(I_{r-(\tilde{r}-1)})$ ist eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$.*

Beweis der Behauptung 1: Sei $T \in I_{r-(\tilde{r}-1)}$ beliebig. Aufgrund der Form (Korollar 6.2.8) der Darstellungen $\Pi_{\mathcal{T}}(F), F \in \mathbb{F}$, folgt direkt, daß

$$\Pi_{\mathcal{T}}(F)(T) \in \mathcal{L}\Big(H_F^2(iX_F)\Big)$$

für alle $F \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$, und daß die Abbildung $F \longmapsto ||\Pi_{\mathcal{T}}(F)(T)||_{\mathcal{T}(H^2_F(iX_F))}$ stetig auf $\mathbb{F}_{\tilde{r}}$ ist. Da $T \in I_{r-(\tilde{r}-1)}$, ist $T \in \mathrm{Kern}(\Pi_{\mathcal{T}}(F'))$ für alle $F' \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}$. Wegen Korollar 6.2.10 ist deshalb

$$\Pi_{\mathcal{T}}(F)(T) \in \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(F, \tilde{F})\Big)$$

für alle $\tilde{F} \in \mathbb{F}_{\tilde{r}-1}(F)$ und für alle $F \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$. Nun impliziert Satz 7.2.11 für alle $F \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$

$$\Pi_{\mathcal{T}}(F)(T) \in \mathcal{K}\Big(H^2_F(iX_F)\Big)$$

und es folgt:

$$\Pi^{\tilde{r}}_{\mathcal{T}}(T) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) \ . \tag{7.2.18}$$

Um zu zeigen, daß $\Pi^{\tilde{r}}_{\mathcal{T}}$ sogar nach $\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$ abbildet, sei zunächst $(F^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}_{\tilde{r}}$ eine beliebige Folge, so daß für jede kompakte Menge $O \subset \mathbb{F}_{\tilde{r}}$ ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $F^l \notin O$ für alle $l \geq l_0$. Wegen der Realisation von $\mathbb{F}_{\tilde{r}}$ und der Kompaktheit von $(K^\sigma \times P_c)$ (Bemerkung 6.2.28), kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$F^l = F^l(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s^l) \ ,$$

mit $||\dot{s}^l||_{iX/ikX_{\tilde{r}}} \longrightarrow \infty$, angenommen werden. Sei nun $T_{\Lambda_p}(\varphi) = \ell_{E_F}\,\varphi\,\ell_{E_F}$ mit $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ ein beliebiger Erzeuger von $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$. Dann gilt wegen Korollar 6.2.8

$$\tilde{T}^l := \Pi_{\mathcal{T}}(F^l)\Big(T_{\Lambda_p}(\varphi)\Big) = \ell_{E_{F^l}}\,\varphi^k_{\tilde{r}s}\,\ell_{E_{F^l}} \ ,$$

wobei $\varphi^k_{\tilde{r}s} = (\varrho_{s^l}\varphi)|_{ikX_{\tilde{r}}}$. Da $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$ und $s^l + ikX_{\tilde{r}} \to \infty$ in $iX/ikX_{\tilde{r}}$, existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $l_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$||(\varrho_{s^l}\varphi)|_{ikX_{\tilde{r}}}||_\infty < \epsilon$$

für alle $l \geq l_0(\epsilon)$. Damit ist auch $||\tilde{T}^l||_{\mathcal{L}(H^2_{F^l}(iX_{F^l}))} < \epsilon$ für alle $l \geq l_0(\epsilon)$ und es folgt

$$\lim_{l\to\infty} ||\tilde{T}^l||_{\mathcal{L}(H^2_{F^l}(iX_{F^l}))} = 0 \ .$$

Wegen der Beliebigkeit der Folge $(F^l)_{l\in\mathbb{N}}$ zeigt dies

$$\Pi^{\tilde{r}}_{\mathcal{T}}\Big(T_{\Lambda_p}(\varphi)\Big) \in \Big(\mathcal{T}\left(H^2_F(iX_F)\right)\Big)_{(F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}})_0} =: \mathcal{T}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) \tag{7.2.19}$$

für alle $T_{\Lambda_p}(\varphi)$ mit $\varphi \in \mathcal{C}_0(iX)$. Da für jedes $F \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$ die Darstellung $\Pi_{\mathcal{T}}(F)$ eine Kontraktion ist [S1, Corollary 1.2.6], gilt

$$\begin{aligned}
||\Pi^{\tilde{r}}_{\mathcal{T}}(T)||_{\mathcal{T}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})} &= \sup_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}} ||\Pi_{\mathcal{T}}(F)(T)||_{\mathcal{L}(H^2_F(iX_F))} \\
&\leq \sup_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}} ||T||_{\mathcal{L}(H^2_p(iX))} \\
&= ||T||_{\mathcal{L}(H^2_p(iX))}
\end{aligned}$$

für alle $T \in \mathcal{T}(H_p^2(iX))$. Damit ist auch

$$\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}} : \mathcal{T}\Big(H_p^2(iX)\Big) \longrightarrow \Big(\mathcal{T}\left(H_F^2(iX_F)\right)\Big)_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}} =: \mathcal{T}(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$$

eine Kontraktion, was

$$\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}\Big(C^*\left(T_{\Lambda_p}(\varphi) :\ \varphi \in \mathcal{C}_0(iX)\right)\Big) \subset C^*\Big(\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}\left(T_{\Lambda_p}(\varphi)\right) :\ \varphi \in \mathcal{C}_0(iX)\Big)$$

impliziert und mit (7.2.19) folgt

$$\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}\Big(\mathcal{T}\left(H_p^2(iX)\right)\Big) \subset \mathcal{T}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) \ .$$

