Unitäre Darstellungen von Schleifengruppen

U. Hagenbach

Einleitung

Eine Schleifengruppe LG ist eine Gruppe parametrisierter geschlossener Kurven in einer anderen Gruppe G, das heißt eine Gruppe von Abbildungen von der Kreislinie $\mathbb{S}^1$ nach G. Es gibt eine ganze Reihe unterschiedlicher Gründe, die dazu führten, diese Gruppen zu studieren.

Vom rein mathematischen Standpunkt aus betrachtet ist es sehr natürlich die Frage zu verfolgen, ob die sehr weit entwickelte Theorie endlichdimensionaler Lie-Gruppen ausgedehnt werden kann auf unendlichdimensionale Gruppen. So betrachtet sind die Abbildungsgruppen $M(X,G)$ von Abbildungen eines kompakten Raumes X in eine Lie-Gruppe G die wohl naheliegendsten Beispiele unendlichdimensionaler Lie-Gruppen, da sie sich durch Eigenschaften auszeichnen, die ihre Behandlung stark vereinfacht. So induziert die Exponentialabbildung $\exp : Lie(G) := \mathcal{G} \to G$ eine Exponentialabbildung von $M(X,\mathcal{G}) \to M(X,G)$, die lokal injektiv und surjektiv ist. Diese Eigenschaft ist für allgemeine unendlichdimensionale Lie-Gruppen meistens verletzt.

In der Physik, insbesondere in der Quantenfeldtheorie, treten Abbildungsgruppen, üblicherweise vom physikalischen Raum $X = \mathbb{R}^3$ ausgehend, in leicht veränderter Form als sogenannte *Gauge Groups* auf. Schleifengruppen spielen hierbei in vereinfachten Modellen eine Rolle, in denen der physikalische Raum eindimensional betrachtet wird; aber auch in der Stringtheorie der Elementarteilchen, in der die Teilchen durch eindimensional ausgedehnte Objekte dargestellt werden. So ist ein großer Teil der Theorie der Schleifengruppen durch Physiker entwickelt worden, was sich auch auf den Inhalt dieses Vortrages auswirkt: Im 3. Kapitel wird eine physikalisch motivierte Klasse von Darstellungen eingeführt, auf die sich die Konstruktionen der folgenden Abschnitte beschränken werden.

Die allgemeine Theorie für unendlichdimensionale Lie-Gruppen, selbst im Falle der Abbildungsgruppen $M(X,G)$, ist erstaunlich schlecht entwickelt; dies gilt insbesondere auch für die Darstellungstheorie. Der einzige inzwischen zufriedenstellend behandelte Fall ist der der Schleifengruppen, die sich sehr ähnlich wie kompakte Lie-Gruppen verhalten. So wird die Allgemeinheit der behandelten Gruppen auch in diesem Vortrag immer mehr eingeschränkt, bis schließlich im letzten Kapitel Darstellungen allein für das Beispiel der Schleifengruppe $L\mathbb{T}$ konstruiert werden. Dieses Beispielhafte ist kein Sonderfall, sondern eines der auffälligsten Merkmale der hier auszugsweise vorgestellten Theorie der unendlichdimensionalen Lie-Gruppen, wodurch die Schwierigkeiten, diese Objekte mathematisch zu behandeln, noch einmal dokumentiert werden.

1 Unendlichdimensionale Lie-Gruppen

Bevor unendlichdimensionale Lie-Gruppen diskutiert werden, sollte zunächst präzisiert werden, was mit einer unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeit gemeint ist. Wenn auch nur um zu klären, daß damit nichts mystisches verbunden ist. Analog dem endlichdimensionalen Fall muß man als erstes Abbildungen auf dem der Mannigfaltigkeit Ξ zugehörigen Reverenzraum studieren:

Definition 1.1 Sei E ein topologischer vollständiger und lokal konvexer Vektorraum, dann ist für eine offene Menge $V \subset E$ die Funktion $f : V \to E$ stetig differenzierbar, also ein Element von $\mathcal{C}^1(V)$, falls

1. $Df(u,v) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(u+tv) - f(u))$ für alle $u \in V,\ v \in E$ existiert und
2. $Df : V \times E \to E$ eine stetige Abbildung ist (linear in der zweiten Variablen).

f liegt in $\mathcal{C}^2(V)$, falls $D^2 f : V \times E \times E \to E$ stetig ist, wobei $D^2 f(u,v,w) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Df(u+tw,v) - Df(u,v))$. In gleicher Weise wird $\mathcal{C}^n(V)$ definiert für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. f liegt in $\mathcal{H}(V)$, dem Raum der *holomorphen* Funktionen auf V, falls $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ und die n-ten Ableitungen komplex-linear in den jeweils n letzten Variablen sind.

Hiermit kann nun die Differentiation für Funktionen auf der Mannigfaltigkeit Ξ in der gewohnten Weise erklärt werden:

Definition 1.2 Ein parakompakter (das heißt: Ξ ist separabel und jede offene Überdeckung hat eine lokal endliche Verfeinerung) topologischer Raum Ξ ist eine *unendlichdimensionale glatte Mannigfaltigkeit*, falls ein Atlas (V_α, ϕ_α) von Homöomorphismen

$$\phi_\alpha : V_\alpha \to E_\alpha \underset{offen}{\subset} E$$

existiert, dessen Kartenwechsel glatte Abbildungen

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(V_\alpha) \to \phi_\beta(V_\beta)$$

sind.

Differentialformen auf Ξ können in der üblichen Art und Weise definiert werden, zunächst als multilineare und alternierende Abbildungen (in den letzten p Variablen) auf

$$V \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p-mal}$$

für eine offene Menge V in E. Für eine sinnvolle Ausdehnung des Begriffs benötigt man für jede offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit eine untergeordnete glatte Partition der Eins. Dies ist gewährleistet, falls

1. auf demVektorraum E genügend glatte Funktionen definiert werden können, in dem Sinne, daß für jede offene Menge V in E ein nichttriviales glattes $f : \hat{U} \to \mathbb{R}$ existiert, welches außerhalb von V verschwindet, und

2. die Mannigfaltigkeit Lindelöf ist, das heißt jede offene Überdeckung hat eine abzählbare Verfeinerung.

Diese beiden Bedingungen werden für die folgenden Beispiele erfüllt sein.

Ebenfalls gibt es keine Probleme, glatte Vektorfelder zu definieren oder die Lie-Klammer für zwei Vektorfelder. Man beachte allerdings, daß Vektorfelder auf unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten keine Trajektorien mehr besitzen müssen.

Definition 1.3 Eine unendlichdimensionale glatte Mannigfaltigkeit Γ mit Gruppenstruktur $\circ$ ist eine *unendlichdimensionale Lie-Gruppe*, falls die Abbildungen

$$M : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma,\ (\gamma, \gamma') \mapsto \gamma \circ \gamma'$$

und

$$Inv : \Gamma \to \Gamma,\ \gamma \mapsto \gamma^{-1}$$

glatte Abbildungen sind.

