Eine asymptotische Entwicklung der McKean-Singer Indexformel

U. Hagenbach

Einleitung

Der Atiyah-Singer-Indexsatz ist eine der tiefsten mathematischen Entdeckungen dieses Jahrhunderts. Er ist das zentrale Resultat eines Bereiches der mathematischen Forschung, welcher sich dem Studium der Beziehungen zwischen topologischen und analytischen Invarianten einer bestimmten Klasse linearer Abbildungen auf Schnitten differenzierbarer Vektorbündel widmet. Der Indexsatz zeigt, daß der Index eines elliptischen Differential-Operators auf einer kompakten orientierbaren glatten Mannigfaltigkeit ohne Rand nur von den topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit abhängt [P, Theorem XIX.1]

$$Ind(D) = Ind_{top}(M) = topologischer\ Index\ von\ M.$$

Dieser Satz wurde von Atiyah und Singer 1963 bewiesen.

Die allgemeinste Form des Indexsatzes umfaßt die analogen Aussagen sowohl für Pseudo-Differential-Operatoren und damit für eine große Klasse von Integraloperatoren, als auch für elliptische Komplexe. In der Anwendung ergeben sich als tiefliegenden Spezialfälle [G, Seite 68] der Satz von Gauß-Bonnet-Chern für den DeRham Komplex

$$Ind(d) = \chi(M) := Eulercharakteristik\ von\ M,$$

der Satz von Riemann-Roch-Hirzebruch für den Dolbeault Komplex einer Kählermannigfaltigkeit

$$Ind(\bar{\partial}) = arithmetisches\ Geschlecht\ von\ M,$$

der Signatursatz von Hirzebruch für den Signatur Komplex einer $4k$-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit

$$Ind(d + d^*) = Signatur(M)$$

und der Satz von Hirzebruch über das $\hat{A}$-Geschlecht für den Spin Komplex einer Spin Mannigfaltigkeit

$$Ind(d_s) = \hat{A}(M) = Spinorindex\ von\ M.$$

Andere Verallgemeinerungen beziehen sich auf die Klasse der zulässigen Räume, wie zum Beispiel der inzwischen erreichte Indexsatz für Blätterungen [MS].

Die vorliegende Arbeit befaßt sich lediglich mit der „analytischen" Seite des Indexsatzes. Die hier bewiesene Asymptotik der Indexformel von McKean und Singer liefert eine Darstellung des Indexes eines allgemeinen elliptischen Pseudo-Differential-Operators P in der geschlossenen Form als Integral über sein Indexmaß $\mu(P)$. Dies ist eine wesentliche technische Vorbereitung und der Startpunkt für den Beweis des Indexsatzes.

Die hier vorgestellten Techniken sind grundlegend für alle erwähnten Indexsätze. Für den Beweis des Indexsatzes auf geblätterten Räumen ist zwar eine allgemeinere Version des vorliegenden Resultates notwendig, welches jedoch lediglich durch sorgfältige Übertragung auf die spezielle Situation zu erreichen ist.

0 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt werden einige Notationen eingeführt und als bekannt vorausgesetzte Fakten wiederholt.

Notation 0.1

1. *$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ sei ein Multiindex, dann ist $D_x^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n^{\alpha_n}}$ der α-fache Ableitungsoperator bezüglich $x \in \mathbb{R}^n$. Analog und wie gewohnt sind D_ξ^α, $|\alpha|$ und x^α definiert.*

2. *$(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ bezeichne ein Element des Kotangential-Bündels des $\mathbb{R}^n$, beziehungsweise später der Mannigfaltigkeit M.*

Definition 0.2 *Der* Schwarzraum *des $\mathbb{R}^n$ ist definiert als*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) |\ \forall(\alpha, m) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}\, \exists c_{\alpha,n} : |D_x^\alpha u(x)| \leq c_{\alpha,n}(1 + |x|)^{-m}\}.$$

Diese Definition bedeutet, daß alle Ableitungen einer Funktion $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ schneller fallen als Kehrwerte beliebiger Polynome. Deshalb nennt man $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der *schnell abfallenden Funktionen.*

Bemerkung 0.3 Aus der Definition des Schwarzraumes folgt sofort, daß die Inklusionen

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \tag{0.1}$$

gelten. Da aber $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine dichte Teilmenge in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, ist auch der Schwarzraum dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definition 0.4 *Die* Fouriertransformation *auf dem Schwarzraum ist gegeben durch*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}((\mathbb{R}^n)^*);\ u \mapsto \mathcal{F}(u) := \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{-ix\cdot(\cdot)}\, u(x)\, dx =: \hat{u}. \tag{0.2}$$

Hierbei bezeichne $x \cdot \xi$ *die Anwendung von* $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ *auf* $x \in \mathbb{R}^n$.

Satz 0.5 *(Plancherel)*
Es existiert eine eindeutige isometrische Fortsetzung

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2((\mathbb{R}^n)^*) \tag{0.3}$$

der Fouriertransformation auf den ganzen Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$*, die die folgenden Eigenschaften besitzt:*
1. Umkehrformel:

$$u(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{ix\cdot\xi}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{0.4}$$

2. Parsevalgleichung:

$$(u|v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\hat{u}|\hat{v})_{L^2((\mathbb{R}^n)^*)}. \tag{0.5}$$

3. Differentiations-Produkt Transformation:

$$\mathcal{F}(D^\alpha u)(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi), \tag{0.6}$$

beziehungsweise

$$\mathcal{F}((x \mapsto x^\beta)u)(\xi) = D_\xi^\beta \hat{u}(\xi). \tag{0.7}$$

Bemerkung 0.6 In die Definitionen der Fouriertransformation und ihrer Umkehrung seien die zur Normierung notwendigen Dichtefaktoren $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}$ in die verwendeten Maße eingearbeitet. Sie wurden und werden im folgenden weggelassen.

1 Soboleväume

Für das Studium von Differential- und Pseudo-Differential Operatoren sind Sobolevräume unerläßlich. Diese werden nun eingeführt und einige grundlegende Eigenschaften für die folgenden Kapitel bereitgestellt.

Definition 1.1

1. *Für $s \in \mathbb{R}$ heißt*

$$\begin{aligned} ||u||_s &:= \left(\int_{(\mathbb{R}^n)^*} |\hat{u}(\xi)|^2 \, (1+|\xi|)^{2s} \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||\hat{u}(1+|\cdot|^s)||_{L^2((\mathbb{R}^n)^*)} \end{aligned}$$

die s-te Sobolev-Norm *von $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

2. *Der s-te* Sobolevraum *ist für $s \in \mathbb{R}$ definiert als*

$$H_s(\mathbb{R}^n) := \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{||\cdot||_s}. \tag{1.1}$$

Bemerkung 1.2 Die L^2-Normen von maximal k-fachen Ableitungen von u bestimmen für ganzes, positives k die k-te Sobolevnorm von u. Denn definiert man

$$\begin{aligned} {}_k||u|| &:= \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha u(x)|^2 \, dx \\ &= \sum_{|\alpha|\le k} \int_{(\mathbb{R}^n)^*} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi, \quad (\textit{Gleichungen } (0.4) \textit{ und } (0.5)) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^*} \left(\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|\right)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi, \end{aligned}$$

und wählt man nun $k_1,\ k_2 \in \mathbb{N}$, so daß

$$k_1(1+|\xi|)^{2k} \le \left(\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|\right)^2 \le k_2(1+|\xi|)^{2k}, \tag{1.2}$$

so folgt die Äquivalenz der beiden Normen $||\cdot||_k$ und ${}_k||\cdot||$.

Folgerung 1.3

$$D^\alpha : H_s \to H_{s-|\alpha|} \tag{1.3}$$

definiert einen stetigen linearen Operator zwischen Hilberträumen.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus

$$|\xi^\alpha|^2(1+|\xi|)^{2(s-|\alpha|)} \leq c(1+|\xi|)^{2s} \tag{1.4}$$

für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$.

□

Satz 1.4 *(Sobolev-Einbettungssätze)*
Sei $s > \frac{n}{2}$. Dann gilt

$$H_s(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \tag{1.5}$$

und

$$H_{s+k}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \ \textit{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Beweis. Die Bedingung an s erzwingt, daß das Integral $\int_{(\mathbb{R}^n)^*}(1+|\xi|)^{-2s}d\xi$ existiert. Nun folgt mit Hilfe der Fouriertransformation und der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$|u(x)| \leq ||u||_s \cdot \left(\int_{(\mathbb{R}^n)^*}(1+|\xi|)^{-2s}\, d\xi\right) \tag{1.7}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also ist Konvergenz in der Sobolevnorm stärker als in der Supremumsnorm. Sei nun $u \in H_s$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(u_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die in der Sobolevnorm gegen u konvergiert. u ist also stetig und die erste Behauptung bewiesen.

Für $u \in H_{s+k}$ folgt mit Folgerung 1.3 direkt $D^\alpha u \in H_s$ und unter Anwendung der bereits bewiesenen ersten auch die zweite Behauptung.