Schließlich ergibt sich für die Einschränkung von $\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}$ auf $I_{r-(\tilde{r}-1)}$ die behauptete Inklusion

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}(I_{r-(\tilde{r}-1)}) &= \Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}\Big(I_{r-(\tilde{r}-1)} \cap \mathcal{T}\left(H_p^2(iX)\right)\Big) \\ &\subset \underbrace{\mathcal{K}(\mathcal{H}^{\tilde{r}})}_{wegen\ (7.2.18)} \cap \underbrace{\mathcal{T}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})}_{wegen\ (7.2.19)} \\ &\subset \mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) \ . \end{aligned}$$

$\square$

Behauptung 2: $\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}$ *bildet* $I_{r-(\tilde{r}-1)}$ *surjektiv auf* $\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$ *ab.*

Beweis der Behauptung 2: Um die Surjektivität zu zeigen, betrachte man zunächst zwei Facetten $F = F(\tilde{r},\tilde{p},k,s), F' = F'(\tilde{r},\tilde{p}',k',s') \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$ mit $F \neq F'$. Gemäß Lemma 6.2.16 gibt es einen Operator $T = Ad(\mathcal{F})(\chi_p\,\psi\,\ell_p hi\,\chi_p) \in \mathcal{T}(H_p^2(iX))$, so daß $(\pi_{\tilde{r}\tilde{p}''}^{k''})^{\#}(\psi) \in \mathcal{C}_0(ik''X_{\tilde{r}}^{\#})$ für alle Facetten $F'' = F''(\tilde{r},\tilde{p}'',k'',s'') \in \mathbb{F}_{\tilde{r}}$. Deshalb ist mit Korollar 6.2.10

$$T \in \mathrm{Kern}\Big(\Pi_{\mathcal{T}}(F'')\Big)$$

für alle $F'' \in F_{\tilde{r}-1}$, also $T \in I_{r-(\tilde{r}-1)}$. Weiterhin kann analog der Konstruktion im Beweis von Theorem 6.2.23 der Operator T so gewählt werden, daß

$$\Pi_{\mathcal{T}}(F')(T) = 0 \neq \Pi_{\mathcal{T}}(F)(T) \ .$$

Da insbesondere $\Pi_{\mathcal{T}}(F)(T) \neq 0$, ist $\Pi_{\mathcal{T}}^{\tilde{r}}(I_{r-(\tilde{r}-1)})$ damit eine punktetrennende Unteralgebra in $\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$ und das Theorem von Stone-Weierstrass zeigt, daß diese Unteralgebra schon ganz $\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$ ist, was den Beweis der Behauptung 2 komplettiert.

Behauptung 3: *Es gibt einen separablen Hilbertraum* $H_{r-\tilde{r}}$ *und einen* C^**-Isomorphismus, so daß*

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) = \mathcal{C}_0(\mathbb{F}_{\tilde{r}}) \otimes \mathcal{K}(H_{r-\tilde{r}}) \ .$$

Beweis der Behauptung 3: Sei zunächst $\tilde{r} > 0$. Dann ist $(H_F^2(iX_F))_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}}$ ein stetiges Feld separabler Hilberträume unendlicher Dimension. Da $\mathbb{F}_{\tilde{r}}$ lokal kompakt ist, folgt mit [D1, Lemma 10.8.7], daß dieses Feld trivial ist. Dies impliziert, daß das Feld elementarer C*-Algebren $(\mathcal{K}(H_F^2(iX_F)))_{F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}}}$ und damit auch $\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}})$ trivial sind. Deshalb existiert ein separabler Hilbertraum $H_{r-\tilde{r}}$ und ein C*-Isomorphismus, so daß

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) \cong \mathcal{C}_0(\mathbb{F}_{\tilde{r}}) \otimes \mathcal{K}(H_{r-\tilde{r}}) \ .$$

Da $j = r - \tilde{r}$ ist hiermit die Form (7.2.15) gezeigt.

Sei nun $\tilde{r} = 0$. Ist $\mathrm{Rang}(F) = 0$, so folgt $iX_F = \{0\}$, $H_F^2(\{0\}) = \mathbb{C}$ und $\mathcal{K}(H_F^2(\{0\})) = \mathcal{K}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Da

$$\mathbb{F}_0 = \{k(\Lambda_{00} + iX_0) + s : \ s \in iX, h \in K^\sigma\} = iX \ ,$$

erhält man als stetiges Feld elementarer C*-Algebren

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}^r) = \Big(\mathcal{K}\left(H_F^2(iX_F)\right)\Big)_{F\in\mathbb{F}_0} = (\mathcal{K}(\mathbb{C}))_{F\in\mathbb{F}_0}$$

und es folgt mit der Bedingung (7.2.17)

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{H}^r) = \mathcal{C}_0(iX) \ .$$

Dies beschließt den Beweis der Behauptung 3 und damit des gesamten Theorems.

□

Bemerkung 7.2.20 Wegen der Form der Quotienten (7.2.15) bildet die Menge $\{\Pi_{\mathcal{T}}(F) : \ F \in \mathbb{F}\}$ das gesamte Spektrum von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ [D1, 2., Proposition 2.11.2]. Insbesondere wird durch die konstruierte Kompositionsreihe das nicht separierte Spektrum von $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ in die jeweils separierten Anteile $\mathbb{F}_{\tilde{r}}, 0 \leq \tilde{r} \leq r$, „aufgelöst". Die Darstellung

$$\begin{aligned} I_{j+1}/I_j &= \mathcal{K}_0(\mathcal{H}^{\tilde{r}}) \\ &= \Big(\mathcal{K}\left(H_F^2(iX_F)\right)\Big)_{(F\in\mathbb{F}_{\tilde{r}})_0} \end{aligned}$$

zeigt sehr schön, wie $\mathcal{K}(H_p^2(iX))$ mittels kompakter Operatoren auf den Hardy-Räumen über den Facetten zur Hardy-Toeplitz C*-Algebra $\mathcal{T}(H_p^2(iX))$ vervollständigt wird.