Die Lie-Algebra $Lie(\Gamma) := T_e\Gamma$ besteht aus allen linksinvarianten Vektorfeldern auf Γ, ist also wohldefiniert. Jedes $\eta \in Lie(\Gamma)$ hat eine Darstellung als $\eta = \sum_i \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ in lokalen Koordinaten und für die Klammer gilt

$$[\xi, \eta] = \sum_i (\xi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_i}{x_i}) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.1}$$

als Differentialoperator der auf glatten Funktionen $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ wirkt. Die Exponentialabbildung ist wohldefiniert, falls für alle $\eta \in Lie(\Gamma)$ eine eindeutige Einparameter-Untergruppe γ_η von Γ existiert mit $\frac{d}{dt}\gamma_\eta(0) = \eta$. Dann ist $\exp(\eta) := \gamma_\eta(1)$. Die Exponentialabbildung existiert für alle bekannten und relevanten Beispiele.

Man beachte allerdings, daß es Lie-Algebren gibt, zu denen keine Lie-Gruppe existiert, und Lie-Gruppen, deren Exponentialabbildungen nicht mehr lokal bijektiv sind.

2 Abbildungsgruppen als unendlichdimensionale Lie-Gruppen

Die im Rahmen der Theorie unendlichdimensionaler Lie-Gruppen Γ am intensivsten behandelten Beispiele sind Gruppen von Abbildungen von einem kompakten topologischen Raum X in eine endlichdimensionale Lie-Gruppe G. Einfachstes und naheliegendstes Beispiel ist die Lie-Gruppe der stetigen Abbildungen von X nach G

$$M_{st}(X,G) := \{f : X \to G \mid \ f \text{ stetig}\} \tag{2.1}$$

oder, für den Fall, daß X glatt ist, der r-fach stetig differenzierbaren Abbildungen $M_r(X,G)$. Daß es sich hierbei tatsächlich um Lie-Gruppen handelt sieht man analog dem im folgenden ausführlicher behandelten Fall:

Definition 2.1

1. Für eine endlichdimensionale glatte Mannigfaltigkeit X und eine endlichdimensionale Lie-Gruppe G sei

$$MG := M(X,G) := \{f : X \to G \mid \ f \text{ glatt}\} \tag{2.2}$$

die *Gruppe der glatten Abbildungen* von X nach G.

2. Im Falle $X = \mathbb{S}^{\nVdash}$ heißt

$$LG := M(X,G) \tag{2.3}$$

die *Schleifengruppe* (Loop Group) von G.

Bemerkung 2.2 Mit der Verknüpfung

$$\circ : M(X,G) \times M(X,G) \to M(X,G);\ \ (f,\tilde{f}) :\mapsto f \circ_{M(X,G)} \tilde{f} : x \mapsto f(x) \cdot_G \tilde{f}(x)$$

ist M(X,G) eine Gruppe.

Beweis. Aufgrund der Gruppenstruktur von G bildet die Verknüpfung tatsächlich nach $M(X,G)$ ab und ist assoziativ. Das neutrale Element ist die konstante Abbildung $x \mapsto e$, wobei e das neutrale Element in G ist. Für die Inversen gilt $f^{-1}_{M(X,G)} : x \mapsto (f(x))^{-1}_G$.

□

Sei $\mathcal{G} = Lie(G)$, dann ist $E := M(X,\mathcal{G})$ ein topologischer lokalkonvexer Vektorraum, vollständig mit der Topologie der gleichförmigen Konvergenz von Funktionenfolgen und aller ihrer Ableitungen. Für eine genügend kleine offene Umgebung U von $e \in G$ ist $\hat{U} := \exp^{-1} U \subset \mathcal{G}$ offen um 0. Dann ist

$$\hat{\mathcal{U}} := M(X,\hat{U}) \subset M(X,\mathcal{G}) \tag{2.4}$$

eine offene Umgebung um die Nullabbildung in $M(X,\mathcal{G})$ in der oben definierten Topologie, da für alle $f \in \hat{\mathcal{U}}$ das Bild $f(X)$ eine kompakte Menge in $\hat{\mathcal{U}}$ ist. Die Topologie auf $M(X,G)$ soll die von

$$\{\gamma \circ \mathcal{U} \mid \ \gamma \in M(X,G),\ U \cong \hat{U} \subset_{offen} E\} \tag{2.5}$$

erzeugte Topologie sein. Jedes $\gamma \circ \mathcal{U}$ ist homöomorph zu $\hat{\mathcal{U}}$. Mit $M_\gamma : \gamma' \mapsto \gamma \circ \gamma'$ wird $(\gamma \circ \mathcal{U}, \exp^{-1} \circ M_\gamma)_{\gamma \in M(X,G)}$ zu einem glatten Atlas für die Mannigfaltigkeit $M(X,G)$. Die Kartenwechsel sind gegeben durch

$$\Phi_{\gamma\gamma'} : \hat{\mathcal{U}} \to \hat{\mathcal{U}};\ f \mapsto \exp^{-1} \circ((\gamma')^{-1} \cdot (\exp \circ f)). \tag{2.6}$$

Inversion und Multiplikation in $M(X,G)$ sind bezüglich des definierten Atlasses glatte Abbildungen und

$$\mathrm{Exp} : M(X,\mathcal{G}) \to M(X,G);\ f \mapsto \exp \circ f \tag{2.7}$$

ist die der Lie-Gruppe $M(X,G)$ zugehörige Exponentialabbildung, da für alle $f \in M(X,\mathcal{G})$ $\ \exp \circ t \cdot f$ in $M(X,G)$ liegt und es gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(\exp \circ(t \cdot f)\Big)\Big|_{t=0} = f \cdot \Big(\exp \circ(t \cdot f)\Big)\Big|_{t=0} = f. \tag{2.8}$$

Bemerkung 2.3
(1) Ist $G_\mathbb{C}$ die Komplexifizierung der Lie-Gruppe G, dann ist $M(X,G_\mathbb{C})$ die Komplexifizierung von $M(X,G)$.

(2) Ist G kompakt, so ist das Bild von Exp dicht in L_0G, der Eins-Komponente von LG.

(3) Für kompakte Gruppen G gilt allerdings nicht mehr, daß die Exponentialabbildung surjektiv nach $M_0(X,G)$ ist.

Zur letzten Bemerkung ein Gegenbeispiel:

Beispiel 2.4 Man betrachte LG, wobei $G = SU(2)$ die Gruppe der standardisierten unitären 2×2 Matrizen ist. G ist zusammenhängend, also ist auch LG zusammenhängend und $L_0G = LG$. Das Element

$$\gamma : z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{C}^* \backslash \{1\} \tag{2.9}$$

liegt aber in keiner Einparameter-Untergruppe von LG.