□

Bemerkung 1.5

1. Für $s > t$ gilt $(1+|\xi|)^{2s} > (1+|\xi|)^{2t}$. Daraus ergibt sich die sogenannte *Kette der Sobolevräume*

$$H_s(\mathbb{R}^n) \subset H_t(\mathbb{R}^n), \ s > t. \tag{1.8}$$

   Diese Kette wird fortgesetzt durch die formale Definition der Sobolevräume für $t = \pm\infty$

$$\begin{aligned} H_\infty(\mathbb{R}^n) &:= \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H_s(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H_k(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ H_{-\infty}(\mathbb{R}^n) &:= \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H_s(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} H_k(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$H_0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.9}$$

2. Für die stetigen Linearformen auf H_s gilt:

$$(H_s)^*(\mathbb{R}^n) = H_{-s}(\mathbb{R}^n), \tag{1.10}$$

denn $H_s(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|)^s)$.

2 Pseudo-Differential-Operatoren

Zur Einführung der Pseudo-Differential-Operatoren wird zunächst an die Definition der Differential-Operatoren erinnert. P ist ein *Differential-Operator* der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, falls seine Wirkung auf $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{ix\cdot\xi} \left(\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \right) \hat{u}(\xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

wobei $a_\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Der Ausdruck $\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha =: p(x,\xi)$ wird die Symbolfunktion $\sigma(P)(x,\xi)$ des Operators P genannt. Pseudo-Differential-Operatoren entstehen nun durch Verallgemeinerung der Klasse der zulässigen Symbolfunktionen:

Definition 2.1 *Ist p eine Funktion, so daß*

i) $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$,

ii) $p(\cdot,\xi)$ *kompakten Träger hat und*

iii) *für alle Multiindices α, β eine Konstante $c_{\alpha\beta}$ existiert, so daß*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \le c_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \ \textit{für alle}\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*, \tag{2.1}$$

dann heißt p ein Symbol *der Ordnung $m \in \mathbb{R}$. Mit $S^m(\mathbb{R}^n)$ sei die Menge aller Symbolfunktionen der Ordnung m bezeichnet.*

Definition 2.2 *Sei P ein auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiertes lineares Funktional, so daß es ein $m \in \mathbb{R}$ und eine Symbolfunktion $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$ gibt mit*

$$P(u)(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{ix\cdot\xi}\, p(x,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi \tag{2.2}$$

für alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$, dann heißt P ein Pseudo-Differential-Operator *der Ordnung m mit Symbolfunktion $p =: \sigma(P)$.*

Bemerkung 2.3 Ist P ein Differential-Operator der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, dann ist $\sigma(P)(x,\cdot)$ ein Polynom mit Ordnung $\leq m$. Also ist $\sigma(P) \in S^m(\mathbb{R}^n)$ und P auch Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m.

Aus dem vorangegangenen Kapitel ist bekannt, daß $P : H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s-m}(\mathbb{R}^n)$ ein stetiges lineares Funktional ist. Diese Aussage gilt allgemeiner auch für Pseudo-Differential-Operatoren:

Satz 2.4 *Ist $\sigma(P) \in S^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, dann ist $P : H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s-m}(\mathbb{R}^n)$ ein stetiger Operator für alle $s \in \mathbb{R}$.*

Beweis. [G, Theorem Seite 11].

Beispiel 2.5 Zur Existenz von Pseudo-Differential-Operatoren und Symbolfunktionen beliebiger Ordnung ist noch nichts gesagt worden. Das Standardbeispiel ist die Funktion

$$(x,\xi) \mapsto p_m(x,\xi) := a(x)(1+|\xi|)^m, \tag{2.3}$$

wobei $m \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig gewählt werden können. Es folgt $p_m \in S^m(\mathbb{R}^n)$ und im Falle $m := -2$ definiert dies einen stetigen Operator

$$P : H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s+2}(\mathbb{R}^n), \tag{2.4}$$

der Funktionen „glättet“.

Bemerkung 2.6 Differential-Operatoren P sind durch die Eigenschaft der *Lokalität* charakterisiert, das heißt, daß der Träger einer Funktion durch P nicht vergrößert wird. Für Pseudo-Differential-Operatoren ist durch die Definition über Integrale diese Eigenschaft im allgemeinen nicht mehr erfüllt. Sie erfüllen eine verwandte, jedoch schwächere Bedingung: sie sind *pseudolokal*. Das bedeutet, daß Pseudo-Differential-Operatoren den singulären Träger nicht vergrößern. Mit anderen Worten:

$$u \in \mathcal{C}^\infty(O) \Longrightarrow P(u) \in \mathcal{C}^\infty(O) \tag{2.5}$$

für alle offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}^n$ (Beweis: [G, Theorem Seite 21]).

Definition 2.7 *Seien p, p_j, $j \in \mathbb{N}$ Symbole beliebiger Ordnungen, dann heißt $p \sim \sum_{j\geq 1} p_j$, falls für alle $m \in \mathbb{R}^+$ ein $k_m \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $k \geq k_m$*

$$p - \sum_{j=1}^{k} p_j \in S^{-m}(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

Bemerkung 2.8 Ein Symbol p wie in Definition 2.7 kann beliebig „glatt“ approximiert werden durch eine endliche Summe von Symbolen p_j, denn für zwei Symbolfunktionen p, q mit $p \sim q$ folgt für alle $m \in \mathbb{R}$

$$p - q \in S^m(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

Für die zugehörigen Pseudo-Differential-Operatoren gilt also

$$P - Q : H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s'}(\mathbb{R}^n) \tag{2.8}$$

für alle $s, s' \in \mathbb{R}$ und mit den Sobolev-Einbettungssätzen folgt

$$P - Q : H_s(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{2.9}$$

für beliebiges $s \in \mathbb{R}$. P und Q unterscheiden sich also nur durch einen „glättenden“ Operator, kurz $P \sim Q$, welcher im Rahmen der folgenden Untersuchungen sich als nicht bedeutend erweisen wird.

Der nächste Satz konstruiert die *-Algebra der Pseudo-Differential-Operatoren und stellt den unentbehrlichen Symbolkalkül für Pseudo-Differential-Operatoren zur Verfügung. Der Beweis ist, wie die Aussagen schon vermuten lassen, technisch sehr aufwendig [G, Seiten 16-21]:

Satz 2.9 *Bezeichne Ψ_K die Klasse der Pseudo-Differential-Operatoren eingeschränkt auf Funktionen mit Träger in einer festen kompakten Menge K. Für $P \in \Psi_K$ sei P^* definiert über $(P * u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, Pv)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Dann gilt:*

1. *Ist $P \in \Psi_K$, dann ist es auch P^* und die Symbole erfüllen*

$$\sigma(P^*) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_x^\alpha \sigma(P)^*, \tag{2.10}$$

wobei $\sigma(P)^* := \overline{\sigma(P)}$.

2. *Sind $P, Q \in \Psi_K$, dann ist es auch PQ und die Symbole erfüllen*

$$\sigma(PQ) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \sigma(P) D_x^\alpha \sigma(Q). \tag{2.11}$$

Differential-Operatoren hatten sich als endliche Summen von Differential-Operatoren abfallender Ordnung erwiesen. Für Pseudo-Differential-Operatoren zeigt der folgende Satz die kanonische Verallgemeinerung, daß sie sich als unendliche Summen von Pseudo-Differential-Operatoren abfallender Ordnung darstellen lassen (relativ der eingeführten Relation „$\sim$“):

Satz 2.10 *Seien $p_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n), j \in \mathbb{N}$ Symbole mit $m_j \searrow -\infty$ und die Träger der $p_j(\cdot, \xi)$ seien alle enthalten in einer festen kompakten Menge K. Dann existiert genau ein Pseudo-Differential-Operator P (modulo „$\sim$") mit*

$$\sigma(P) \sim \sum_{j \geq 1} p_j. \tag{2.12}$$

Beweis. [G, Theorem Seite 22].

3 Elliptische Pseudo-Differential-Operatoren

Elliptische Pseudo-Differential-Operatoren spielen in etwa die Rolle der „invertierbaren" Elemente in der im Kapitel 2 konstruierten *-Algebra der Pseudo-Differential-Operatoren und werden sich als sehr nützliches Werkzeug für die späteren Kapitel erweisen.

Definition 3.1

1. *Ein Symbol $p \in S^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, heißt* elliptisch, *falls $p(x, \xi) \neq 0$ für alle $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ mit $\xi \neq 0$, und falls eine Konstante c_p existiert, so daß*

$$|p(x, \xi)^{-1}| \leq c_p(1 + |\xi|)^{-m} \tag{3.1}$$

für große ξ.

2. *Ein Pseudo-Differential-Operator P heißt* elliptisch, *falls sein Symbol $\sigma(P)$ elliptisch ist.*

Beispiel 3.2 Der bekannteste und wichtigste elliptische Pseudo-Differential-Operator ist der *Laplace-Operator*

$$\Delta(u)(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \tag{3.2}$$

mit der Symbolfunktion

$$\sigma(\Delta) = -|\xi|^2. \tag{3.3}$$

Damit ist der Laplace-Operator ein stetiger Differential-Operator 2.Ordnung, also

$$\Delta : H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s-2}(\mathbb{R}^n). \tag{3.4}$$

Definition 3.3 *Sei $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differential-Operator, dann heißt*

$$\sigma_L(P)(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha \tag{3.5}$$

das Hauptsymbol *(leading symbol) von P.*

Mit Hilfe des Hauptsymbols läßt sich ein sehr einfaches Kriterium für die Elliptizität eines Differential-Operators beweisen:

Satz 3.4 *Der Differential-Operator* $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ *ist genau dann elliptisch, wenn für alle* $\xi \neq 0$ *das Hauptsymbol* $\sigma_L(P)$ *nicht verschwindet.*

Beweis. [G, Theorem Seite 27].