Kapitel 8

Ausblick: Hardy-Räume über symmetrischen Shilov-Rändern

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit erreichten Resultate in das Programm eingeordnet, allgemeine Gebiete Ξ mit symmetrischen Shilov-Rändern K_σ analog zu quantisieren, also Hilberträume und Operatoralgebren über diesen Räumen zu konstruieren und zu analysieren. Dabei wird unter anderem auch diskutiert, in welchem Rahmen sich diese Allgemeinheit bewegen kann und welche Schwierigkeiten dabei zu erwarten sind.

Die im siebten Kapitel bewiesenen Resultate wurden allein durch Analysis über dem Shilov-Rand iX des Tubengebietes Ξ erreicht. Allgemeiner ist der Ansatz, eine beliebige reelle lokal kompakte Lie-Gruppe L mit Involution σ' zu betrachten. Zusammen mit der Einskomponente $L^{\sigma'}$ der Fixpunktgruppe unter σ' bildet L ein symmetrisches Paar $(L, L^{\sigma'})$ mit symmetrischem Quotientenraum

$$L_{\sigma'} := L^{\sigma'} \setminus L \ ,$$

bestehend aus Rechtsnebenklassen.

Im vorliegenden Fall wählt man für L das halbdirekte Produkt $K := K^\sigma \propto iX$ mit der Verknüpfungsregel

$$(k, ix) \circ (k', ix') := (kk', ixk' + ix')$$

für alle $ix, ix' \in iX,\ k, k' \in K^\sigma$, wobei K^σ nun von rechts auf iX operiert. Mit der Involution $\sigma'(k, ix) := (\sigma(k), -ix)$ erhält man den symmetrischen Quotientenraum

$$K_\sigma := K^\sigma \setminus \Big(K^\sigma \propto iX\Big) \cong iX \ ,$$

also gerade die (reelle) Jordan-Algebra iX. Da K^σ eine kompakte Gruppe ist, kann man annehmen, daß das Haarmaß ω_H auf iX unter K^σ invariant ist, und K operiert unitär auf dem Hardy-Raum $H^2_p(iX)$. Das nächste Ziel ist, die Peter-Weyl Fourier-Zerlegung von $H^2_p(iX)$ bezüglich der Operation von K zu bestimmen.

Es sei $K^\sharp$ der unitäre Dual der Liegruppe K, das heißt die Menge aller Äquivalenzklassen aller unitärer Darstellungen von K. Da K^σ kompakt und iX kommutativ ist, kann man die Darstellungstheorie für halbdirekte Produkte aus [M1, T] anwenden. Diese besagt, daß

$$K^\sharp = \bigcup_{\xi \in K^\sigma \setminus X^\#} \left(K^\sigma_\xi\right)^\sharp \times \{\xi\} ,$$

wobei für $\xi \in X^\#$ die zugehörige Darstellung von iX analog (2.3.2) durch $ix \mapsto e^{i\xi(x)}$ gegeben ist und

$$K^\sigma_\xi := \{k \in K^\sigma : \ k(\xi) = \xi\}$$

die Isotropiegruppe von K^σ im Punkt ξ ist.

Beispiel 8.1 Für $Sym(2;\mathbb{R})$ ergibt sich gemäß Beispiel 2.1.3 $K^\sigma = SO(2;\mathbb{R})$ und damit

$$SO(2;\mathbb{R}) \setminus Sym(2;\mathbb{R})^\# = \mathbb{R} \cdot (e_1^\# + e_2^\#) \oplus \mathbb{R}_+ \cdot (e_1^\# - e_2^\#) ,$$

also gerade die abgeschlossene rechte Halbebene $\overline{\Theta}{}^\#_+$ in $\Theta^\#$. Die Elemente der Geraden $\mathbb{R} \cdot (e_1^\# + e_2^\#) = \mathbb{R} \cdot (e^\#)$ sind invariant unter $SO(2;\mathbb{R})$ und für $\xi \in \Theta^\#_+$ folgt $SO(2;\mathbb{R})_\xi = \{id_{X^\#}\}$. Für den unitären Dual von $SO(2;\mathbb{R}) \propto iSym(2;\mathbb{R})$ erhält man damit

$$\Big(SO(2;\mathbb{R}) \propto iSym(2;\mathbb{R})\Big)^\sharp = \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} SO(2;\mathbb{R})^\sharp \times \{\mu\, e^\#\} \ \cup \ \Theta^\#_+ . \tag{8.2}$$