Beweis. Angenommen $\gamma = \mathrm{Exp}(f)$ mit $f \in L\mathcal{G}$, dann würde γ mit f kommutieren, also wäre f diagonal. Aber es gibt keine glatte Funktion $\Theta : \mathbb{S}^{\not{1}} \to \mathbb{R}$, so daß $\exp(i\Theta) = z$.

□

Man beachte, daß dieses Beispiel völlig analog zu dem Gegenbeispiel für die Nicht-surjektivität der Exponentialfunktion für endlichdimensionale nichtkompakte Lie-Gruppen ist. Das Element

$$g := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \tag{2.10}$$

liegt in keiner einparameter Untergruppe von $SL_2(\mathbb{R})$.

3 Physikalische Darstellungstheorie für Schleifengruppen

Die Darstellungstheorie für Abbildungsgruppen ist bisher nur für spezielle Beispiele, beziehungsweise spezielle Klassen von Beispielen, entwickelt. Die wichtigste dieser Klassen mit der am meisten fortgeschrittenen Theorie bilden die Schleifengruppen LG. Da deren Elemente, die Loops, wiederum konkreten physikalischen Objekten entsprechen, wurde ihre Darstellungstheorie zunächst von Physikern entwickelt. So gibt es eine Reihe physikalisch motivierter Bedingungen die eine Darstellung einer Schleifengruppe erfüllen soll. Diese Bedingungen werden in diesem Kapitel eingeführt.

Üblicherweise betrachtet man in der allgemeinen Darstellungstheorie folgendes:

Definition 3.1 Eine irreduzible, unitäre Darstellung einer Lie-Gruppe G auf einem Hilbertraum H ist eine Abbildung Π von G in die unitäre Gruppe $U(H)$ die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Π ist ein Homomorphismus,
2. die Abbildung $G \times H \to H;\ (g, \xi) \mapsto \Pi(g)(\xi)$ ist stetig,
3. H und $\{0\}$ sind die einzigen G-invarianten Unterräume von H (*Irreduzibilität*).

Physikalisch interessant sind nicht die Elemente von LG, sondern unparametrisierte Loops, die sich allerdings mathematisch nur schwer behandeln lassen. Deshalb studiert man Darstellungen von LG, die in einem gewissen Sinne unabhängig von der Parametrisierung sind, sogenannte symmetrische Darstellungen:

Definition 3.2 Sei $R \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1) := \{\tilde{R} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \mid \tilde{R} \text{ diffeomorph}\}$ eine Umparametriesierung der Kreislinie und Π eine unitäre Darstellung von LG, dann ist

$$R^*\Pi : LG \to U(H);\ \gamma \mapsto \Pi(\gamma \circ R) \tag{3.1}$$

ebenfalls eine unitäre Darstellung. Die Darstellung Π heißt *symmetrisch* bezüglich einer transitiven Untergruppe von $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$, falls $\Pi \cong R^*\Pi$ für alle R aus dieser Untergruppe, das heißt, falls für alle solche $R^*\Pi$ eine Isometrie $\Phi_R \in GL(H)$ existiert mit $\Phi_R \circ \Pi = R^*\Pi \circ \Phi_R$.

Die Existenz symmetrischer Darstellungen bezüglich ganz $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ für Abbildungsgruppen $M(X,G)$ mit $\dim X > 1$ ist völlig unklar, jedenfalls ist bis heute kein Beispiel bekannt.

Als nächstes soll mathematisch erfaßt werden, daß sich das Interesse der Physiker im wesentlichen nur auf Zustände positiver Energie richtet. Auch dies soll sich in den gesuchten Darstellungen wiederspiegeln:

Definition 3.3 Eine Operation der Kreisgruppe $\mathbb{T}$ auf dem Hilbertraum H *intertwinned* mit der Darstellung Π, falls für alle $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ ein Operator (der *Intertwinnungs-Operator*) r_θ auf H existiert mit

$$r_\theta \circ \Pi(\gamma) \circ (r_\theta)^{-1} = \Pi(\gamma \circ R_\theta). \tag{3.2}$$

Hierbei sei $R_\theta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ die Rotation um den Winkel θ.

Definition 3.4 Eine Darstellung Π von LG auf H ist eine Darstellung *positiver Energie*, falls eine mit der Darstellung intertwinnende Operation existiert, so daß jedes r_θ dargestellt werden kann durch $\exp(iA\theta)$, wobei A ein Operator auf H ist mit positivem Spektrum.

Bemerkung 3.5

(1) Eine Darstellung ist genau dann von positiver Energie, falls die Eigenräume

$$H(q) := \{\xi \in H \mid \; r_\theta(\xi) = e^{-iq\theta} \cdot \xi\} \tag{3.3}$$

der Operation von T auf H trivial sind für alle $q < 0$ [PS, Kapitel 9.2]. Hierbei wird q als Energie interpretiert.

(2) Aus den Definitionen folgt sofort, daß eine mit $\mathbb{T}$ im Sinne von Definition 3.3 intertwinnende Darstellung symmetrisch ist bezüglich der (transitiven) Gruppe der Rotationen. Die nach Definition 3.2 geforderte Isometrie ist durch den Intertwinnungsoperator r_θ gegeben. Im später diskutierten Beispiel $L\mathbb{T}$ wird aufgrund der speziellen Gestalt des Hilbertraumes H die Operation von $\mathbb{T}$ auf H eine Art Fortsetzung sein derer von R_θ auf $L\mathbb{T}$ als Element von $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$.

Der physikalischen Situation angemessen sind ferner Darstellungen nicht der Gruppe LG selbst, sondern derer *zentralen Erweiterung* $\tilde{L}G$. Diese ist (nicht eindeutig) dadurch bestimmt, daß die Gruppe

$$\mathbb{T} \hookrightarrow \tilde{L}G$$

zentral eingebettet sein soll, so daß

$$\tilde{L}G/\mathbb{T} \cong LG. \tag{3.4}$$

Topologisch ist $\tilde{L}G$ ein im Allgemeinen nicht triviales Faserbündel (mit Ausnahme $\tilde{L}G = LG \times \mathbb{T}$) über LG mit Faser $\mathbb{T}$. In diesem Fall ist $\tilde{L}G$ nicht homöomorph zu $LG \times \mathbb{T}$ und es existiert keine stetige Cross-Section $LG \to \tilde{L}G$. Alle zentralen Erweiterungen sind eindeutig bestimmt durch ihren topologischen Typ als Faserbündel, und jedes Faserbündel mit Faser $\mathbb{T}$ kann zu einer zentralen Erweiterung gemacht werden. Wichtig ist, daß für die Gruppen $LU(n)$ immer eine zentrale Erweiterung existiert [PS, Kapitel 4.1, Proposition 4.7.1]. Die Darstellungen von $\tilde{L}G$ stehen in engem Zusammenhang mit den sogenannten „projektiven“ Darstellungen von LG.