Eine zwar einfache doch sehr nützliche Konsequenz von Satz 3.4 stellt das folgende Korollar dar:

Korollar 3.5 *Sei* $p = p_0 + p_1$ *und* $p_0 \in S^m(\mathbb{R}^n)$ *und* $p_1 \in S^{m'}(\mathbb{R}^n)$, $m > m'$ *Symbole von Differential-Operatoren. Dann ist* p *elliptisch genau dann, wenn* p_0 *elliptisch ist.*

Der nun folgende Satz präzisiert die Eingangsbehauptung dieses Kapitels und liefert die „Umkehrbarkeit" elliptischer Pseudo-Differential-Operatoren:

Satz 3.6 *Es sei* P *ein* $elliptischer\ Pseudo-Differential-Operator$ *und* $I : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \sigma(\mathbb{R}^n)$, $u \mapsto u$. *Dann existiert ein Pseudo-Differential-Operator* Q, *so daß*

$$PQ - I \sim 0 \sim QP - I. \tag{3.6}$$

Q *ist bis auf glättende Operatoren eindeutig bestimmt und heißt die* Parametrix *zu* P.

Beweis. [G, Theorem Seite 29].

Korollar 3.7 P *sei ein elliptischer Pseudo-Differential-Operator und* u *eine Funktion auf dem* $\mathbb{R}^n$.

1. *Ist* $P(u) = 0$, *dann ist* $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. *Ist* $V \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $P(u) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, *dann ist auch* u *eine glatte Funktion.*

Beweis. Es sei Q die nach Satz 3.6 existierende Parametrix zu P. Dann ergibt sich:

1. $u = u - QP(u) = (I - QP)(u) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, da $QP - I$ ein glättender Operator ist.
2. Aufgrund der Pseudolokalität von Pseudo-Differential-Operatoren ist $Q(Pu)$ glatt. Da nach Wahl von Q auch $(QP - I)(u) = Q(Pu) - u$ glatt ist, folgt die Behauptung.

□

4 Pseudo-Differential-Operatoren auf Mannigfaltigkeiten

Die Theorie der Pseudo-Differential-Operatoren wird nun auf kompakte $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten ausgedehnt. Dafür sei im folgenden M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension n. Das (existierende) Volumenelement wird mit $dvol$ bezeichnet.

Die Definition von Pseudo-Differential-Operatoren auf einer Mannigfaltigkeit bedarf technischer Genauigkeit und einigen Vorbereitungen. Sei dazu $U \subset M$ ein beliebiger Kartenbereich in M mit Karte $\phi : U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\tilde{U})$,

$$\begin{array}{lcl} U & & \\ \downarrow \phi & & \\ \tilde{U} & \stackrel{\tilde{u}}{\longrightarrow} & \mathbb{C}. \end{array} \tag{4.1}$$

Die Nullfortsetzung von $\tilde{u} \circ \phi$ ist eine glatte Funktion in $\mathcal{C}_0^\infty(M)$, also ist die Anwendung eines Operators $P : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ wohldefiniert. $P(\tilde{u} \circ \phi)|_U \circ \phi^{-1}$ ist wieder eine glatte Funktion in $\mathcal{C}^\infty(U)$, und der Operator $\tilde{P}_\phi$ ein über das folgende Diagramm wohldefiniertes Funktional

$$\begin{array}{rccc} & \tilde{u} & \longmapsto & (P(\tilde{u} \circ \phi)|_U) \circ \phi^{-1}, \\ \tilde{P}_\phi : & \mathcal{C}_0^\infty(\tilde{U}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}) \\ & \downarrow & & \uparrow \\ P : & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M). \end{array} \tag{4.2}$$

Definition 4.1 *Ein stetiger linearer Operator $P : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ ist ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung $m \in \mathbb{R}$ auf M, falls für alle Karten $\phi : U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ von M*

$$\tilde{P}_\phi : \mathcal{C}_0^\infty(\tilde{U}) \to \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}) \tag{4.3}$$

ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m ist. Man schreibt $\sigma(P) \in S^m(M)$, falls für jede beliebige Karte auf M das zugehörige Symbol $\sigma(\tilde{P}_\phi)$ eine Symbolfunktion in $S^m(\mathbb{R}^n)$ ist.

Bemerkung 4.2 Nach obiger Definition muß also für jede Karte eine Symbolfunktion $\tilde{p}_\phi$ existieren, so daß

$$\tilde{P}_\phi(\tilde{u}) = \left(\int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{ix\cdot\xi} \tilde{p}_\phi(x,\xi)\, \widehat{(\tilde{u})}(\xi)\, d\xi \right)\Bigg|_U , \tag{4.4}$$

wobei $\widehat{(\tilde{u})}$ die Fouriertransformation der Nullfortsetzung von $\tilde{u}$ ist. Man beachte, daß über $(\mathbb{R}^n)^* = T_x^*M = T_x^*U$ integriert wird.

Lemma 4.3 *Für alle $m \in \mathbb{R}$ existiert ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m auf M.*

Beweis. Sei $(U_i)_i$ ein beliebiger Atlas von M und $(\rho_i)_i$ eine lokal endliche und zu $(U_i)_i$ untergeordnete glatte Partition der eins. Definiert man $\tilde{P}_i$ mittels $\sigma(\tilde{P}_i)(x,\xi) := (1+|\xi|)^m$ für alle $(x,\xi) \in T^*U_i$ und bildet

$$P := \sum_i \rho_i P_i, \tag{4.5}$$

so erhält man einen elliptischen Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m im Sinne der Definition 4.1.

□

Ebenso wie im flachen Fall erweisen sich angepaßte Sobolevräume wieder als unentbehrlich für die Behandlung von Pseudo-Differential-Operatoren auf Mannigfaltigkeiten, doch liegt die geeignete Definition nicht auf der Hand. Einfach ist der Fall $s = 0$, denn die Definition

$$H_0(M) := L^2(M) := \{u| \int_M |u|^2 dvol < \infty\} \tag{4.6}$$

ist kanonisch und eindeutig. Etwas schwieriger ist es im Fall $\mathbb{R} \ni s \neq 0$. Sei hierzu $(U_i)_i$ wieder ein endlicher Atlas auf M und $(\rho_i)_i$ eine untergeordnete glatte Partition der eins. Nun definiert man die s-te Sobolevnorm von $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ als

$$||u||_s := (\sum_i ||\rho_i u||_s^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.7}$$

wobei

$$||\rho_i u||_s := \int_{(\mathbb{R}^n)^*} |(\widehat{\rho_i u \circ \phi_i^{-1}})(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s} d\xi. \tag{4.8}$$

Definition 4.4 *Der s-te Sobolevraum $H_s(M)$ auf M ist definiert als die Vervollständigung von $\mathcal{C}^\infty(M)$ in der s-ten Sobolevnorm:*

$$H_s(M) := \overline{\mathcal{C}^\infty(M)}^{||\cdot||_s}. \tag{4.9}$$

Noch ist diese Definition abhängig von der Wahl der Karten $(U_i)_i$ und der Partition $(\rho_i)_i$, doch die Unterdrückung dieser Abhängigkeit in der letzten Definition ist gerechtfertigt wegen

Lemma 4.5 *Sei $s \in \mathbb{R}$ und P ein elliptischer Operator der Ordnung s, dann ist für jede Wahl von Karten $(U_i)_i$ und einer zugehörigen untergeordneten glatten Partition der eins $(\rho_i)_i$ die Sobolevnorm $||\cdot||_s$ äquivalent zu der Norm $||\cdot||_{L^2(M)} + ||P(\cdot)||_{L^2(M)}$.*

Beweis. Sei zunächst $s \geq 0$ und P ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung s auf M wie in Lemma 4.3. Sei Q eine Parametrix zu P der Ordnung $-s$. Dann folgt

$$\begin{aligned} ||u||_s &\leq ||(QP)(u)||_s + ||(QP - I)(u)||_s \\ &\leq ||(QP)(u)||_s + c_1||u||_0, \quad \textit{da } (QP - I) \sim 0 \textit{ existiert ein geeignets } c_1 \in \mathbb{R} \\ &\leq c_2||Pu||_0 + c_1||u||_0, \quad \textit{da } Q \textit{ Ordnung } -s \textit{ hat} \\ &\leq c_3(||u||_0 + ||Pu||_0), \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten c_2 und c_3 aus $\mathbb{R}$. Da P von der Ordnung s ist gilt umgekehrt $||Pu||_0 \leq c_4||u||_s$ und es folgt die Existenz einer Konstante c_5, so daß

$$||Pu||_0 + ||u||_0 \leq c_5||u||_s. \tag{4.10}$$

Insgesamt sind die Normen äquivalent, und mittels $H_{-s}(M) = (H_s)^*(M)$ für nicht negative s gilt die Aussage auch für negative s.