Für jede Darstellung $(\pi, \xi) \in (K^\sigma_\xi)^\sharp \times X^\#$ ist der Darstellungsraum gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle K^\sigma_\xi \times iX \rangle_{\pi,\xi} &= \langle K^\sigma_\xi \rangle_\pi \otimes \mathbb{C}_\xi \\ &= \langle K^\sigma_\xi \rangle_\pi , \end{aligned}$$

wobei $\langle K^\sigma_\xi \rangle_\pi$ der Hilbertraum ist, auf dem K^σ_ξ mittels π dargestellt wird. Die zugehörige Darstellung von K ist dann gerade die *induzierte Darstellung*

$$Ind^K_{K^\sigma_\xi \propto iX}(\pi \otimes \xi) =: (\pi, \xi) . \tag{8.3}$$

Diese kann auf einem Hilbertraum $\langle K \rangle_{\pi,\xi}$ realisiert werden, der aus allen $f \in L^2(K)$ besteht, so daß für alle $k' \in K^\sigma_\xi, s \in iX$ und $k \in K$

$$f\Big((k', s)k\Big) = \pi(k') e^{\xi(s)} f(k) \tag{8.4}$$

gilt. Äquivalent zur Bedingung (8.4) sind die beiden Bedingungen

$$f(k',s) = e^{\xi(s(h')^{-1})} f(k',0) \tag{8.5}$$

und

$$f(kk',0) = \pi(k) f(k',0) \tag{8.6}$$

für alle $k \in K_\xi^\sigma, k' \in K^\sigma$ und $s \in iX$. Die Darstellung von K auf $\langle K \rangle_{\pi,\xi}$ ist durch Rechtstranslationen mit

$$\Big((\pi,\xi)(k)\Big)(f)(k') := f(k'k)$$

für alle $k, k' \in K$ und $f \in \langle K \rangle_{\pi,\xi}$ gegeben.

Der Satz von Plancherel besagt

$$L^2(K) \cong \int_{K^\sigma \backslash X^\#} \sum\nolimits_{(K_\xi^\sigma)^\sharp} \langle K \rangle_{\pi,\xi} \otimes \langle K \rangle_{\pi,\xi}^* \, d\omega_P \ , \tag{8.7}$$

wobei ω_P das Plancherel-Maß ist und sich sowohl auf das kontinuierliche, als auch auf das diskrete Spektrum bezieht. Da $L^2(iX)$ mit

$$L^2(K_\sigma) := \{ f \in L^2(K) : \ f \text{ ist links } K^\sigma\text{-invariant} \}$$

identifiziert werden kann, gilt es, als nächstes die Darstellungen (π,ξ) von K zu finden, die einen nicht trivialen distributiven Vektor $f_\xi \in \langle K \rangle_{\pi,\xi}^{-\infty}$ besitzen, der invariant unter K^σ ist. Diese nennt man *sphärische Darstellungen* von (K, K^σ) und $K_\sigma^\sharp$ sei die Menge aller sphärischen Darstellungen von (K, K^σ).

Präposition 8.8 *Die Darstellung $(\pi,\xi) \in (K_\xi^\sigma) \times X^\#$ ist genau dann sphärisch, wenn $\pi = 0$ die triviale Darstellung von K_ξ^σ ist.*

Beispiel 8.9 Für $SO(2;\mathbb{R}) \propto iSym(2;\mathbb{R})$ aus Beispiel 8.1 ergeben sich die sphärischen Darstellungen zu

$$\Big(SO(2;\mathbb{R}) \propto iSym(2;\mathbb{R})\Big)_\sigma^\sharp = \Theta_+^\# \cup \mathbb{R} \cdot e^\# = \overline{\Theta}_+^\# \ .$$

Damit kann $K_\sigma^\sharp$ mit dem Orbitraum $K^\sigma \setminus X^\#$ identifiziert werden, und mit (8.7) ergibt sich für $L^2(K_\sigma)$:

$$L^2(K_\sigma) \cong \int_{K^\sigma \backslash X^\#} \langle K \rangle_{0,\xi} \otimes f_\xi^* \ . \tag{8.10}$$

Hierbei gilt für $\eta \in \langle K\rangle_{0,\xi}$, daß $k \mapsto (\eta|k(f_\xi))_{\langle K\rangle_{0,\xi}}$ die zugehörige Funktion aus $L^2(K_\sigma)$ ist, daß $k \in K$ mittels der Darstellung $(0,\xi)$ auf f_ξ wirkt und daß f_ξ der invariante Vektor aus $\langle K\rangle_{0,\xi}$ ist.

Die Operation von K^σ auf $X^\#$ induziert ein Bildmaß $\dot{\omega}$ auf $K^\sigma \setminus X^\# = K_\sigma^\sharp$, so daß für alle $\psi \in \mathcal{C}_c(X^\#)$

$$\int_{X^\#} \psi(\xi)\, d\xi = \int_{K^\sigma\setminus X^\#} \int_{K^\sigma} \psi(k\dot{\xi})\, dk\, d\dot{\xi}$$

gilt. Entsprechend erhält man eine direkte Integralzerlegung

$$L^2(X^\#) \cong \int_{K^\sigma\setminus X^\#} L^2(K^\sigma/K_\xi^\sigma)\, d\dot{\xi} \tag{8.11}$$

des L^2-Raumes über $X^\#$.

Präposition 8.12 *Für jedes $\xi \in X^\#$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\langle K\rangle_{0,\xi} \cong L^2(K^\sigma/K_\xi^\sigma) = L^2(K^\sigma \cdot \xi)\ ,$$

der jedes $\dot{f} \in L^2(K^\sigma/K_\xi^\sigma)$ auf

$$f : K^\sigma \propto iX \longrightarrow \mathbb{C};\ (k,s) \longmapsto e^{\xi(sk^{-1})} f(k^{-1}K_\xi^\sigma)$$

abbildet.