Definition 3.6 Eine *projektive* , irreduzible, unitäre Darstellung einer Lie-Gruppe G auf einem Hilbertraum H ist eine Abbildung Π von G in die unitäre Gruppe $U(H)$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Es existiert eine Abbildung $c : LG \times LG \to \mathbb{T}$, so daß für alle $\gamma, \gamma' \in LG$ gilt:

$$\Pi(\gamma)\Pi(\gamma') = c(\gamma, \gamma')\Pi(\gamma \circ \gamma'),$$

2. die Abbildung $G \times H \to H;\ (g, h) \mapsto \Pi(g)(h)$ ist stetig,

3. H und $\{0\}$ sind die einzigen G-invarianten Unterräume von H (Irreduzibilität).

Die Abbildung c heißt *projektive Multiplizität* beziehungsweise der *Kozykel* der Darstellung.

Jeder Kozykel c definiert eine zentrale Erweiterung $\tilde{L}G$ mittels

$$(\lambda, \gamma) \circ_{\tilde{L}G} (\lambda', \gamma') := (\lambda\lambda' \cdot c(\gamma, \gamma'), \gamma \circ \gamma'), \tag{3.5}$$

mit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{T}$ und $\gamma, \gamma' \in LG$. Die Gruppeneigenschaften lassen sich direkt verifizieren, klar ist, daß es sich um eine zentrale Einbettung des Torus handelt. Umgekehrt entspricht jede projektive Darstellung von LG einer bestimmten Darstellung von $\tilde{L}G$ [PS, Kapitel 4.1].

Nun sind alle notwendigen Eigenschaften physikalisch sinnvoller Darstellungen definiert. Zusammengefaßt zu:

Definition 3.7 Eine *physikalische* Darstellung von LG ist eine irreduzible unitäre projektive Darstellung positiver Energie, symmetrisch bezüglich der Gruppe der Rotationen.

4 Eine zentrale Erweiterung von $L\mathbb{T}$

Die Überlegungen des letzten Abschnitts konkretisieren sich nun am Beispiel $G = \mathbb{T}$, für welches in diesem Kapitel explizit ein Kozykel konstruiert wird, der für die später konstuierten Darstellungen eine entscheidende Rolle spielen wird. $\mathcal{T}$ bezeichne die Lie-Algebra von $\mathbb{T}$, dann existiert folgende Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} M(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \cong L\mathcal{T} = L(i\mathbb{R}) \xrightarrow{\beta} L\mathbb{T} \xrightarrow{\omega} \mathbb{Z} \to 0 \tag{4.1}$$

mit den Abbildungen $\alpha : k \mapsto (e^{i\theta} \mapsto 2\pi k)$, $\beta : f \mapsto e^{if}$ und $\omega : \gamma \mapsto \omega(\gamma)$, die Umlaufzahl von γ. Die Sequenz ist exakt:

1. α ist klar injektiv.
2. $\beta(f) = e^{if} = 1 \in L\mathbb{T}$ genau dann, wenn $e^{if(x)} = 1$, wenn also $f(x) \in 2\pi\mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da f glatt ist bedeutet dies, daß $f = 2k\pi$ für ein festes $k \in \mathbb{Z}$.
3. $\omega(\gamma) = 0$ für alle gelifteten Abbildungen $f \in L(i\mathcal{T})$, umgekehrt existiert für jeden Loop mit Umlaufzahl 0 ein Lift.
4. Da $e^{i\theta} \mapsto e^{ik\theta} \in L\mathbb{T}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist ω surjektiv.

Hieran sieht man auch gleich, daß $L\mathbb{T}$ nicht zusammenhängend ist. Die Zusammenhangskomponenten sind indiziert durch die Umlaufzahl ω, da für jeweils zwei Kurven mit gleicher Umlaufzahl eine Homotopie existiert (vergleiche Funktionentheorie).

Man betrachte nun

$$F := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ \Delta_f(\theta) := \frac{1}{2\pi}(f(\theta + 2\pi) - f(\theta)) \text{ ist konstant}\} \tag{4.2}$$

als einen Untervektorraum glatter Funktionen in $M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und hierin

$$F_{\mathbb{Z}} := \{f \in F \mid \ \Delta_f \in \mathbb{Z}\} \subset F \tag{4.3}$$

als eine Untergruppe von F. Jedes Element von $L\mathbb{T}$ kann geschrieben werden als e^{if} mit $f \in F_{\mathbb{Z}}$, da für $\Delta_f \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $e^{if} : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ auf den Quotienten $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$ durchfaktorisiert. Dann gilt

$$\Delta_f = \omega(e^{if}). \tag{4.4}$$

Lemma 4.1 *Die Abbildung $S : F \times F \to \mathbb{R}$ mit*

$$S(f, g) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f'(\theta)g(\theta) - f(\theta)g'(\theta)d\theta + \frac{1}{4\pi}(f(2\pi)g(0) - f(0)g(2\pi)) \tag{4.5}$$

ist eine alternierende Bilinearform auf F mit

$$S(f, 1) = \Delta_f = \omega(e^{if}). \tag{4.6}$$

Beweis. Aufgrund der antisymmetrischen Definition in f und g ist die leicht als linear zu erkennende Form alternierend. Da $\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)d\theta + \frac{1}{4\pi}(f(2\pi) - f(0)) = \frac{1}{2\pi}(f(2\pi) - f(0))$ folgt mit $\theta := 0$ auch die dritte Behauptung.

□

Korollar 4.2 *Mit*

$$c : L\mathbb{T} \times L\mathbb{T} \to \mathbb{T};\ (e^{if}, e^{ig}) \mapsto e^{-iS(f,g)} \tag{4.7}$$

wird ein Kozykel definiert.

Beweis. Da $e^{if} = e^{i\tilde{f}}$ nur falls $f = \tilde{f} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ folgt

$$c(e^{if}, e^{ig}) = c(e^{i\tilde{f}}, e^{ig}) \cdot e^{-iS(2k\pi,g)}.$$

Mit (4.4) ergibt sich $S(2k\pi, g) = 2k\pi \cdot \omega(e^{ig}) \in 2k\pi\mathbb{Z}$. Damit ist der Kozykel unabhängig von der Wahl des Repräsentanten e^{if} des Loops γ, also wohldefiniert.

□

Gemäß (3.5) definiert dieser Kozykel eine zentrale Erweiterung $\tilde{L}\mathbb{T}$ von $L\mathbb{T}$, für die im nächsten Kapitel alle physikalischen Darstellungen nach Definition 3.7 konstruiert werden.