□

Wieder gilt für die Soboleväume:

Folgerung 4.6

1. *$H_s(M) \overset{kompakt}{\hookrightarrow} H_t(M)$, falls $s > t$.*
2. *$f \in H_{s+k}(M) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^k(M)$, falls $s > \frac{n}{2}$.*
3. *$\sigma(P) \in S^m(M) \Rightarrow P : H_s(M) \to H_{s-m}$ stetig.*
4. *$(H_s(M))^* = H_{-s}(M)$.*

Zum weiteren Ausbau der Theorie seien E, F komplexe Vektorbündel über M mit einem hermiteschen inneren Produkt. Mit $\mathcal{C}^\infty(E)$ seien alle glatten Schnitte im Vektorbündel E bezeichnet. Eine detaillierte Einführung in die hier benutzten Grundlagen kann zum Beispiel in [W, Chapter III] nachgelesen werden.

Definition 4.7 *Ein lineares stetiges Funktional $P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(F)$ ist ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung $m \in \mathbb{R}$ falls P lokal als Matrix darstellbar ist, so daß jeder Eintrag ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m auf M ist.*

Zur Erläuterung der Definition 4.7 sei (U, ϕ) eine lokale Trivialisierung von E, ϕ' eine Karte von M und τ_M die definierende Abbildung des Bündels, dann gilt mit geeignetem $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{cccccc} & E & \xrightarrow{\phi} & \tilde{U} \times \mathbb{C}^l & & \\ \tau_M & \downarrow & & \downarrow & \pi_1 & \\ M \supset & U & \xrightarrow{\phi'} & \tilde{U} & \subset \mathbb{R}^n & . \end{array} \tag{4.11}$$

Das Pullback $\phi^* : \mathcal{C}^\infty(U, E) \to [\mathcal{C}^\infty(\tilde{U}, \mathbb{C})]^l$ ist definiert über

$$\begin{array}{ccccc} & U \xrightarrow{u} E \xrightarrow{\phi} & \tilde{U} \times \mathbb{C}^l & & \\ \phi' & \downarrow & \downarrow & \pi_2 & \\ & \tilde{U} \quad \xrightarrow{\phi^*(u)} & \mathbb{C}^l & & , \end{array} \tag{4.12}$$

und läßt sich schreiben als

$$\tilde{u} := \phi^*(u) = \sum_{j=1}^{l} \tilde{u}_j e_j, \tag{4.13}$$

wobei $\tilde{u}_j \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}, \mathbb{C})$ und $\{e_j |\, j = 1, \ldots, l\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^l$ ist. Definition 4.7 ist nun so zu verstehen, daß für alle $x \in U$ eine Symbolfunktion

$$\sigma(P)(x) : T_x^* M \longrightarrow Hom(E_x, F_x) \tag{4.14}$$

existiert, so daß für deren Matrixdarstellungen $\sigma(\tilde{P})(\tilde{x}, \xi)$

$$\tilde{P}(\tilde{u})(\tilde{x}) = \int_{T_x^* M} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} \sigma(\tilde{P})(\tilde{x}, \xi)\, \widehat{(\phi^* u)}(\xi)\, d\xi \tag{4.15}$$

gilt. Hierbei sind E_x und F_x die Fasern der Vektorbündel über $x \in U$. Sind alle Matrixeinträge $(\sigma(\tilde{P})(\tilde{x}, \xi))_{ij}$ Symbolfunktionen der Klasse $S^m(\mathbb{R}^n)$, dann ist P ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m auf M. Hierfür schreibt man kurz $\sigma(P) \in S^m(E)$.

Definition 4.8 *Ein Pseudo-Differential-Operator P heißt* elliptisch*, wenn das Hauptsymbol*

$$\sigma_L(P)(x, \xi) : E_x \longrightarrow F_x \tag{4.16}$$

ein Isomorphismus ist für alle $(x, \xi) \in T^* M$ mit $\xi \neq 0$.

Sei $(\cdot|\cdot)_x$ das innere Produkt der Faser F_x, dann induziert

$$\langle u|v\rangle := \int_M (u(x)|v(x))_x \, dvol(x), \;\; u, v \in \mathcal{C}^\infty(E), \tag{4.17}$$

eine Norm und definiert über

$$L^2(E) := \overline{\mathcal{C}^\infty(E)}^{||\cdot||_{\langle,\rangle}} \tag{4.18}$$

einen vollständigen Hilbertraum. Mittels Partitionen der eins lassen sich analog Definition 4.4 wiederum Sobolevräume definieren. Formal ersetzt man lediglich die Dichtefunktion $(1+|\xi|)^m$ durch $(1+|\xi|)^m \cdot 1_n$. Dies ergibt im einfachsten Fall (in der oben eingeführten Notation)

$$||\phi^* u||_s = \int_{(\mathbb{R}^n)^*} ||\widehat{(\phi^* u)}(\xi)||_2^2 \,(1+|\xi|)^{2s} d\xi, \tag{4.19}$$

und führt zu den Resultaten (analog Folgerung 4.6):

Folgerung 4.9

1. *$H_s(E) \overset{kompakt}{\hookrightarrow} H_t(E)$, falls $s > t$.*
2. *$\sigma(P) \in S^m(E) \Rightarrow P : H_s(E) \to E_{s-m}$ stetig.*
3. *$(H_s(E))^* = H_{-s}(E)$.*

5 Der Index von Pseudo-Differential-Operatoren

Zur Definition des Indexes eines Pseudo-Differential-Operators ist es notwendig einige Fakten aus der Funktionalanalysis zu wiederholen. Am Ende des Kapitels wird schlielich der Existenzsatz für den Index elliptischer Pseudo-Differential-Operatoren positiver Ordnung bewiesen.

Definition 5.1 *Seien H_1 und H_2 Hilberträume.*

1. *Ein beschränkter Operator $T : H_1 \to H_2$ heißt* kompakt, *falls $T(B)$ relativkompakt ist für alle beschränkten Mengen $B \subset H_1$.*
2. *Ein beschränkter Operator $F : H_1 \to H_2$ heißt* Fredholm-Operator, *falls es einen Operator $G : H_2 \to H_1$ gibt, so daß $FG - I$ und $GF - I$ kompakte Operatoren sind.*

Die folgende grundlegende Charakterisierung von Fredholm-Operatoren wird zum Beispiel in [D, Theorem 5.17] bewiesen:

Satz 5.2 *$F : H_1 \to H_2$ ist genau dann ein Fredholm-Operator, wenn*

i) $\dim Kern(F) < \infty$,

ii) $\dim Kern(F^*) < \infty$ *und*

iii) *das $Bild(F)$ abgeschlossen ist,*

und genau dann, wenn

i) $H_1 = Kern(F) \oplus Bild(F^*)$ *und*

ii) $H_2 = Kern(F^*) \oplus Bild(F)$.

Der folgende Satz stellt eine Verbindung her zwischen elliptischen Pseudo-Differential-Operatoren und Fredholm-Operatoren. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die verschiedenen Abschlüsse der vorkommenden Operatoren nur in Einzelfällen symbolisch unterschieden werden.

Satz 5.3 *Sei $P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(E)$ ein selbstadjungierter elliptischer Pseudo-Differential-Operator der Ordnung $m > 0$. Dann gilt:*

1. *$P : H_s(E) \to H_{s-m}(E)$ ist ein Fredholm-Operator für alle $s \in \mathbb{R}$.*
2. *$L^2(E) = Kern(P) \oplus Bild(P)$ und der Kern von P ist enthalten in $\mathcal{C}^\infty(E)$.*
3. *$\mathcal{C}^\infty(E) = Kern(P) \oplus P(\mathcal{C}^\infty(E))$.*

Beweis.

1. Zunächst ist klar, daß $P : H_s(E) \to H_{s-m}(E)$ ein stetiger Operator ist für alle $s \in \mathbb{R}$. Da P elliptisch ist, existiert eine Parametrix
$$Q : H_{s-m}(E) \to H_s(E), \tag{5.1}$$
so daß $QP - I \sim 0 \sim PQ - I$. Da $QP - I$ ein glättender, also kompakter Operator ist, folgt mit beliebigem $t > s$ und Folgerung 4.9, daß
$$QP - I : H_s(E) \longrightarrow H_t(E) \overset{kompakt}{\hookrightarrow} H_s(E) \tag{5.2}$$
ein kompakter Operator ist. Analog ergibt sich, daß $PQ - I$ kompakt ist, und es folgt die 1. Behauptung.

2. Im Fall $s = 0$ ist $P : H_m(E) \to L^2(E)$ ein Fredholm-Operator, und mit Satz 5.2 folgt
$$L^2(E) = Kern(P^*) \oplus Bild(P) = Kern(P) \oplus Bild(P), \tag{5.3}$$
da P selbstadjungiert ist. Mit der Regularitäts-Eigenschaft nach Korollar 3.7 ergibt sich $Kern(P) \subset \mathcal{C}^\infty(E)$.