Da $\Lambda_p^\#$ unter der Operation von K^σ invariant ist, kann man den Orbitraum $K^\sigma \setminus \Lambda_p^\#$ bilden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} L^2(\Lambda_p^\#) &\overset{(8.11)}{=} \int_{K^\sigma\setminus\Lambda_p^\#} L^2(K^\sigma/K_\xi^\sigma)\, d\dot{\xi} \\ &\overset{(8.12)}{\cong} \int_{K^\sigma\setminus\Lambda_p^\#} \langle K\rangle_{0,\xi}\, d\dot{\xi} \\ &\cong \int_{K^\sigma\setminus\Lambda_p^\#} \langle K\rangle_{0,\xi} \otimes f_\xi^*\, d\dot{\xi}\ , \end{aligned}$$

und man erhält für den Hardy-Raum:

$$H_p^2(iX) \cong \int_{K^\sigma\setminus\Lambda_p^\#} \langle K\rangle_{0,\xi} \otimes f_\xi^*\, d\dot{\xi}\ .$$

Da K^σ linear auf $X^\#$ operiert, ist $\Lambda^\# := K^\sigma \setminus \Lambda_p^\#$ ein Kegel in $K^\sigma \setminus X^\#$, also im Raum der sphärischen Darstellungen von K bezüglich K^σ. Damit befindet man sich in der angestrebten allgemeinen Situation, Hardy-Räume über symmetrischen Shilov-Rändern zu bilden: Man wählt einen (geeigneten) Kegel $\Lambda^{\#}$ im unitären Dual $K_\sigma^\sharp$ von K_σ und definiert den zugehörigen Hardy-Raum

$$H^2_{\Lambda^{\#}}(K_\sigma) := \int_{\Lambda^{\#}} \langle K \rangle_\xi \otimes f_\xi^* \, d\xi$$

als Unterraum von $L^2(K_\sigma)$.

Beispiel 8.13 In Beispiel 8.9 ergab sich $(SO(2;\mathbb{R})_\sigma)^\sharp = \overline{\Theta}{}^{\#}_{+}$. Für den Kegel $\Lambda_{+-} \subset Sym(2;\mathbb{R})$ folgt damit $\Lambda^{\#} = \Theta^{\#}_{+-}$ (in der Notation des Beispieles 2.1.3) und für den Hardy-Raum gilt:

$$\begin{aligned} H^2_{\Lambda_{+-}}(iX) &\cong H^2_{\Theta^{\#}_{+-}}\Big((SO(2;\mathbb{R}) \propto iSym(2;\mathbb{R}))_\sigma \Big) \\ &= \int_{\Theta^{\#}_{+-}} \Big\langle SO(2;\mathbb{R}) \propto iSym(2;\mathbb{R}) \Big\rangle_{0,\xi} \otimes f_\xi^* \, d\dot{\xi} \ . \end{aligned}$$

Da $H^2_p(iX)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(K_\sigma)$ ist, welcher wiederum invariant unter den Rechtstranslationen von K auf K_σ eingebettet ist (8.10), gibt es ein distributives Maß E auf K, so daß

$$\ell_E : L^2(K) \longrightarrow H^2_p(iX)$$

die orthogonale Projektion auf $H^2_p(iX)$ ist. Analog der vorliegenden Arbeit konstruiert man nun wieder die C*-Algebra der Hardy-Faltungsoperatoren

$$C^*_p(K) := C^*\Big(\ell_{Ef} : \ f \in A(K)\Big)$$

als Unteralgebra von $W^*(K)$.

Die Resultate des fünften Kapitels gelten analog für die lokal kompakte Gruppe K, und auch der im sechsten und siebten Kapitel beschrittene Weg zur Ableitung von Darstellungen für $\mathcal{T}(H^2_p(iX))$ aus den Darstellungen von $C^*_p(iX) \otimes_{\delta_{iX}} \mathcal{C}_0(iX)$ sollte prinzipiell auf das Cokreuzprodukt $C^*_p(K) \otimes_{\delta_K} \mathcal{C}_0(K)$ übertragbar sein. Schwieriger ist die Konstruktion von Limesdarstellungen für $C^*_p(K)$ entlang den Facetten von $K^\sigma \setminus \Lambda^{\#}_p =: \Lambda^{\#}$. Die dafür notwendige Einbettung der sphärischen Darstellungen $\tilde{K}^\sharp_\sigma \hookrightarrow K^\sharp_\sigma$ scheint relativ einfach möglich zu sein, und so bleibt als Hauptproblem die Einbettung der Darstellungsräume

$$\langle K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}} \propto iX_{\tilde{r}} \rangle_{0,\tilde{\xi}} \hookrightarrow \langle K^\sigma \propto iX \rangle_{0,\xi^l} \ .$$

Denn wenn $(\xi^l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $K^\sharp_\sigma$ ist, die bezüglich einer Facette von $\Lambda^{\#}$ gegen $\tilde{\xi} \in \tilde{K}^\sharp_\sigma$ konvergiert, wird im allgemeinen die Dimension von $\langle K^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{r}} \propto iX_{\tilde{r}} \rangle_{0,\tilde{\xi}}$ beliebig groß. Diese Schwierigkeit tritt bei dem in der vorliegenden Arbeit gewählten

Weg nicht auf, da alle Darstellungsräume der kommutativen Gruppe iX eindimensional sind (vergleiche 2.3.2). Es bestehen allerdings eine Reihe Ansätze und Anhaltspunkte, derartige Einbettungen auch für allgemeinere symmetrische Räume, die zum Beispiel in Zusammenhang mit sogenannten positiven hermiteschen Jordan-Tripelsystemen stehen [HU3], konstruieren zu können.