5 Physikalische Darstellungen von $L\mathbb{T}$

Die Konstruktion der physikalischen Darstellungen von $L\mathbb{T}$ verläuft in mehreren Schritten über die Konstruktion von Darstellungen einfacherer Gruppen. Hierfür sei $L_0\mathbb{T}$ die Zusammenhangskomponente von $L\mathbb{T}$, die das neutrale Element enthält. Darin eingebettet liegen die konstanten Loops $\mathbb{T} \hookrightarrow L_0\mathbb{T}$. Da $\omega(\gamma) = 0$ für alle $\gamma \in L_0\mathbb{T}$, gilt

$$\beta(M(\mathbb{S}^{\not{k}}, \mathbb{R})) = e^{iM(\mathbb{S}^{\not{k}},\mathbb{R})} = L_0\mathbb{T} \tag{5.1}$$

und somit

$$L_0\mathbb{T}/\mathbb{T} = e^{iV}, \tag{5.2}$$

mit $V := M(\mathbb{S}^{\not{k}}, \mathbb{R})/\mathbb{R} = L(i\mathcal{T})/i\mathcal{T}$.

Die alternierende Bilinearform S aus Gleichung 4.5 induziert eine Bilinearform auf $V \times V$, da $S(f, \kappa) = \omega(e^{if}) = 0$ für alle $f \in M(\mathbb{S}^{\not{k}}, \mathbb{R})$ und $\kappa \in \mathbb{R}$. Um eine projektive unitäre Darstellung von $L_0\mathbb{T}/\mathbb{T}$ auf einem Hilbertraum H_0 zu konstruieren, muß man eine lineare Abbildung A von V in die Operatoren auf H_0 finden, so daß

$$[A(f), A(g)] = 2iS(f, g) \tag{5.3}$$

(in einem gewissen Sinne also eine Darstellung der V und S zugehörigen Kommutatorrelation). Dann wird das Gruppenelement e^{if} von $L_0\mathbb{T}/\mathbb{T}$ dargestellt durch $e^{iA(f)}$. Dies faßt man dann als Darstellung von $L_0\mathbb{T}$ auf, die wiederum eine Darstellung auf $L\mathbb{T} \cong \mathbb{Z} \times L_0\mathbb{T}$ induziert. Der Hilbertraum wird im vorliegenden Beispiel der klassische Fockraum sein.

5.1 Positive Polarisierung von V

Die *komplexe Polariserung* eines Vektorraumes V' ist eine Zerlegung $V'_{\mathbb{C}} = W \oplus \bar{W}$ der Komplexifizierung $V'_{\mathbb{C}}$ von V', so daß die Einschränkung von S auf W und $\bar{W}$ trivial wird. Dann definiert

$$\langle , \rangle : (w_1, w_1) \mapsto 2iS(\bar{w}_1, w_2) \tag{5.4}$$

eine hermitische Form auf $W \times W$. Im Falle, daß diese Form positiv ist, wird W mit diesem Skalarprodukt zu einem Prae-Hilbertraum und heißt *positive Polarisierung.*

Im Fall $V = M(\mathbb{S}^{1\!\!\!/}, \mathbb{R})/\mathbb{R}$ existiert eine sehr kanonische positive Polarisierung von

$$V_{\mathbb{C}} = M(\mathbb{S}^{1\!\!\!/}, \mathbb{C})/\mathbb{C} = L\mathcal{T}_{\mathbb{C}}/\mathbb{C} \tag{5.5}$$

mit

$$W := \{f \in V_{\mathbb{C}} \mid \exists \tilde{f} : \mathbf{D} \to \mathbb{C} \text{ diffbar, so daß } \tilde{f}\,|_{\mathbb{S}^{1\!\!\!/}} = f\}/\mathbb{C}. \tag{5.6}$$

Aus der Cauchy'schen Integralformel folgt sofort $S(f, g) = 0$ für alle $f,\ g \in W$ und

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \frac{2i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f'(\theta)} g(\theta) - g'(\theta)\overline{f(\theta)} d\theta \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-1) \sum_{n\geq 1} n\bar{a}_n \frac{1}{z^{n+1}} \sum_{n\geq 1} b_n z^n - \sum_{n\geq 1} n b_n z^{n-1} \sum_{n\geq 1} \bar{a}_n \frac{1}{z} \\
&= -\frac{2\pi i^2}{2\pi} \sum_{n\geq 1} 2n\bar{a}_n b_n \\
&= 2 \sum_{n\geq 1} n\bar{a}_n b_n
\end{aligned}$$

zeigt die Positivität von $\langle , \rangle$ für $f = \sum_{n\geq 1} a_n (id)^n$ und $g = \sum_{n\geq 1} b_n (id)^n$.

5.2 Fockraumvervollständigung der Symmetrischen Algebra von W

Der Darstelungsraum wird eine geeignete Vervollständigung der *Symmetrischen Algebra* von W bezüglich eines von der Form $\langle , \rangle$ induzierten Skalarproduktes sein. Die Symmetrische Algebra von W ist definiert als

$$S(W) := \sum_{k\geq 0}^{\oplus} S_k(W), \tag{5.7}$$

wobei $S_k(W)$ aus allen symmetrischen Produkten $w_1 \vee \ldots \vee w_k$ mit Elementen aus W besteht. Es gilt

$$S_k(W) = \underbrace{W \times \ldots \times W}_{k-mal} / \sim, \tag{5.8}$$

mit $w_1 \times \ldots \times w_k \sim v_1 \times \ldots \times v_k$ falls $\{w_1, \ldots, w_k\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Das Skalarprodukt auf W läßt sich nun zu einem Skalarprodukt auf $S(W)$ ausdehnen:

Lemma 5.1 *Mittels*

$$\langle w_1 \vee \ldots \vee w_k, v_1 \vee \ldots \vee v_k \rangle := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \langle w_1, v_{\sigma(1)} \rangle \cdot \ldots \cdot \langle w_k, v_{\sigma(k)} \rangle \tag{5.9}$$

wird ein Skalarprodukt auf $S(W)$ definiert.

Beweis. Die Unabhängigkeit vom Repräsentanten ergibt sich aufgrund der Summation über die Symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_k$. Als Problem bleibt die Positivität, welche in [RS][Seite 53 ff] gezeigt wird.

□

Die durch dieses Skalarprodukt eindeutig definierte Hilbertraumvervollständigung $\hat{S}(W) =: H_0$ von $S(W)$ heißt *Fockraum* .

5.3 Elementare Operatoren in H_0

Für alle $w \in W$ existieren auf $S(W)$ die *elementaren Operatoren*

$$A(w) : S_k(W) \to S_{k+1}(W);\ w_1 \vee \ldots \vee w_k \mapsto w_1 \vee \ldots \vee w_k \vee w, \tag{5.10}$$

als Multiplikationsoperator und die Derivation

$$A(\bar{w}) : S_{k+1}(W) \to S_k(W), \tag{5.11}$$

die über die Bedingung

$$A(\bar{w})(w_1) := \langle w, w_1 \rangle \tag{5.12}$$

eindeutig bestimmt ist. Physikalisch entsprechen die Operatoren $A(w)$ und $A(\bar{w})$ den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, da aus der Intertwinnungsbedingung aus Definition 3.3 zusammen mit Bemerkung 3.5.1 folgt, daß $A(w)$ die Energie q erhöht, hingegen $A(\bar{w})$ diese senkt.