3. Für beliebiges $u \in \mathcal{C}^\infty(E) \subset L^2(E)$ existiert aufgrund der bewiesenen 2. Behauptung eine Zerlegung

$$u = u_1 \oplus P(u_2), \ u_1 \in Kern(P), \ u_2 \in H_m(E). \tag{5.4}$$

Wegen $u_1 \in Kern(P) \subset \mathcal{C}^\infty(E)$ ist auch $P(u_2) \in \mathcal{C}^\infty(E)$ und das Korollar 3.7 beendet wieder den Beweis.

□

Nun kann der Index definiert werden:

Korollar 5.4 *Sei $P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(F)$ ein elliptischer Pseudo-Differential-Operator positiver Ordnung $m \in \mathbb{R}$. Dann ist der* Index *von P*

$$Ind(P) := \dim Kern(P) - \dim Kern(P^*) \tag{5.5}$$

wohldefiniert.

Beweis. Nach Satz 5.3 ist die Fortsetzung $\bar{P} : H_s(E) \to H_{s-m}(E)$ ein Fredholm-Operator (für diese Aussage wurde die Selbstadjungiertheit nicht benutzt). Es gilt $P = \bar{P} \circ i$ mit der Einbettung $i : \mathcal{C}^\infty(E) \hookrightarrow H_s(E)$. Aufgrund der Regularität gilt jedoch $Kern(P) = Kern(\bar{P})$ und dieser hat wegen Satz 5.2 endliche Dimension. Da auch P^* ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m und der Abschluß $\widetilde{P^*} : H_s(E) \to H_{s-m}(E)$ ein Fredholm-Operator ist, folgt völlig analog $\dim Kern(P^*) = \dim Kern(\widetilde{P^*})$ und der Index von P ist wohldefiniert.

□

6 McKean-Singer Indexformel

Der Index eines Pseudo-Differential-Operators wurde im letzten Kapitel über die Dimension seines Kernes und Ko-Kernes definiert. Diese Definition ist sowohl praktisch als auch theoretisch nur sehr schwer weiteren Betrachtungen zugänglich. Die McKean-Singer Formel wird den Index als die Spur eines geeigneten Operators ausdrücken. Diese Darstellung ist der Schlüssel für die asymptotische Entwicklung des Indexes.

6.1 Funktionalanalytische Vorbereitungen

Definition 6.1 *Sei H ein Hilbertraum. Eine* Spektralschar *ist eine Familie $(E_\lambda)_\lambda$ von stetigen Projektionen $E_\lambda : H \to H$, so daß für alle $h \in H$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

i) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\mu$, *falls* $\lambda \geq \mu$,

ii) $\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda(h) = 0$,

iii) $\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda(h) = h$ *und*

iv) $\lim_{\lambda \to \mu - 0} E_\lambda(h) = E_\mu(h)$

gilt.

Satz 6.2 (Hilbert's Zerlegungssatz)
Es sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)_H$ und $T : H \supset D(T) \to H$ ein selbstadjungierter Operator in H. Dann existiert genau eine Spektralschar $(E_\lambda)_\lambda$ mit

i) $D(T) = \{h \in H | \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, d(E_\lambda(h), h)_H < \infty\}$ *und*

ii) $(T(h_1), h_2)_H = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d(E_\lambda(h_1), h_2)_H < \infty\}$ *für alle* $h_1, h_2 \in D(T)$.

Beweis. [MV, Satz 20.13].

Bemerkung 6.3 Das Resultat des letzten Satzes begründet die symbolische Schreibweise

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_\lambda. \tag{6.1}$$

Hierbei ist das Integral als ein Lebesgue-Stieltjes Integral aufzufassen. Der Integrationsbereich ist ohne Einschränkung lediglich das *Spektrum* $Spek(T)$, da die Integration außerhalb des Spektrums keine Beiträge liefert.

Die Existenz der Spektralschar ermöglicht eine neue Technik Operatoren zu definieren:

Satz 6.4 (Funktionalkalkül)
Es sei $T : H \supset D(T) \to H$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum H mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)_H$ und $f : Spek(T) \to \mathbb{C}$ fast überall stetig und beschränkt auf beschränkten Mengen. Dann definiert

$$(f(T)h_1, h_2)_H := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d(E_\lambda(h_1), h_2)_H, \;\; h_1, h_2 \in D(T) \tag{6.2}$$

einen linearen stetigen Operator $f(T)$ auf

$$D(f(T)) := \{h \in H | \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda(h), h)_H < \infty\} \tag{6.3}$$

mit den Eigenschaften:

1. $f(T)^* = \bar{f}(T)$ *und*
2. *Ist F beschränkt, so existiert eine stetige Fortsetzung $f(T) : H \to H$ mit*

$$||f(T)|| \leq \sup_{\lambda \in Spek(T)} |f(\lambda)|. \tag{6.4}$$

Beweis. [MV, Lemma 18.9].

6.2 Die Indexformel für Pseudo-Differential-Operatoren

Mit den Resultaten des letzten Unterabschnitts läßt sich der in der Einleitung erwähnte zu P gehörige Operator definieren, dessen Spur den Index liefern wird:

Korollar 6.5 *Sei $P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(F)$ ein Pseudo-Differential-Operator, dann sind e^{-tP^*P} und e^{-tDD^*} wohldefinierte beschränkte Operatoren auf $\mathcal{C}^\infty(E)$ für alle $t > 0$.*

Beweis. Die Komposition P^*P ist ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{C}^\infty(E)$ mit Spektrum $Spek(P^*P) \subset \bar{\mathbb{R}}_+$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} e^{-tx} & x \geq 0, \\ e^{-tx^2} & x < 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

ist stetig und beschränkt auf ganz $\mathbb{R}$. Da P^*P positiv ist, folgt mit dem Funktionalkalkül, daß

$$f(P^*P) = e^{-tP^*P} \tag{6.6}$$

ein wohldefinierter und beschränkter Operator auf $\mathcal{C}^\infty(E)$ ist.

□

Satz 6.6 (McKean-Singer Formel)
Sei $P : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(E)$ ein elliptischer Pseudo-Differential-Operator positiver Ordnung, dann gilt für beliebiges positives $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} Ind(P) &:= Kern(P) - Kern(P^*) \\ &= Spur(e^{-tP^*P} - e^{-tPP^*}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $e^{-tP^*P} - e^{-tPP^*}$ ein Spurklasse-Operator.

Beweis. Sei $P = UA$ die Polarzerlegung von P. Dann ist $A = (P^*P)^{\frac{1}{2}}$ und U eine partielle Isometrie mit

$$\begin{aligned} U^*U &= \mathrm{Proj}_{(Kern(P))^\perp}, \; und \; (Kern(P))^\perp \supset Bild(A) \\ UU^* &= \mathrm{Proj}_{(Kern(P^*))^\perp}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Rechnung (analog für P^*P durchzuführen)

$$\begin{aligned} U^*(PP^*)U &= U^*UAAU^*U \\ &= (AU^*U)^*A(U^*U) \\ &= A^*A \\ &= A\,A \\ &= P^*P \end{aligned}$$

erweisen sich die Spektralscharen $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ von P^*P und $(E'_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ von PP^* als äquivalent im Intervall $(0,\infty)$. Per Definition gilt $E_0 := \mathrm{Proj}_{Kern(P)}$ und $E'_0 := \mathrm{Proj}_{Kern(P^*)}$. Sei nun $\eta = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_l\}$ eine Partition eines beliebigen beschränkten Intervalles $I \subset (0,\infty)$, dann gilt für die zugehörige Lebesgue-Stieltjes Summen

$$\begin{aligned}
&Spur\left((e^{-tP^*P})_\eta - (e^{-tPP^*})_\eta\right)\\
&= Spur\left(\sum_{i=1}^{l} e^{-t\tilde{\lambda}_j}((E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}) - (E'_{\lambda_j} - E'_{\lambda_{j-1}})) + E_0 - E'_0\right)\\
&= \sum_{i=1}^{l} e^{-t\tilde{\lambda}_j} Spur\left(U^*(E'_{\lambda_j} - E'_{\lambda_{j-1}})U - (E'_{\lambda_j} - E'_{\lambda_{j-1}})\right) = 0,
\end{aligned}$$

mit $\tilde{\lambda}_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ geeignet. Geht die Feinheit von η gegen null folgt

$$\begin{aligned}
Spur(e^{-tP^*P} - e^{-tPP^*}) &= Spur(E_0 - E'_0)\\
&= \dim Kern(P) - \dim Kern(P^*)\\
&= Ind(P),
\end{aligned}$$

und dieser existiert nach Korollar 5.4.

□

Bemerkung 6.7 Zum Rechnen mit äquivalenten Spektralscharen eines Operators T wie im Satz 6.6 sei folgendes angemerkt:

1. Da

$$\begin{aligned}
(Eh_1|h_2)_H &= (U^*E'Uh_1|h_2)_H,\ h_1,h_2 \in Kern(P)^\perp\\
&= (E'Uh_1|Uh_2),
\end{aligned}$$

   ergibt sich die Äquivalenz

$$0 \neq x \in Kern(E) \Leftrightarrow 0 \neq Ux \in Kern(E'), \tag{6.7}$$

   also

$$Spur(U^*E'_\lambda U - E'_\lambda) = 0. \tag{6.8}$$

2. Es gelte die Spektralzerlegung $\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(E_\lambda h_1|h_2) = (Th_1|h_2)$ für alle $h_1, h_2 \in D(T)$. Dann folgt für die Zerlegung von T^*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(E'_\lambda \tilde{h}_1|\tilde{h}_2) &= (T^*\tilde{h}_1|\tilde{h}_2)\\
&= (UTU^*\tilde{h}_1|\tilde{h}_2)\\
&= (TU^*\tilde{h}_1|U^*\tilde{h}_2)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(E_\lambda U^*\tilde{h}_1|U^*\tilde{h}_2)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d(UE_\lambda U^*\tilde{h}_1|\tilde{h}_2)\ \ \textit{für alle } \tilde{h}_1,\tilde{h}_2 \in D(T^*),
\end{aligned}$$

und somit $E'_\lambda = UE_\lambda U^*$.

6.3 Die Indexformel für Superoperatoren

Die Indexformel für Superoperatoren ist eine reine Umformulierung des bisherigen Resultats. Dafür gelten folgende Definitionen beziehungsweise Notationen:

1. Jede Involution $\Theta : V \to V$ definiert eine *Graduierung* des Vektorraumes V gemäß
$$V_\Theta = V^+ \oplus V^- \tag{6.9}$$
in den positiven und negativen Eigenraum von Θ.

2. Ein linearer Operator $T : V_\Theta \to V_\Theta$ heißt *graduierungserhaltend,* falls für die Einträge der kanonischen Matrixdarstellung bezüglich der Graduierung V_Θ
$$T_{+-} = 0 = T_{-+} \tag{6.10}$$
gilt.

3. Die *Superspur* von T auf V_Θ ist definiert als
$$Spur^s(T) := Spur(T_{++}) - Spur(T_{--}). \tag{6.11}$$

4. Sei $T : V^+ \to V^-$ ein linearer Operator, dann ist $\hat{T} : V_\Theta \to V_\Theta$, mit
$$\hat{T} := \begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} T^*T & 0 \\ 0 & TT^* \end{pmatrix} \tag{6.12}$$
der T *zugehörige graduierungserhaltende Superoperator* .

Aus diesen Definitionen folgt direkt:

Korollar 6.8 *Es sei $P : \mathcal{C}^\infty(E^+) \to \mathcal{C}^\infty(E^-)$ ein elliptischer Pseudo-Differential-Operator positiver Ordnung, dann gilt für alle $t > 0$:*
$$Ind(P) = Spur^s(e^{-t\hat{P}}). \tag{6.13}$$

Bemerkung 6.9 Für den Rest dieser Arbeit sei

$$P : \mathcal{C}^\infty(E^+) \to \mathcal{C}^\infty(E^-) \tag{6.14}$$

ein elliptischer Pseudo-Differential-Operator der Ordnung $\frac{m}{2} > 0,\ m \in \mathbb{R}$. Der zugehörige graduierungserhaltende Superoperator

$$\hat{P} : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(E) \tag{6.15}$$

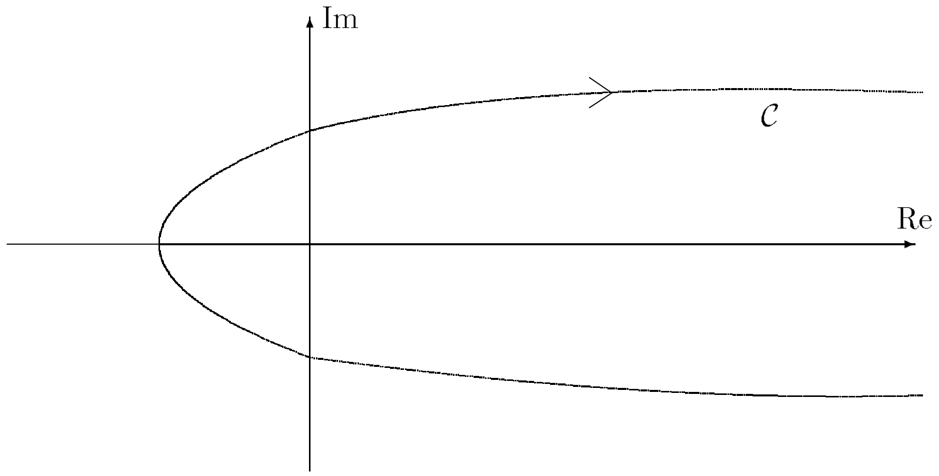
ist ein elliptischer Pseudo-Differential-Operator der Ordnung m. Das Vektorbündel E ist in den Anwendungen ein *Spinorenbündel*, welches eine natürliche Graduierung besitzt. Diese Besonderheiten spielen im weiteren keine Rolle und werden deshalb unterdrückt. Eine detaillierte Einführung in die Theorie beziehungsweise Darstellung der Zusammenhänge kann man zum Beispiel in [BGV] finden.

7 Asymptotische Entwicklung des Indexes

Die asymptotische Entwicklung benutzt die t-Unabhängigkeit der McKean-Singer Indexformel um eine Darstellung des Indexes als Integral über ein *Indexmaß* $\mu(P)$ zu finden. Diese Darstellung ist eine wesentliche technische Vorbereitung für weitere Betrachtungen, an dessen Ende zum Beispiel der Atiyah-Singer-Indexsatz steht.

7.1 Komplexe Symbolfunktionen

Sei $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve folgender Art



mit der Eigenschaft $Dist(\mathcal{C}, \mathbb{R}_+) \geq 1$. Dann gilt

$$|x - \zeta|^{-1} \leq 1,\ falls\ (x, \zeta) \in Spek(\hat{P}) \times \mathcal{C}, \tag{7.1}$$

und der Residuensatz liefert

$$e^{-tx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta}(x-\zeta)^{-1}\, d\zeta. \tag{7.2}$$

Hierbei und für den Rest dieser Arbeit ist $t > 0$ und reell. Mit dem Funktionalkalkül folgt die Darstellung

$$e^{-t\hat{P}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta}(\hat{P}-\zeta)^{-1}\, d\zeta. \tag{7.3}$$

Diese Kurvenintegraldarstellung des Superoperators, dessen Spur den Index von P liefert, ermöglicht völlig neue rechentechnische Manipulationen, um eine Asymptotik für den Index zu berechnen. Grundhilfsmittel sind hierbei Scharen von Pseudo-Differential-Operatoren, die über Symbolfunktionen definiert werden, die von einem zusätzlichen komplexen Parameter $\zeta \in \mathbb{C}$ abhängen.

Definition 7.1

1. *Ist q eine Funktion, so daß*

   i) $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{C})$,

   ii) $q(\cdot, \xi, \zeta)$ *kompakten Träger hat und*

   iii) *für alle Multiindices α, β, γ eine Konstante $c_{\alpha\beta\gamma}$ existiert, so daß*

   $$\begin{aligned} &|D_x^\alpha D_\xi^\beta D_\zeta^\gamma q(x,\xi,\zeta)| \\ \leq\ & c_{\alpha\beta\gamma}(1+|\xi|+|\zeta|^{\frac{1}{m}})^{m-|\beta|-m|\gamma|} \quad \textit{für alle } (x,\xi,\zeta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{C}, \end{aligned}$$

   dann heißt q ein komplexes Symbol *der Ordnung m. Mit $S^m_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ sei die Menge aller komplexen Symbolfunktionen der Ordnung m bezeichnet.*

2. *Eine komplexe Funktion $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{C})$ heißt* homogen der Ordnung m *, falls*

   $$q(x, s\xi, s^m\zeta) = s^k q(x,\xi,\zeta) \tag{7.4}$$

   für alle $s \geq 1$.

3. *Die Menge der graduierungserhaltenden Pseudo-Differential-Operatoren mit komplexem Symbol $q \in S^m_{\mathbb{C}}(E)$ wird definiert als*

   $$\mathcal{P}^m_{\mathbb{C}}(E,E) = \{Q \mid Q(\zeta) : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(E)\}. \tag{7.5}$$

Diese Definition bedarf einiger Erläuterungen zu den gemachten Konventionen, Besonderheiten und direkten Konsequenzen:

Bemerkung 7.2

1. Analog Bemerkung 4.2 müßte das Symbol q eines Pseudo-Differential-Operators mit komplexem Parameter konsistenzhalber von $\tilde{x}$, dem Bild von x unter einer beliebigen Karte ϕ abhängen, und nicht von $x \in M$. Da im folgenden eine endliche Überdeckung fest gewählt wird, und das zu erreichende Resultat unabhängig von der Wahl der Karten ist, wird hier auf diese Unterscheidung verzichtet.

2. Man beachte unbedingt, daß Definition 7.1 angepaßt an die Konvention ist, daß $\hat{P}$ ein Pseudo-Differential-Operator der Ordnung $m > 0$ ist. m ist in dieser Definition kein freier Parameter.

3. Trivialerweise bedingt die Homogenität eines Symbols sofort die Erfüllung der Eigenschaft (7.4).

4. Ein Standardbeispiel für eine komplexe Symbolfunktion aus $S_{\mathbb{C}}^{-m}(\mathbb{R}^n)$ ist die Funktion $q(x,\xi,\zeta) := (\xi^m - \zeta)^{-1}$. Da
$$\frac{1}{(t\xi)^m - t^m\zeta} = t^{-m}\frac{1}{\xi^m - \zeta} \quad , \tag{7.6}$$
ist q homogen der Ordnung m.

5. Für alle $l \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle Operatoren Q mit Symbol $\sigma(Q) \in S_{\mathbb{C}}^{-k}(\mathbb{R}^n)$, $k > k_0$ gilt: Die Operatornorm bezüglich den Sobolevnormen $||\cdot||_{-l}$ und $||\cdot||_l$ erfüllt
$$||Q(\zeta)||_{-l,l} \leq c(1+|\zeta|)^{-l} \tag{7.7}$$
für beliebiges $\zeta \in \mathbb{C}$. Diese Eigenschaft ist der Schlüssel um mittels Variation der ζ „schöne“ Pseudo-Differential-Operatoren $E(t)$ zu definieren, deren Spuren die Spur des Operators $e^{-t\hat{P}}$ gut genug approximieren.

7.2 Approximation der Superspur von $\mathbf{e^{-t\hat{P}}}$

Der folgende Satz beruht auf dem in Satz 2.9 eingeführten Symbolkalkül und ist das entscheidende technische Lemma für die folgende Approximation:

Satz 7.3 *Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und $R \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}^N(E,E)$, so daß*
$$||(\hat{P}-\zeta)^{-1} - R(\zeta)||_{-l,l} \leq c_l(1+|\zeta|)^{-l-1} \tag{7.8}$$
für alle $\zeta \in \mathcal{C}$.

Beweis. Zunächst beschränkt man sich auf einen beliebigen Kartenbereich $U_i \subset M$ und konstruiert lokal einen Operator R_N^i, der eine Parametrix *endlicher Ordnung N* für den Operator $\hat{P}_i - \zeta$ ist. Das heißt:

i) $\sigma_L(R^i_N(\zeta)) \in S^{-m}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$,

ii) $\sigma(R^i_N(\zeta)(\hat{P}_i - \zeta)) - I \in S^{-m-N}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$.

Sei hierzu auf U_i

$$\sigma(\hat{P}_i) = p_0 + \cdots + p_m, \tag{7.9}$$

also mit Bemerkung 7.2.3

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{P}_i - \zeta) &= p_0 + \cdots + p_{m-1} + (p_m - \zeta) \\ &=: p'_0 + \cdots + p'_m. \end{aligned}$$

Man definiert

$$\begin{aligned} r^i_0 &:= (p_m - \zeta)^{-1} \\ r^i_p &:= r^i_0 \underbrace{\sum_{\substack{j<\kappa \\ |\alpha|+j+m-k=\kappa}}}_{Ordnung: -(m+\kappa)} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi r^i_j D^\alpha_x p'_k \end{aligned}$$

und den Operator $R^i_N(\zeta)$ auf U_i über sein Symbol

$$\sigma(R^i_N(\zeta)) := r^i_0 + \cdots + r^i_N. \tag{7.10}$$

Die obigen Aussagen $i, ii)$ ergeben sich durch iterierte Anwendung des Symbolkalküls 2.9, denn

$$\begin{aligned} \sigma(R^i_N(\zeta)(\hat{P} - \zeta)) &= \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi (r^i_0 + \cdots + r^i_N) D^\alpha_x \left(\sum_{k=0}^m p'_k \right) \\ &= \sum_{\kappa>0} \sum_{j<\kappa} \sum_{|\alpha|+j+m-k=\kappa} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi r^i_j D^\alpha_x p'_k, \end{aligned}$$

wobei

$$\sum_{j<\kappa} \sum_{|\alpha|+j+m-k=\kappa} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi r^i_j D^\alpha_x p'_k \in S^{-N-\kappa}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) \subset S^{-n-1}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n) \ \textit{für alle}\ \kappa > 0, \tag{7.11}$$

denn die Ordnung dieses Terms ist $k - m - j - |\alpha| = \kappa$. Also ist der Anteil von $\sigma(R^i_N(\zeta)(\hat{P}_i - \zeta))$, der zur Symbolklasse $S^{-N-1}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ gehört, gerade $\frac{r^i_{N+1}}{-r^i_0}$. Sei R_{N+1} der durch das Symbol r^i_{N+1} definierte Operator, dann läßt sich der Anteil des Terms $\sigma(R^{N+1}_i(\zeta)(\hat{P}_i - \zeta))$ mit Ordnung $-(N+1)$ berechnen zu

$$Ord_{-N-1}(\sigma(R^i_N(\zeta)(\hat{P}_i - \zeta)) + Ord_{-N-1}(\sigma(R_{N+1})(\hat{P}_i - \zeta))$$

$$= \quad -\frac{r^i_{N+1}}{r^i_0} + Ord_{-N-1}\Big(\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\underbrace{D^\alpha_\xi r^i_{N+1}}_{Ordnung: -(N+1+|\alpha|+m)} \underbrace{D^\alpha_x \left(\sum_{k=0}^m p'_k \right)}_{Ordnung:\ k}}_{Höchste\ Ordnung: -(N+1),\ falls\ |\alpha|=0,\ k=m} \Big)$$

$$= \quad -\frac{r^i_{N+1}}{r^i_0} + r^i_{N+1} \cdot p'_m = 0.$$

Induktiv folgt hieraus:

i) $\sigma_L(R^i_N(\zeta)) = (p_m - \zeta)^{-1} \in S^{-m}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, genauer gilt sogar $r^i_j \in S^{-m-j}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$,

ii) $\sigma(R^i_N(\zeta)(\hat{P}_i - \zeta)) - I \in S^{-m-N}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, also die oben gemachte Behauptung für die lokal konstruierte „endliche“ Parametrix R^i_N.

Der Rest beruht auf der üblichen Technik der Zusammensetzung des lokalen Resultats mit Hilfe einer glatten Partition der eins: Sei also $(\rho_i)_{i \in I}$ eine einer endlichen Überdeckung (M ist kompakt) untergeordnete glatte Partition der eins. Nun wählt man $N \in \mathbb{N}$ groß genug gemäß Gleichung 7.7 aus Bemerkung 7.2, so daß mittels

$$R := R^N := \sum_{i \in I} \rho_i R^i_N \tag{7.12}$$

folgt:

$$\begin{aligned} ||(\hat{P} - \zeta)^{-1} - R(\zeta)||_{-l,l} &\overset{Folgerung\ 4.9}{\leq} ||(\hat{P} - \zeta)^{-1} - R(\zeta)||_{-(l+1),l+1} \\ &\overset{Bemerkung\ 7.2}{\leq} c_l(1 + |\zeta|)^{-l-1}. \end{aligned}$$

□

Über die in Satz 7.3 konstruierte endliche Parametrix R ist es nun möglich, approximierende Operatoren $E(t)$ für $e^{-t\hat{P}}$ zu definieren, so daß gleichzeitig eine beliebig gute Approximation der Spur erreicht wird. Dazu definiert man über den Funktionalkalkül

$$E(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} R(\zeta) e^{-t\zeta}\, d\zeta, \tag{7.13}$$

und es folgt

$$t^{-k}||e^{-t\hat{P}} - E(t)||_{-k,k} \quad \overset{(7.2)}{\leq} \quad t^{-k} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} ||(\hat{P} - \zeta)^{-1} - R(\zeta)||_{-k,k} e^{-t\zeta}\, d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad t^{-k+1}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}}\left|\left|\left(\hat{P}-\frac{\zeta}{t}\right)^{-1}-R\left(\frac{\zeta}{t}\right)\right|\right|_{-k,k}|e^{-\zeta}||\,d\zeta| \\
&\overset{Satz\ 7.3}{\leq} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} t^{-(k+1)}\left|\left(1+\left|\frac{\zeta}{t}\right|\right)\right|^{-k-1}|\,d\zeta| \\
&= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}}|(t+|\zeta|)|^{-(k+1)}|\,d\zeta|<\infty,
\end{aligned}$$

kurz

$$||e^{-t\hat{P}}-E(t)||_{-k,k}=O(t^k),\ t\to 0. \tag{7.14}$$

Mit den Sobolev-Einbettungssätzen gilt für $k>\frac{n}{2}$

$$||e^{-t\hat{P}}-E(t)||_{\infty,\infty}=O(t^k),\ t\to 0, \tag{7.15}$$

und da die Spur stetig ist bezüglich dieser Operatornorm

$$Spur^s(e^{-t\hat{P}})-Spur^s(E(t))=O(t^k),\ t\to 0. \tag{7.16}$$

7.3 Entwicklung der Superspur von E(t)

Die weiteren Rechnungen konzentrieren sich auf den Operator $E(t)$, dessen Superspur sich als geeignete Approximation der Superspur von $e^{-t\hat{P}}$, und damit des Indexes von P, erwiesen hat. Zunächst definiert man die lokalen Operatoren

$$E^i(t):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta}\rho_i R_N^i(\zeta)\,d\zeta, \tag{7.17}$$

wobei $(\rho_i)_i$ die Partition aus dem Beweis des Satzes 7.3 sei. Dies ergibt für die Superspur

$$Spur^s(E(t))=Spur^s\left(\sum_{i\in I}E^i(t)\right)=\sum_{i\in I}Spur^s(E^i(t)). \tag{7.18}$$

Für die Symbole gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(E^i(t)) &= \frac{1}{2\pi i}\rho_i\int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta}\sigma(R_N^i(\zeta))\,d\zeta \\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\rho_i\int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta}r_j^i(x,\xi,\zeta)\,d\zeta \\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\rho_i\int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta}\frac{1}{t^k}\frac{d^k}{d\zeta^k}r_j^i(x,\xi,\zeta)\,d\zeta.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Jeder Summand aus Gleichung (7.19) erfüllt

$$e^i_{j,t}(x,\xi) := \frac{1}{2\pi i}\rho_i \int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta} \frac{1}{t^k} \frac{d^k}{d\zeta^k} r^i_j(x,\xi,\zeta)\, d\zeta \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n), \tag{7.20}$$

weil $\frac{d^k}{d\zeta^k} r^i_j$ homogen vom Grade $(-m-j-km)$ ist für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Also gilt auch für ihre Summe

$$\sigma(E^i(t)) \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \;\; \textit{für alle } t > 0. \tag{7.21}$$

Die über die Symbole $\sigma(E^i_j(t)) := e^i_{j,t} \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ definierten Operatoren $E^i_j(t)$ sind demnach glättende Pseudo-Differential-Operatoren, die mit [W, Proposition IV.3.9] oder [MS, Lemma 7.6] glatte Kernfunktionen $K^i_{j,t}$ besitzen, so daß

$$E^i_j(t)(u(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} K^i_{j,t}(x,y)u(y)\, dy \;\; \textit{für alle } u \in \mathcal{C}^\infty(E). \tag{7.22}$$

Da die Rechnungen bezüglich einer festen Karte stattfinden, wird an dieser Stelle nicht zwischen $\tilde{x} = \phi(x)$ und x beziehungsweise $\tilde{E}^i_j(t)$ und $E^i_j(t)$ unterschieden (vergleiche (4.15) und Bemerkung 7.2). Da

$$\begin{aligned} E^i_j(t)(u(x)) &= \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{ix\cdot\xi} e^i_{j,t}(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^i_{j,t}(x,\xi)u(y)\, d\xi\, dy, \end{aligned}$$

folgt

$$K^i_{j,t}(x,y) = \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^{i(x-y)\cdot\xi} e^i_{j,t}(x,\xi)\, d\xi. \tag{7.23}$$

Einsetzen der Definition von $e^i_{j,t}$ ergibt

$$\begin{aligned} K^i_{j,t}(x,x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathbb{R}^n)^*}\int_{\mathcal{C}} e^{-t\zeta} r^i_j(x,\xi,\zeta)\, d\zeta\, d\xi \\ &\overset{\zeta\mapsto t\zeta}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathbb{R}^n)^*}\frac{1}{t}\int_{\mathcal{C}} e^{-\zeta} r^i_j\left(x,\xi,\frac{\zeta}{t}\right) d\zeta\, d\xi \\ &\overset{\xi\mapsto \sqrt[m]{t}\xi}{=} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt[m]{t}}\int_{(\mathbb{R}^n)^*}\int_{\mathcal{C}} e^{-\zeta} r^i_j\left(x,\frac{\xi}{\sqrt[m]{t}},\frac{\zeta}{t}\right) d\zeta\, d\xi \\ &\overset{Homogenit\ddot{a}t:-(j+m)}{=} \frac{1}{2\pi i} t^{-1} t^{-\frac{n}{m}} (t^{-\frac{1}{m}})^{-j-m} \int_{(\mathbb{R}^n)^*}\int_{\mathcal{C}} e^{-\zeta} r^i_j(x,\xi,\zeta)\, d\zeta\, d\xi \\ &= t^{\frac{j-n}{m}} \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^i_{j,1}(x,\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{7.24}$$

und

$$e^i_j(x) := \int_{(\mathbb{R}^n)^*} e^i_{j,1}(x,\xi)\, d\xi \tag{7.25}$$

hängt nur von M, P und der Metrik ab. Allerdings ist e_j unabhängig von t.

Lemma 7.4
$$\mu_j(\hat{P}) := \sum_{i\in I} \mu_j^i(\hat{P}) := \sum_{i\in I} e_j^i \rho_i \, dvol \tag{7.26}$$
ist ein beschränktes Maß auf M.

Beweis. Da $e_j^i = e_{j,t}^i \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, ist
$$|e_j^i(x,\xi)| \leq (1+|\xi|)^{-k} \tag{7.27}$$
für alle $k > 0$, und es folgt
$$|e_j^i(x)| \leq \int_{(\mathbb{R}^n)^*} |e_j^i(x,\xi)| \, d\xi \leq c_i \tag{7.28}$$
für alle $x \in M$.

□

Satz 7.5 *Es gilt die asymptotische Entwicklung*
$$Spur^s(e^{-t\hat{P}}) \sim \sum_{j\geq -n} t^{\frac{j}{m}} \int_M \mu_{j+n}(\hat{P}), \; t \to 0. \tag{7.29}$$

Beweis. Einsetzen aller vorherigen Definitionen und Resultate ergibt
$$\begin{aligned} Spur^s(E(t)) &\overset{(7.18)}{=} \sum_{i\in I} Spur^s(E^i(t)) \\ &\overset{(7.24)}{=} \sum_{i\in I}\sum_{j\geq 0} t^{\frac{(j-n)}{m}} \int_M \mu_j^i(\hat{P}) \\ &\overset{(7.26)}{=} \sum_{j\geq 0} t^{\frac{(j-n)}{m}} \int_M \mu_j(\hat{P}) \\ &= \sum_{j\geq -n} t^{\frac{j}{m}} \int_M \mu_{j+n}(\hat{P}). \end{aligned}$$
Dies liefert für $k > \frac{n}{2}$ mit (7.16)
$$Spur^s(e^{-t\hat{P}}) = \sum_{j\geq -n} t^{\frac{j}{m}} \int_M \mu_{j+n}(\hat{P}) + O(t^k), \; t \to 0, \tag{7.30}$$
also die Behauptung.

□

Die letzte Folgerung stellt den Index von P in einer geschlossenen Form als Integral über das zugehörige Indexmaß dar:

Folgerung 7.6 *Es existiert ein beschränktes* Indexmaß $\mu(P) := \mu_n(\hat{P})$, *so daß für den Index des Pseudo-Differential-Operators P gilt:*

$$Ind(P) = \int_M \mu(P). \tag{7.31}$$

Beweis. Satz 7.5 zeigt, daß

$$Ind(P) = Spur^s(e^{-t\hat{P}}) \sim \sum_{j \geq -n} t^{\frac{j}{m}} \int_M \mu_{j+n}(\hat{P}),\ t \to 0. \tag{7.32}$$

Da der Index des Operators P eine t-Invariante ist, folgt zunächst

$$\int_M \mu_{j+n}(\hat{P}) = 0 \ \ f\ddot{u}r\ alle\ j < 0. \tag{7.33}$$

Da für positive $j > 0$ die Folge $t^{\frac{j}{m}} \cdot Konstante \to 0$ für $t \to 0$, folgt außerdem

$$\int_M \mu_{j+n}(\hat{P}) = 0 \ \ f\ddot{u}r\ alle\ j > 0. \tag{7.34}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\sum_{j \geq -n} t^{\frac{j}{m}} \int_M \mu_{j+n}(\hat{P}) \to \int_M \mu_n(\hat{P}),\ t \to 0 \tag{7.35}$$

und die Folgerung ist bewiesen.

□

Aufgrund der Homogenitätseigenschaften der vorkommenden Symbole ergibt sich aus den Definitionen noch das interessante Nebenresultat

$$\dim M\ gerade \implies Ind(P) = 0. \tag{7.36}$$

Viel wichtiger ist jedoch die Bedeutung von Folgerung 7.6 für den Beweis der Indexsätze, wie sie in der Einleitung beschrieben wurde.

Literatur

[BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators,* Springer, New York, 1992

[C] A. Connes, *A survey of foliations and operator algebras* in *Operator Algebras and Applications,* Proc. Symp. Pur Math. **38**, Part I, Amer. Math. Soc., 1982, 521-628

[D] R.G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory,* Pure and Applied Mathematics **49**, Academic Press, London, 1972

[G] P.B. Gilkey, *The Index Theorem and the Heat Equation,* mathematics lecture series **4**, Publish or Perish Inc., Boston, 1974

[MV] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis,* Vieweg, Wiesbaden, 1992

[MS] C.C. Moore, C. Schoquet, *Global Analysis on Foliated Spaces,* MSRI Publications, Springer, New York, 1988

[P] R.S. Palais et al., *Seminar on the Atiyah-Singer Index Theorem,* Annals of Mathematical Studies **57**, Princeton University Press, Princeton, 1965

[W] R.O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds,* Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1980