Literaturverzeichnis

[AG] J. E. D'Atri, S. Gindikin, *Siegel domain realization of pseudo-Hermitian symmetric manifolds,* Geometrica Dedicata, **46 (1)** (1993), 91-125

[BC] C. Berger, L. Coburn, *Wiener-Hopf operators on U_2,* Integral Equations Operator Theory **2** (1979), 139-173

[BH] W. Bertram, J. Hilgert, *Hardy spaces and analytic continuation of Bergman spaces,* Universités Paris VI et Paris VII/CNRS, Prépublication 163

[BS] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990

[BK] H. Braun, M. Koecher, *Jordan-Algebren,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966

[D1] J. Dixmier, *C^*-Algebras,* North-Holland, Amsterdam, 1977

[D2] A. Dynin, *Inversion problem for singular integral operators: C^*-approach,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **75** (1978), 4668-4670

[E] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact,* Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 181-236

[FG1] J. Faraut, S. Gindikin, *Pseudo-Hermitian spaces of tube type,* Progress in Nonlinear Diff. Eqn. **20** (1996), 123-154

[FK] J. Faraut, A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones,* Clarendon Press, Oxford, 1994

[FS] J. Faraut, I. Satake, *The functional equation of zeta distributions associated with formally real Jordan algebras,* Tôhoku Math. Journ. **36** (1984), 469-482

[FG2] I.A. Feldman, I.Z. Gohberg, *Faltungsgleichungen und Projektionsverfahren zu ihrer Lösung,* Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1974

[G1] I. Gelfand, *Some remarks on the theory of spherical functions on symmetric Riemannian manifolds,* Trans., II. Ser., Amer. Math. Soc. **21** (1962), 193-238

[GG] I. Gelfand, S. Gindikin, *Complex manifolds whose skeletons are semisimple real Lie groups, and analytic discrete series of representations,* Funkt. Anal. Prilozh **11 (4)** (1977), 20-28

[G2] S. Gindikin, *Fourier transform and Hardy spaces of $\bar{\partial}$-cohomology in tube domains,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **315** (11) (1992), 1139-1143

[G3] S. Gindikin, *Holomorphic language for $\overline{\partial}$-cohomology and representations of real semisimple Lie groups,* Contemporary Mathematics, **154** (1993), 103-115

[HU1] U. Hagenbach, H. Upmeier, *Toeplitz C^*-algebras over non-convex cones and pseudo-symmetric spaces,* Contemporary Mathematics, **212** (1998), 109-132

[HU2] U. Hagenbach, H. Upmeier, *Toeplitz C^*-algebras over non-convex cones and their facial representations,* in *Lie Theory and its Applications in Physics,* World Scientific, Singapore-New Jersey-London, 1996

[HU3] U. Hagenbach, H. Upmeier, *Jordan-Tripelsysteme und harmonische Analysis auf unbeschränkten pseudo-symmetrischen Gebieten,* Preprint, 1999

[H-C] Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie-Groups IV, V, VI,* Amer. J. Math. **77** (1955), 743-777, **78** (1956), 1-41, 564-628

[H1] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces,* Academic Press, New York, 1962

[H2] K.-H. Helwig, *Eine Verallgemeinerung der formal-reellen Jordan-Algebren,* Invent. Math **1** (1966), 18-35

[H3] K.-H. Helwig, *Über Mutationen von Jordan-Algebren,* Math. Zeitschr. **103**, 1968

[H4] K.-H. Helwig, *Halbeinfache reelle Jordan-Algebren,* Math. Z. **109** (1969), 1-28

[H5] K.-H. Helwig, *Involutionen von Jordan-Algebren,* Man. Math **1** (1969), 211-229

[HN] J. Hilgert, K.-H. Neeb, *Groupoid C^*-algebras of order compactified symmetric spaces,* Japan. J. Math. **21** (1) (1995), 117-188

[J] N. Jacobsen, *Structure and Representations of Jordan algebras,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **39**, Amer. Math. Soc., Providence, 1968

[K1] S. Kaneyuki, *Pseudo-Hermitian symmetric spaces and symmetric domains over non-degenerate cones,* Hokkaido Math. J. **20** (1991), 213-239

[K2] S. Kaneyuki, *The Sylvester's law of inertia in simple graded Lie algebras,* J. Math. Soc. Japan **50 (3)**, (1998), 593-614

[K3] Y. Katayama, *Takasaki's duality for a nondegenerate coaction,* Math. Scand. **55** (1985), 141-151

[K4] M. Koecher, *An Elementary Approach to Bounded Symmetric Domains,* Rice University, Houston, 1969

[LPRS] B. Landstad, J. Phillips, I. Raeburn, C. E. Sutherland, *Representations of crossed products by coactions and principal bundles,* Trans. AMS **299 (2)** (1987), 747-784

[L1] B. Landstad, *Duality for dual C^*-covariance algebras over compact groups,* Preprint

[L2] O. Loos, *Jordan Pairs,* Lecture Notes in Math. **460**, Springer Verlag, Heidelberg-New York, 1975

[L3] O. Loos, *Bounded Symmetric Domains and Jordan Pairs,* Univ. of California, Irvine, 1977

[M1] G.W. Mackey, *Induced representations of locally compact groups I,* Ann. of Math **55(2)** (1952), 101-139

[MN] H. Massam, E. Neher, *On transformations and determinants of Wishart variables on symmetric cones,* Journal of Theoretical Probability (to appear)

[M2] K. McCrimmon, *Jordan algebras and their applications,* Bull. Math. Soc. **84** (1978), 612-627

[M2] G.D. Mostow, *Selfadjoint groups,* Ann. of Math. **62** (1955), 44-55

[MR] P.S. Muhly, J.N. Renault, *C^*-algebras of multivariable Wiener-Hopf operators,* Trans. Amer. Math. Soc. **1** (1982), 1-44

[NT] Y. Nakagami, M. Takesaki, *Duality for crossed products of von Neumann algebras,* Lecture Notes in Math. **731**, Springer Verlag, Heidelberg-New York, 1979