Für ein beliebiges $f \in V$ existiert aufgrund der komplexen Polarisierung von $V_{\mathbb{C}}$ eine eindeutige Zerlegung $f = f_+ \oplus f_- \in W \oplus \bar{W}$ und damit eine Abildung

$$A : V \to Op(S(W));\ f \mapsto A(f) := A(f_+) + A(f_-). \tag{5.13}$$

Diese Abbildung stellt die Kommutatorrelationen in V (5.3) in der geforderten Weise dar:

Lemma 5.2 *Für alle $f, g \in V$ gilt:*

$$[A(f), A(g)] = 2iS(f, g).$$

Beweis. Aufgrund der symmetrischen Definition des Produktes in $S(W)$ folgt sofort $[A(f_+), A(g_+)] = 0$. Seien $w_1, \dots w_k \in W$ beliebig und $f_- =: \bar{w},\ g_- =: \bar{v}$, dann gilt

$$\begin{aligned} A(f_-)A(g_-)(w_1 \vee \ldots \vee w_k) &= A(\bar{w}) \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_k)_{\hat{j}} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \langle w, w_i \rangle \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_k)_{\hat{i}\hat{j}} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle \langle w, w_i \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_k)_{\hat{i}\hat{j}} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle \sum_{i=1}^{k-1} \langle w, w_i \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_k)_{\hat{j}\hat{i}} \\ &= A(\bar{v})A(\bar{w})(w_1 \vee \ldots \vee w_k) \\ &= A(g_-)A(f_-)(w_1 \vee \ldots \vee w_k), \end{aligned}$$

wobei $\hat{i}$ bedeutet, daß dieser Index weggelassen wird. Seien $w_1, \dots, w_{k+1}, v \in W$ beliebig, dann ergibt sich für „gemischte" Terme:

$$\begin{aligned} &[A(\bar{v})A(w_{k+1})](w_1 \vee \ldots \vee w_k) \\ &= A(\bar{v})(w_1 \vee \ldots \vee w_k \vee w_{k+1}) - A(w_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_k)_{\hat{i}} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \langle v, w_i \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_{k+1})_{\hat{i}} - \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_k \vee w_{k+1})_{\hat{i}} \\ &= \langle v, w_{k+1} \rangle (w_1 \vee \ldots \vee w_k) \\ &= 2iS(\bar{v}, w_{k+1}). \end{aligned}$$

Faßt man alle Ergebnisse zusammen, so folgt die Behauptung.

□

Damit die angestrebte Darstellung $e^{iA(f)}$ unitär wird, muß $A(f)$ selbstadjungiert sein. Für die Adjungierten der elementaren Operatoren $A(w), A(\bar{w})$ gilt:

Praeposition 5.3

$$A(w)^* = A(\bar{w}) \textit{ für alle } w \in W.$$

Beweis. Seien $w_1 \vee \ldots \vee w_k,\ \ v_1 \vee \ldots \vee v_k$ beliebige Elemente in $S_k(W)$ und $w_{k+1}, v_{k+1} \in W$, dann folgt

$$\langle A(w_{k+1})(w_1 \vee \ldots \vee w_k), v_1 \vee \ldots \vee v_k \vee v_{k+1} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle w_1 \vee \ldots \vee w_k \vee w_{k+1},\ v_1 \vee \ldots \vee v_k \vee v_{k+1}\rangle \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1}} \langle w_1, v_{\sigma(1)}\rangle \cdot \ldots \cdot \langle w_{k+1}, v_{\sigma(k+1)}\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle w_{k+1}, v_j\rangle \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} (\langle w_1, v_{\sigma(1)}\rangle \cdot \ldots \cdot \langle w_{k+1}, v_{\sigma(k+1)}\rangle)_{\hat{j}} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \langle w_{k+1}, v_j\rangle \langle w_1 \vee \ldots \vee w_k,\ (v_1 \vee \ldots \vee v_k \vee v_{k+1})_{\hat{j}}\rangle \\
&= \langle w_1 \vee \ldots \vee w_k, A(\bar{w}_{k+1})(v_1 \vee \ldots \vee v_k \vee v_{k+1})\rangle,
\end{aligned}
$$

was die Behauptung beweißt.

□

Damit ist auch bewiesen, daß die Operatoren $A(f)$ selbstadjungiert sind für alle $f \in V$, da aufgrund der komplexen Polarisierung von V für relle Funktionen $f_- = \bar{f}_+$.

5.4 Darstellung von $L_0\mathbb{T}/\mathbb{T}$

Faßt man $A(f)$ als unbeschränkten Operator **in** $\hat{S}(W) = H_0$ auf, so gelten folgende Abschätzungen:

$$
\begin{aligned}
\|A(w)\xi\| &\leq \sqrt{k+1}\,\|w\|\,\|\xi\| \\
\|A(\bar{w})\xi\| &\leq \sqrt{k}\,\|w\|\,\|\xi\|,
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

für alle $w \in W$ und $\xi \in S_k(W)$. Mit $\|f\| := \|f_+\|,\ f \in V$ und $\xi \in \sum_{i=0}^{k} S_k(W)$ folgt

$$\|A(f)\xi\| \leq 2\sqrt{k+1}\,\|f\|\,||\xi||. \tag{5.15}$$

Für alle $\xi \in S(W)$ existiert also $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(iA(f))^k(\xi)$ in der Vervollständigung H_0 von $S(W)$ und die Abbildung

$$e^{iA(f)} : S(W) \to H_0 \tag{5.16}$$

ist wohldefiniert.

Lemma 5.4 *Für alle $f \in V$ existiert eine unitäre Fortsetzung von $e^{iA(f)}$ auf H_0.*

Beweis. Für beliebige $\xi, \eta \in H_0$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\langle e^{iA(f)}\xi, e^{iA(f)}\eta\rangle &= \sum_{k,m\geq 0} \langle \xi, \frac{(-iA(f))^k}{k!}\frac{(iA(f))^m}{m!}\eta\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k+m=n} \langle \xi, \frac{(-1)^k}{k!m!}(-1)^n A(f)^n \eta\rangle
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n\geq 0}\langle \xi, (-1)^n A(f)^n \eta\rangle \sum_{k+m=n} \frac{(-1)^k}{k!m!} \\ &= \sum_{n\geq 0}\langle \xi, (-1)^n A(f)^n \eta\rangle \cdot (1-1)^n \\ &= \langle \xi, \eta\rangle, \end{aligned}$$

also ist $e^{iA(f)}$ unitär auf $S(W)$, insbesondere stetig. Aufgrund der Dichtheit existiert eine eindeutige und wohldefinierte Fortsetzung

$$e^{iA(f)} : H_0 \to H_0, \tag{5.17}$$

die ebenfalls unitär ist.