[N1] E. Neher, *Cartan-Involutionen von halbeinfachen reellen Jordan-Tripelsystemen,* Math. Z. **169** (1979), 271-292

[N2] E. Neher, *Klassifikation der einfachen reellen speziellen Jordan-Tripelsysteme,* manuscripta math. **31** (1980), 197-215

[N3] E. Neher, *Klassifikation der einfachen reellen Ausnahme-Jordan-Tripelsysteme,* J. Reine Angew. Math. **322** (1981), 145-169

[N4] E. Neher, *An Expansion Formula for the Norm of a Jordan Algebra,* Arch. Math. **69** (1997), 105-111

[O] G.I. Olshanski, *Complex Lie semigroups, Hardy spaces and the Gelfand Gindikin program,* Diff. Geom. Appli. **1** (1991), 235-246

[S1] S. Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971

[SSU] N. Salinas, A. Sheu, H. Upmeier, *Toeplitz operators on pseudoconvex domains and foliation algebras,* Ann. Math **130** (1989), 531-565

[S2] I. Satake, *A formula in simple Jordan algebras,* Tohoku Math. Journ. **356** (1984), 611-622

[SS] M. Sato, T. Shintani, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces,* Ann. of Math. **100** (1974), 359-384

[S3] W. Schmid, *Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitesch symmetrischen Räumen,* Invent. math. **9** (1969), 61-80

[SW] E.M. Stein, D. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton University Press, Princeton, 1971

[S4] S. Strătilă, *Modular Theory in Operator Algebras,* Abacus Press, 1981

[T] M. E. Taylor, *Noncommutative Harmonic Analysis,* Math. Surveys and Monographs, **22**, Amer. Math. Soc., Providence, 1986

[U1] H. Upmeier, *Toeplitz operators on bounded symmetric domains,* Tran. Am. Math. Soc. **280** (1983), 221-237

[U2] H. Upmeier, *Symmetric Banach Manifolds and Jordan C^*-algebras,* North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984

[U3] H. Upmeier, *Toeplitz C^*-algebras on bounded symmetric domains,* Ann. Math. **119** (1984), 549-576

[U4] H. Upmeier, *Toeplitz operators on symmetric Siegel domains,* Math. Ann. **271** (1985), 401-414

[U5] H. Upmeier, *Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces,* Amer. J. Math. **108** (1986), 1-25

[U6] H. Upmeier, *Multivariable Toeplitz Operators and Index Theory,* Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996

[U7] H. Upmeier, *Toeplitz-Berezin quantization and non-commutative differential geometry,* Lin. Op. Banach Center Publ. **38** (1997), 385-400

[V] J.-M. Vallin, *C^*-algèbres de Hopf et C^*-algèbres de Kac,* Proc. London Math. Soc. **50** (1985), 131-174

[W1] N. R. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces,* Marcel Dekker, New York, 1973

[W2] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I,* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972

[Z] D. P. Želobenko, *Compact Lie Groups and their Representations,* Trans. Math. Monographs, **40**, Amer. Math. Soc., Providence, 1962

Symbolverzeichnis

Die folgende Liste enthält die wichtigsten der gewählten Bezeichnungen und Symbole. Einer kurzen Erklärung des jeweiligen Symbols folgt die Seitenzahl seines ersten Auftretens.

$\circ$	Verknüpfung von Abbildungen, 23
$\diamond$	Produkt in der Jordan-Algebra X, 11
$I \lhd \mathcal{B}$	I ist ein *-Ideal in der C*-Algebra $\mathcal{B}$, 122
$[T, T']$	Kommutator der Endomorphismen T und T', 16
A	maximale abelsche Untergruppe von G, 34
$A(iX)$	Fourier-Algebra von iX, 70
$Alt(r;\mathbb{D})$	Algebra der antisymmetrischen $(r \times r)$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{D}$, 21
$aut(X)$	Lie-Algebra der Gruppe der Jordan-Algebraautomorphismen von X, 19
$Aut(X)$	Gruppe der Jordan-Algebraautomorphismen von X, 19
α	Helwig-Involution von X, 20
$\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}'$	abgeschlossenes Tensorprodukt der C*-Algebren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, 106
$\mathcal{B} \otimes_\delta \mathcal{C}_0(S)$	Cokreuzprodukt bezüglich der Coaktion δ der lokal kompakten Gruppe S auf $\mathcal{B}$, 108
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen, 11
$C^*(iX)$	Gruppen C*-Algebra von iX, 69
$C^*_F(iX_F)$	C*-Algebra der durch die Facette F definierten Hardy-Faltungsoperatoren auf $L^2(iX_F)$, 138
$C^*_p(iX)$	C*-Algebra der durch den Kegel Λ_p definierten Hardy-Faltungsoperatoren auf $L^2(iX)$, 70
$\mathcal{C}_c(iX)$	Algebra der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf iX, 99
$\mathcal{C}_c^\infty(iX)$	Algebra der glatten Funktionen mit kompaktem Träger auf iX, 68