□

Kommutieren zwei Operatoren P und Q mit ihrem gemeinsamen Kommutator $[P,Q]$ so gilt

$$e^P e^Q = e^{\frac{1}{2}[P,Q]} e^{P+Q}. \tag{5.18}$$

Da $[A(f), A(g)] = 2iS(f,g) \in \mathbb{C}$ ist diese Regel anwendbar. Es gilt

$$e^{-iS(f,g)} e^{iA(f)} e^{iA(g)} = e^{iA(f+g)} \text{ für alle } f,g \in V, \tag{5.19}$$

und der folgende Satz ist bewiesen:

Satz 5.5

$$\Pi_0 : e^{iV} = L_0\mathbb{T}/\mathbb{T} \to U(H_0);\ \ e^{if} \mapsto e^{iA(f)}$$

ist eine unitäre projektive Darstellung von $L_0\mathbb{T}/\mathbb{T}$ auf dem Fockraum H_0.

5.5 Darstellung von $L_0\mathbb{T}$

Wählt man $\{f \in V \mid \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0\}$ als vollständiges und eindeutiges ($[f] = [g]$ in $V \Leftrightarrow \int_0^{2\pi}(f-g)(\theta)d\theta = c_0 \cdot 2\pi$) Repräsentantensystem für V und identifiziert anschließend V mit diesem, so erhält man die Einbettung

$$e^{iV} \cong \{e^{if} \mid \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0\} \hookrightarrow L_0\mathbb{T}, \tag{5.20}$$

und damit

$$e^{iV} \times \mathbb{T} \cong L_0\mathbb{T} \tag{5.21}$$

mittels

$$(e^{if}, \lambda) \mapsto \lambda \cdot e^{if}. \tag{5.22}$$

Dies führt zu folgendem Satz:

Satz 5.6 *Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $H_k := H_0$. Dann ist*

$$\Pi_k : e^{iV} \times \mathbb{T} = L_0\mathbb{T} \to U(H_k);\ \gamma_0 = (\lambda \cdot e^{if}) \mapsto \lambda^k \cdot e^{iA(f)}$$

eine unitäre projektive Darstellung von $L_0\mathbb{T}$ auf dem Fockraum H_k.

Beweis. Da für $\lambda \in \mathbb{T}$ der Operator $\lambda^k \cdot O$ unitär bleibt, falls O schon unitär war, ist lediglich die Projektivität der Darstellung zu zeigen. Der Kozykel c ist nach Korollar 4.2 unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $(\lambda \cdot e^{if})$ von $\gamma_0 \in L_0\mathbb{T}$. So ergibt sich für $\gamma_0 = (\lambda \cdot e^{if}),\ \gamma_0' = (\lambda' \cdot e^{ig}) \in L_0\mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}
\Pi_k(\gamma_0\gamma_0') &= \Pi_k(\lambda\lambda' \cdot e^{if+ig}) \\
&= (\lambda\lambda')^k \cdot e^{iA(f+g)} \\
&= \lambda^k \cdot e^{iA(f)}\lambda' \cdot e^{iA(g)} \cdot e^{-iS(f,g)} \\
&= c(\gamma_0, \gamma_0')\, \Pi_k(\gamma_0)\, \Pi_k(\gamma_0'),
\end{aligned}$$

was den Satz beweißt.

□

5.6 Darstellung von $L\mathbb{T}$

Die Darstellungen Π_k von $L_0\mathbb{T}$ setzt man nun zu einer Darstellung der Schleifengruppe $L\mathbb{T}$ zusammen, indem man die mittels

$$\mathbb{Z} \times L_0\mathbb{T} \to L\mathbb{T};\ (n, \gamma_0) \mapsto (\theta \mapsto e^{in\theta}) \cdot \gamma_0 \tag{5.23}$$

gegebene Isomorphie ausnutzt. Da eine Darstellung von $L\mathbb{T}$ eindeutig definiert ist durch ihr Wirken auf $\mathbb{Z}$ und $L_0\mathbb{T}$, definiert

$$\Pi : L\mathbb{T} \to U\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\oplus} H_{2k}\Big);\ (n, \gamma_0) \mapsto O_n \circ \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\oplus} \Pi_k(\gamma_0) \tag{5.24}$$

eine Darstellung von $L\mathbb{T}$ auf $H := \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\oplus} H_{2k}$, wobei die Operatoren $O_n : H_{2k} \to H_{2(k+n)}$ als identische Abbildungen wirken ($2n$-Shift).

Bemerkung 5.7 Mit $L\mathbb{T} \cong \mathbb{Z} \times L_0\mathbb{T}/\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ und $H = (H_0 \otimes l^2(\mathbb{Z}))$ ergibt sich

$$(n, e^{if}, \lambda) \mapsto \Pi(n, e^{if}, \lambda), \tag{5.25}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Pi(n, e^{if}, \lambda)(\xi)(k+n) &= \lambda^{2k} \cdot e^{iA(f)}(\xi(k)) \\
&= P_n((\lambda^{2l})_{l\in\mathbb{Z}} \cdot (e^{iA(f)} \circ \xi))(k+n),
\end{aligned}$$

also
$$\Pi(n, e^{if}, \lambda)(\phi \otimes \xi) = P_n((\lambda^{2l})_{l\in\mathbb{Z}} \cdot (e^{iA(f)} \circ \xi)), \tag{5.26}$$
wobei P_n den n-Shift auf $l^2(\mathbb{Z})$ bezeichnet und $\xi \in H_0 \otimes l^2(\mathbb{Z})$ als Abbildung $\xi : \mathbb{Z} \to H_0$ aufgefaßt wird, so daß $\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||\xi(k)||_2^2 < \infty$.

Die Darstellung Π soll sich später als eine Standarddarstellung erweisen, also muss noch eine Operation der Kreisgruppe $\mathbb{T}$ auf dem Hilbertraum H gefunden werden, die mit Π intertwinned. Da $R_\theta \in \mathrm{Diff}(\mathbb{S}^{\not{k}})$, existiert auf dem Raum W die stetige Operation
$$\mathbb{T} \times W \to W;\ (e^{i\theta}, f) \mapsto f \circ R_\theta =: r_\theta(f), \tag{5.27}$$
deren Fortsetzung auf $S(W)$ und dessen Rand eine Operation
$$\mathbb{T} \times H_0 \to H_0 \tag{5.28}$$
liefert. Sei $\Omega_{2k} \in H_{2k}$ der sogenannte *Vakuumvektor* in H_{2k} (physikalisch der Grundzustand des Hamiltonian). Dann ist $\Omega_{2k} \in S_0(W)$, also konstant, und $H_{2k} = \hat{S}(W) \cdot \Omega_{2k}$. Ohne Einschränkung kann man alle Vakuumvektoren Ω_{2k} als Elemente von $\hat{S}(W)$ identisch wählen. Will man die Operation von r_θ auf ganz H fortsetzen, so daß sie immer noch mit Π intertwinned, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
r_\theta\, \Omega_{2k} &= r_\theta\, \Pi(e_k)\, \Omega_0, && e_k(\alpha) := e^{ik\alpha} \\
&= r_\theta\, \Pi(e_k)\, r_\theta^{-1}\, \Omega_0, && \text{da } \Omega_0 \text{ konstant} \\
&= \Pi(r_\theta e_k)\, \Omega_0, && \text{da } r_\theta \text{ intertwinned} \\
&= \Pi(r_\theta e_k)\, \Pi(e_{-k})\, \Omega_{2k} \\
&= c(r_\theta e_k, e_{-k})^{-1} \cdot \Pi(\underbrace{e_k(\cdot + \theta) e_{-k}}_{e^{ik(\cdot+\theta)}e^{-ik\cdot} = e^{-ik\theta}})\Omega_{2k} \\
&= e^{ik^2\theta}\, e^{-2ik^2\theta}\, \Omega_{2k} \\
&= e^{-ik^2\theta}\, \Omega_{2k},
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
S(r_\theta e_k, e_{-k}) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} -k^2\tau + k^2\tau + k^2\theta d\tau + \frac{1}{4\pi}(k(2\pi+\theta)\cdot 0 + \theta k 2\pi k) \\
&= \frac{1}{4\pi}(2\pi k^2\theta + 2\pi k^2\theta) = k^2\theta,
\end{aligned}$$

also $c(r_\theta e_k, e_{-k})^{-1} = e^{-ik^2\theta}$. Umgekehrt sieht man, daß man mit
$$r_\theta\Omega_{2k} := e^{-ik^2\theta}\Omega_{2k} \tag{5.29}$$
eine Operation von $\mathbb{T}$ auf ganz H definieren kann, die mit der Darstellung Π intertwinned. Für diese Operation gilt wegen (5.29) sogar
$$\dim H(q) = 0 \text{ für alle } q < 0. \tag{5.30}$$

Die Darstellung Π ist also mit dieser Operation von $\mathbb{T}$ auf H eine Darstellung positiver Energie auf H. Die Positivität verdankt sich allein dem Trick nur jede zweite Darstellung H_k zum Zusammenbau der Darstellung H zu benutzen, da sonst in obiger Rechnung der Faktor $e^{-2ik^2\theta}$ nicht entstanden wäre.

Satz 5.8 *Die projektive Darstellung Π von $L\mathbb{T}$ auf H ist irreduzibel unitär symmetrisch und von positiver Energie. Sie ist eine von genau zwei Darstellungen dieser Art bezüglich des Kozykels c.*

Beweis. Da

$$r_\theta w = r_\theta(\sum_{n\geq 1} a_n id^n) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{in\theta} id^n, \tag{5.31}$$

also verschieden von w für $e^{i\theta} \neq 1$ kann $r_\theta(w_1 \vee \ldots \vee w_k) = w_1 \vee \ldots \vee w_k$ nur gelten, falls w_i, w_j existieren, mit $w_i = r_\theta w_j$. Da $\mathbb{T}$ überabzählbar, kann $r_\theta \xi = \xi$ für alle $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ nur für $\xi \in S_0(W)$ erfüllt sein, das heißt für konstantes ξ.

Angenommen es existiert eine orthogonale Zerlegung $H_0 = H_0' \oplus H_0''$, in der H_0' ein $L_0\mathbb{T}$-invarianter Unterraum von H_0 ist. Dann gilt für den Vakuumvektor Ω_0

$$\begin{aligned} r_\theta\,\Omega_0 &= r_\theta\,(\Omega_0' \oplus \Omega_0'') \\ &= r_\theta\,\Omega_0' \oplus r_\theta\,\Omega_0'', \qquad \text{da } r_\theta \text{ unitär} \\ &= \Omega_0' \oplus r_\theta\,\Omega_0'', \end{aligned}$$

da $r_\theta\,\Omega_0 = \Omega_0$, und die Zerlegung von Ω_0 eindeutig ist. Somit ist nach (5.31) auch Ω_0' konstant und

$$\Omega_0 = \mu \cdot \Omega_0' \in H_0'. \tag{5.32}$$

Da der Vakuumvektor zyklisch unter der Operation von $L_0\mathbb{T}$ ist (Anwendung der Logarithmus-Reihe), folgt $H_0' = H_0$ und H_0 erweißt sich als irreduzibel unter der Darstellung Π_0. Somit sind auch alle H_k irreduzibel unter Π_k und aus der Definition der Shift-Operatoren O_n folgt die Irreduzibilität von $H = \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\oplus} H_{2k}$ unter Π.

Eine beliebige irreduzible Darstellung positiver Energie von $L_0\mathbb{T}/\mathbb{T}$ muß aufgrund der Intertwinnungsbedingung einen Vakuumvektor Ω besitzen, der durch $A(\bar{w})$ annihiliert wird ($A(\bar{w})$ verringert die Energie). Aber $H_0 = \hat{S}(W)$ wird frei erzeugt durch die Operation der $A(f)$, $f \in V$, also ist die Darstellung schon eindeutig bestimmt. Da $L_0\mathbb{T} = L_0\mathbb{T}/\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ ist H_0 auch die einzige irreduzible Darstellung positiver Energie von $L_0\mathbb{T}$. Schließlich ist $\tilde{L}\mathbb{T}$ das semi-direkte Produkt $\mathbb{Z} \times \tilde{L}_0\mathbb{T}$ und zwei Darstellungen H_k und H_l von $\tilde{L}_0\mathbb{T}$ sind genau dann konjugiert unter der Operation von $\tilde{L}\mathbb{T}$, wenn $k - l \in 2\mathbb{Z}$. Aus dem Satz von Mackey folgt dann, daß es genau zwei irreduzible Darstellungen positiver Energie von $\tilde{L}\mathbb{T}$ gibt, die eingeschränkt auf $\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\oplus} H_{2k}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\oplus} H_{2k+1}$ Darstellungen von $\tilde{L}_0\mathbb{T}$ sind. Also gibt es genau zwei projektive Darstellungen (vergleiche Definition 3.6 ff.) von $L\mathbb{T}$ bezüglich des gegebenen Kozykels.

□

Literatur

[PS] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups,* Oxford mathematical monographs, Oxford University Press, New York, 1986

[RS] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical Physics I, Functional Analysis,* Academic Press, New York, 1975

[S] G. Segal, *Unitary representations of some infinite dimensional groups,* Commun. Math. Phys. **80** (1981), 301-342