$\mathcal{C}_0(iX)$	Algebra der stetigen Funktionen auf iX, 67 die im Unendlichen verschwinden, 55
$\mathcal{C}_0^p(X^\#)$	C*-Algebra der durch den Kegel Λ_p definierten Hardy-Multiplikatoren auf $L^2(X^\#)$, 73
χ_F	charakteristische Funktion der Facette F, 137
χ_p	charakteristische Funktion des Kegels Λ_p, 64
$\chi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k$	charakteristische Funktion der allgemeinen Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, 87
d	Konkavitätsgrad, 44
$\mathbb{D}$	Divisionsalgebra, 35
det	Jordan-Determinante, 16
Det	Determinante linearer Endomorphismen, 17
$\mathcal{D}(X)$	Lie-Algebra, bestehend aus den Derivationen von X, 19
∂	Randoperator für Mengen, 84
e	Einselement der Jordan-Algebra X, 14
e_j	primitives idempotentes Element von X, enthalten im fest gewählten Jordan-Rahmen von X, 14
$End(X)$	Algebra der linearen Endomorphismen von X, 12
E_p	distributives Maß, bestimmt durch χ_p, 65
$E_{\tilde{r}\tilde{p}}^k$	distributives Maß, bestimmt durch $\chi_{\tilde{r}\tilde{p}}^k$, 87
$\mathcal{E}_x$	Signaturenmenge von x, 50
$E_{6(j)}$	Ausnahme Lie-Gruppe der Dimension 78 mit Index j, 55
$\mathbb{F}$	Menge aller Facetten von Ξ, 128
$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation, 62
$f^\#$	Fourier-Transformierte von f, 62
$\mathbb{F}_j$	Menge aller Facetten von Ξ mit Rang j, 128
$\mathbb{F}_j(F)$	Menge aller Facetten der Facette F mit Rang j, 143
$\mathcal{F}_{\tilde{r}}^k$	Fourier-Transformation relativ $kX_{\tilde{r}}$, 86
$F(\tilde{r},\tilde{p},k,s)$	Facette von Ξ, 128
$F_{4(j)}$	Ausnahme Lie-Gruppe der Dimension 52 mit Index j, 55
G	Einskomponente der Strukturgruppe von X, 18
$\mathfrak{G}$	Lie-Algebra von G und von der Strukturgruppe von X, 19
$GL(X)$	Gruppe der linearen Automorphismen von X, 18
γ^λ	adjungierte Abbildung von γ bezüglich λ, 18

M_x	Multiplikationsoperator auf X bezüglich x, 12
M_φ	Multiplikationsoperator auf $L^2(iX)$ mit Symbol φ, 67
M_{χ_p}	charakteristischer Multiplikator bezüglich Λ_p, 64
$M_{\chi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}}$	charakteristischer Multiplikator bezüglich $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, 87
$\mathcal{M}(\mathcal{B})$	Multiplikatorenalgebra der C*-Algebra $\mathcal{B}$, 105
$\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{B}\overline{\otimes}\mathcal{B}')$	eingeschränkte Multiplikatorenalgebra der C*-Algebren $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, 106
$\mathcal{M}(\delta)$	strikte Fortsetzung von δ, 107
N	unipotente Untergruppe von G, 34
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, $\{0, 1, 2, \ldots\}$, 11
ν_F	Darstellung der Fourier-Algebra bestimmt durch die Facette F, 138
$\nu^k_{\tilde{r}s}$	Darstellung der Fourier-Algebra bestimmt durch die allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, 114
$\mathbb{O}$	Divisionsalgebra der Oktaven, 35
$\mathbb{O}'$	nicht nullteilerfreie reelle Cayley-Algebra, 36
P	quadratische Darstellung von X, 18
$P_{j,\vec{e_{\tilde{r}}}}$	Peirce-j-Projektion bezüglich $\vec{e_{\tilde{r}}}$, 49
p_s	charakteristische Signaturzahl, 50
π_F	Darstellung der Hardy-Faltungsoperatoren bestimmt durch die Facette F, 138
$\Pi(F)$	Darstellung von $C^*_p(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX)$ bestimmt durch die Facette F, 138
$\pi^k_{\tilde{r}\tilde{p}}$	Darstellung der Hardy-Faltungsoperatoren bestimmt durch die allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, 99
$\Pi(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$	Darstellung von $C^*_p(iX)\otimes_{\delta_{iX}}\mathcal{C}_0(iX)$ bestimmt durch die allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, 117
$\Pi_{\mathcal{K}}(F)$	Darstellung der Hardy-Toeplitz Vervollständigung bestimmt durch die Facette F, 138
$\Pi_{\mathcal{K}}(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$	Darstellung der Hardy-Toeplitz Vervollständigung bestimmt durch die allgemeine Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, 123
$\Pi_{\mathcal{T}}(F)$	Darstellung der Hardy-Toeplitz C*-Algebra bestimmt durch die Facette F, 138
$\Pi_{\mathcal{T}}(\tilde{r}, \tilde{p}, k, s)$	Darstellung der Hardy-Toeplitz C*-Algebra bestimmt durch die allgemeinen Facette $k\Lambda_{\tilde{r}\tilde{p}}$, 126
(π, W)	covariantes Paar, 113
$\Pi(\pi, W)$	Darstellung des Cokreuzproduktes, induziert durch (π, W), 113

Index

Lebenslauf

Name		Udo Hagenbach
Geburtsdatum		31.03.1967
Geburtsort		Salmünster
Familienstand		ledig
Schulausbildung	1973-1977	Grundschule Kerbersdorf
	1977-1983	Henry-Harnischfeger-Gesamtschule Salmünster
	1983-1986	Ulrich-von-Hutten-Gymnasium Schlüchtern
	2.6.1986	Erlangung der Hochschulreife
Grundwehrdienst	1986-1987	In Mayen und Herborn
Studium	1988-1994	Mathematik mit Nebenfach Physik an der Philipps-Universität Marburg
Vordiplom	17.10.1990	Gesamturteil: sehr gut
Diplom	13.6.1994	Gesamturteil: mit Auszeichnung bestanden
Berufstätigkeit	1.5.-31.8.94	Wissenschaftliche Hilfskraft mit Abschluß am Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg
	Seit 15.9.94	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg