Einleitung

Eines der Grundprobleme der Topologie ist es, topologische Räume zu klassifizieren. Die Klassifikation orientiert sich an sogenannten Invarianten dieser Räume, das heißt, an Eigenschaften, die sich unter bestimmten Modifikationen der Objekte nicht verändern.

Eine wichtige Invariante eines topologischen Raumes ist seine Homologie. Diese ist invariant unter Homöomorphismen und sogar unter Homotopieäquivalenzen. Umgekehrt heißt dies: Kennt man die Homologie eines Raumes, so ist dieser bis auf eine Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt, sofern noch eine schwache Homotopieäquivalenz bekannt ist.

Schränkt man das Klassifikationsproblem auf die Klasse der glatten kompakten Mannigfaltigkeiten ein, so steht mit den sogenannten Morsefunktionen ein wichtiges Hilfsmittel zur Verfügung. Kennt man nämlich eine einzige Morsefunktion genau genug[1], kann man die Ränge der jeweiligen Homologiegruppen abschätzen, die Euler-Poincaré-Charakteristik berechnen und den Homotopietyp der Mannigfaltigkeit angeben. Diese Aussagen lassen sich sogar unter bestimmten Voraussetzungen auf den nichtkompakten Fall ausdehnen, beziehungsweise läßt sich die genannte Abschätzung zur Gleichung ausbauen.

In dieser Arbeit wird zunächst eine Einführung in die Morsetheorie gegeben. In der Diskussion des Beispielraumes $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ werden die Methoden und Resultate verdeutlicht.

Im folgenden Kapitel wird mit den Torusvarietäten eine spezielle Klasse glatter Mannigfaltigkeiten eingeführt. Bei der Untersuchung ihrer Struktur wird insbesondere der Zusammenhang von Projektivität und der Konstruktion von Polyedern dargestellt.

Die Ergebnisse des 3.Kapitels beruhen auf dem Studium des in [Jurk] dargestellten Konstruktionsverfahrens für Morsefunktionen auf projektiven Torusvarietäten. Es ergeben sich Resultate über die Homologie und Charakteristik von Torusvarietäten, und die Möglichkeit mittels Abbildungen in entsprechende Symmetrische Gruppen Arrangements zu untersuchen, die einer Fahne Σ zugewiesen werden.

Im abschließenden Kapitel wird die Erweiterung des vorgestellten Konstruktionsverfahrens für Morsefunktionen auf lediglich kompakte Torusvarietäten diskutiert.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Knöller bedanken. Noch wichtiger als seine Anregungen zu und sein Einsatz für diese Arbeit war für mich seine Begeisterung für die Mathematik, die er auch auf mich übertragen konnte.

[1] Dies wird später noch exakt definiert.

Inhaltsverzeichnis

1 Morsefunktionen **3**

1.1 Definition und Eigenschaften 3

1.2 Eine Morsefunktion auf $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ 13

2 Torusvarietäten **29**

2.1 Definitionen 29

2.2 Struktur der Torusvarietäten 39

2.2.1 T_N-Operationen und -Orbits 39

2.2.2 Äquivariante holomorphe Abbildungen 44

2.2.3 Nichtsingularität und Kompaktheit 45

2.2.4 Kanonische Untermannigfaltigkeiten 46

2.3 Projektivität 51

3 Morsefunktionen auf projektiven Torusvarietäten **57**

3.1 Konstruktion von Morsefunktionen 57

3.2 Symmetrisierte Fahnen und Torusvarietäten 65

3.3 Spezielle Morsefunktionen, Homologie und Charakteristik 73

3.4 Abbildungen in symmetrische Gruppen 85

4 Morsefunktionen auf kompakten Torusvarietäten **100**

4.1 Beispiele und Bemerkungen 100

4.2 Zyklen und ähnliche Torusvarietäten 108

1 Morsefunktionen

1.1 Definition und Eigenschaften

Ein zentraler Begriff des gesamten Aufsatzes ist der der Morsefunktion. Die exakte Definition, die dafür notwendigen Vorarbeiten und einige grundlegende Eigenschaften, die die Motivation zur Untersuchung von Morsefunktionen bilden, werden der Inhalt des Abschnittes 1.1 sein.

Definition 1.1.1

1. Ein topologischer Hausdorffraum X mit abzählbarer Basis zusammen mit einem maximalen glatten Atlas $\mathcal{A} = \left((\phi_\lambda, U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right)$ n-dimensionaler Karten heißt eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n.

2. Ein topologischer Hausdorffraum X mit abzählbarer Basis zusammen mit einem maximalen Atlas $\mathcal{A} = \left((\phi_\lambda, U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\right)$ n-dimensionaler komplexer Karten heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n.

Bemerkung 1.1.2
Es folgt, daß eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n immer eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 2n ist. Die glatten Karten ergeben sich aus den komplexen durch den Übergang zu Real- und Imaginärteil sowohl der Abbildungen als auch der offenen Mengen.

Im restlichen Teil des Kapitels 1 seien X und Y glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.1.3
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt glatt:$\Longleftrightarrow$
Für alle $x \in X$ existieren Karten (ϕ,U) auf X und (ϕ',U') auf Y, so daß gilt:

1. $x \in U$.
2. $f(U) \subset U'$.
3. $\phi' \circ f/_U \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \phi'(U')$ ist glatte Funktion.

Definition 1.1.4
Sei mit **R** die Menge der reellen Zahlen bezeichnet. Für $x \in X$ definiert man:

1. $\bar{f} := \{g : X \to \mathbf{R};\ g = f \textit{ in einer Umgebung von } x\}$
   heißt der Keim von f in x, falls $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ *glatt*.

2. $\varepsilon_x := \{\bar{f};\ f : X \to \mathbf{R},\ f \textit{ glatt in einer Umgebung von } x\}$
   heißt der lokale Ring von X in x.

Bemerkung 1.1.5
Ist g eine glatte Abbildung von X nach Y, dann ist

$$g^* : \varepsilon_{g(x)} \longrightarrow \varepsilon_x, \qquad \bar{f} \longmapsto g^*(\bar{f}) := \overline{f \circ g}$$

ein Algebra-Homomorphismus.

Definition 1.1.6
Sei $x \in X$ beliebig. Eine Abbildung

$D : \varepsilon_x \longrightarrow \mathbf{R}.$

heißt eine Derivation in x, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. D ist $\mathbf{R}$-linear.

2. $D(\overline{f \cdot g}) = f(x) \cdot D(\bar{g}) + D(\bar{f}) \cdot g(x)$ für alle $\bar{f}, \bar{g} \in \varepsilon_x$.

Bemerkung 1.1.7
Da f(x)=g(x) für alle f,g aus ε_x mit $\bar{f} = \bar{g}$, sind alle Ausdrücke obiger Definition wohldefiniert.

Definition 1.1.8
$T_xX := \{D;\ D \textit{ ist Derivation in } x \in X\}$ heißt der Tangentialraum von X in x.

Bemerkung 1.1.9
[1] T_xX ist $\mathbf{R}$-Vektorraum [B-J, §3] und somit nach Definition ein Untervektorraum von $L(\varepsilon_x, \mathbf{R})$.

[2] Eine glatte Abbildung $g : X \longrightarrow Y$ induziert zu $x \in X$ mittels des Pullback

$$g^* : \varepsilon_{g(x)} \longrightarrow \varepsilon_x$$

die Tangentialabbildung

$$T_x g : T_x X \longrightarrow T_{g(x)} Y,\ D \longmapsto D \circ g^*.$$

[3] Sei Z eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Aus der Kettenregel folgt für glatte Abbildungen $g : X \longrightarrow Y,\ h : Y \longrightarrow Z$:

$$T_x(h \circ g) = T_{g(x)} h \circ T_x g.$$

Lemma 1.1.10
X:=$\mathbf{R}^n$ und $\overline{f}$ aus ε_0.Dann gilt:

1. $\mathrm{T}_0\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^n$.

2. $\overline{f} \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_i} |_0 (\overline{f}) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, i=1,...,n; bilden eine Basis von $\mathrm{T}_0\mathbf{R}^n$.

Beweis.
Zu 2.:
Da f glatt nahe 0 existieren Funktionen $g_1, ..., g_n$, glatt nahe 0, so daß gilt:
$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \cdot g_i(x)$.
Dies leisten die Funktionen
$g_i : x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(t \cdot x) dt$.
Nach dem Theorem von Leibnitz bezüglich der Differentiation parameterabhängiger Integrale sind alle diese Funktionen glatt nahe 0. Sei D nun eine beliebige Derivation aus $\mathrm{T}_0\mathbf{R}^n$ und
$\tilde{D} := \sum\limits_{i=1}^{n} D(\overline{x_i}) \frac{\partial}{\partial x_i} |_0,$
dann ergibt Einsetzen obiger Identität
$D(\overline{f}) = \tilde{D}(\overline{f})$.
Da für beliebige Tupel $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_0 \right) (\overline{x_k}) = a_k$$

gilt, folgt

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} |_0;\ i = 1, ..., n \right\} \text{ist linear unabhängig.}$$

(Klar: $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_0 \in \mathrm{T}_0\mathbf{R}^n$ für alle $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n$ beliebig.)
Hiermit ist die 2. Behauptung bewiesen.
Zu 1.:
Folgt direkt aus 2..

Folgerung 1.1.11
Sei (h,U) eine Karte, also

$h = (h_1, ..., h_n) : U \longrightarrow V \subset \mathbf{R}^n$ offen.

Dann ist $\{\frac{\partial}{\partial h_i} \mid_u;\ i = 1, ..., n\}$ eine Basis von T_uX für alle $u \in U$, mit

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \mid_u := \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_{h(u)} \circ (h^{-1})^* \ = \left(T_{h(u)} h^{-1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_{h(u)}\right).$$

Also:

$$T_uX \cong \mathbf{R}^n.$$

Satz 1.1.12
Sei $f : X \longrightarrow Y$ glatt und $x \in X$ beliebig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $x \in X$.
2. $T_x f$ Isomorphismus.

Beweis siehe [B-J, §5].

Definition 1.1.13
Sei $p \in X$ und $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ glatt.

1. p ist kritischer Punkt von f:$\Leftrightarrow$ $T_p f = 0$.
2. p ist nicht ausgearteter kritischer Punkt von f, wenn zusätzlich eine Karte (h,U) um p existiert, so daß

$$Hess_p(f) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \cdot \partial x_k} f \circ h^{-1}\left(h\left(p\right)\right)\right)_{i,k=1,\dots,n}$$

nicht ausgeartet ist, das heißt

$$Det\left(Hess_p\left(f\right)\right) \neq 0.$$

Nachdem alle notwendigen Vorbereitungen getroffen sind, kann nun die Definiton der Morsefunktionen folgen:

Definition 1.1.14
Sei $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ glatt, so daß alle kritischen Punkte von f nicht ausgeartet sind. Dann heißt f $\underline{Morsefunktion}$ auf X.

$\underline{Notation.}$
1. $f\ MF \Leftrightarrow f$ ist Morsefunktion.
2. $MF(X) = \{Morsefunktionen\ auf\ X\}$.

Für den Umgang mit kritischen Punkten ist folgendes Hilfsmittel nützlich:

Bemerkung 1.1.15
Sei $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ glatt, $x \in X = \mathbf{R}^n$. Dann gilt:

$$T_x f = 0 \Leftrightarrow grad\ f(x) = 0 \quad (\in \mathbf{R}^n).$$

Beweis. Es gilt:$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} |_x;\ i = 1, ..., n \right\}$ ist eine Basis von$T_x \mathbf{R}^n$. (1.1.10)

Ferner: $T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_x \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} |_x \circ f^*$.

Da $T_x f = 0 \Leftrightarrow T_x f(D)(\bar{g}) = 0$ für alle $D \in T_x \mathbf{R}^n$ und $\bar{g} \in \varepsilon_{f(x)}$ bleibt zu zeigen:

$$\begin{aligned} & T_x f(D)(\bar{g}) = 0 \text{ für alle } D \in T_x \mathbf{R}^n \text{ und } \bar{g} \in \varepsilon_{f(x)} \\ \overset{!}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Setze speziell $\bar{g} := \overline{id}$:

$$\begin{aligned} T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_x \right) (\overline{id}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_x \circ f^* \right) (\overline{id}) = \frac{\partial}{\partial x_i} |_x \left(\overline{id \circ f} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} |_x \left(\bar{f} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \text{ für alle } i = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Damit ist "$\Rightarrow$" gezeigt. Die Umkehrung folgt direkt aus der Kettenregel.

Als erstes Beispiel wird der n-dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbf{P_n C}$ vorgestellt:

Beispiel 1.1.16
Sei mit $\mathbf{C}$ die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet.

$$\begin{aligned} \mathbf{P_n C} &:= \left\{ 1 - \dim_{\mathbf{C}}\ Unterräume\ von\ \mathbf{C}^{n+1} \right\} \\ &= \left\{ [z_o, ..., z_n];\ (z_0, ..., z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei soll die Klammerung $[\cdot]$ die Äquivalenzklassenbildung bezüglich folgender Relation bedeuten:

$$z := (z_0, ..., z_n) \sim \tilde{z} := (\tilde{z}_0, ..., \tilde{z}_n)$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{Es existiert } \lambda \in \mathbf{C}, \text{ so daß } \tilde{z} = \lambda \cdot z.$$

$\mathbf{P_n C}$ wird, mit der Finaltopologie bezüglich dieser Klassenbildung versehen, zu einem topologischen Raum. Die Hausdorffeigenschaft ist trivial erfüllt. Da $\mathbf{C}^{n+1}$ eine abzählbare Basis besitzt, existiert ein solche Basis auch für $\mathbf{P_n C}$. Mit $S^n := \{x \in \mathbf{R}^n;\ \|x\|_2 = 1\}$ ergibt sich

$$\mathbf{P_n C} \cong \frac{S^{2n+1}}{S^1},$$

wobei $'\cong'$ in der Klasse der topologischen Räume homöomorph bedeutet.
Damit folgt, daß $\mathbf{P_n C}$ kompakt und zusammenhängend ist.

Behauptung: $\mathbf{P_n C}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n.

Beweis. Definiere zunächst einen Atlas auf $\mathbf{P_n C}$:
$U_k := \{[z] = [z_0, ..., z_n] \in \mathbf{P_n C};\ z_k \neq 0\},\ k = 0, ..., n.$
Es ergibt sich:

1. $U_k \subset \mathbf{P_n C}$ offen (Finaltopolgie).
2. $\mathbf{P_n C} \subset \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_i$.

$$\text{Sei } \phi_k : \begin{array}{rcl} U_k & \longrightarrow & U_k' := \mathbf{C}^n, \\ {[z]} & \longmapsto & (\frac{z_1}{z_k}, ..., \underbrace{\frac{z_0}{z_k}}_{k-te\ Stelle}, ..., \frac{z_n}{z_k}), \quad k = 1, ..., n, \end{array}$$

und speziell

$$\phi_0 : \begin{array}{rcl} U_0 & \longrightarrow & U_0' := \mathbf{C}^n, \\ {[z]} & \longmapsto & (\frac{z_1}{z_0}, ..., \frac{z_n}{z_0}). \end{array}$$

Damit ist $\phi_k,\ k = 0, ..., n$, wohldefiniert und bijektiv.
Für die Umkehrabbildungen gilt

$$\phi_k^{-1} : \begin{array}{rcl} U_k' & \longrightarrow & U_k, \\ (z_1, ..., z_n) & \longmapsto & [z_k, z_1, ..., z_{k-1}, 1, z_{k+1}, ..., z_n],\ k = 1, ..., n, \end{array}$$

und speziell
$\phi_0^{-1} : U_0' \longrightarrow U_0,\ (z_1, ..., z_n) \longmapsto [1, z_1, ..., z_n].$

Für $k \neq l$, beide aus $\{1, ..., n\}$ ergibt sich

$$\phi_k\left(U_k \cap U_l\right) = \{w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbf{C}^n;\ w_l \neq 0\}$$

$$\Rightarrow \quad \phi_l \circ \phi_k^{-1} : \phi_k\left(U_k \cap U_l\right) \longrightarrow \phi_l\left(U_k \cap U_l\right),$$

$$(w_1, ..., w_n) \longmapsto \Big(\tfrac{w_1}{w_l}, ..., \underbrace{\frac{w_k}{w_l}}_{l-te\ Stelle}, ..., \underbrace{\frac{1}{w_l}}_{k-te\ Stelle}, ..., \tfrac{w_n}{w_l}\Big).$$

Analog ergeben sich die Kartenwechsel für die Kombinationen mit der Karte (ϕ_0, U_0) zu holomorphen Abbildungen und mittels Indextausch folgt sogar die Biholomorphie

$$\Rightarrow \mathcal{B} := \left((\phi_k, U_k)_{k \in \{0,...,n\}}\right) \text{ ist ein komplexer Atlas.}$$

Sei nun $\mathcal{A}$ der zu $\mathcal{B}$ zugehörige maximale Atlas, so ist $\mathbf{P_n C}$ mit $\mathcal{A}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Behauptung:

$$g : \mathbf{P_n C} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad [z_0, ..., z_n] \longmapsto \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot |z_i|^2}{\sum\limits_{i=0}^{n} |z_i|^2}$$

ist eine Morsefunktion auf $\mathbf{P_n C}$, falls alle $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$ und paarweise verschieden sind.

Beweis. Die hierfür notwendigen Beweismethoden werden im Abschnitt 1.2 an einem komplizierteren Beispiel angewandt. Da außerdem das Resultat nach [Mil, §4] wohlbekannt ist, wird der Beweis hier nicht durchgeführt.

Bemerkung 1.1.17
Analog zu obiger Einführung lassen sich auch projektive Räume $\mathbf{P_n R}$ als Menge der eindimensionalen Unterräume des $\mathbf{R}^n$ einführen. Es ergibt sich analog:

1. $\mathbf{P_n R}$ ist ein topologischer Hausdorffraum.
2. $\mathbf{P_n R} \cong \frac{S^n}{S^0}$.
3. $\mathbf{P_n R}$ ist kompakt und zusammenhängend.
4. $\mathbf{P_n R}$ ist eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 1.1.18
Sei $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ *glatt*. Dann ist $C_f := \{x \in X;\ x \text{ kritisch bezüglich } f\}$ abgeschlossen in X.

Beweis. Sei $y \in \overline{C_f}$ beliebig. Dann sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ glatt, $y \in U$ und $U \subset \mathbf{R}^n$ offen.

Es existiert eine Folge $(y_m)_{m \in \mathbf{N}} \subset C_f$ mit $\lim_{n \to \infty} y_m = y$, wobei mit $\mathbf{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnet sei.

Mit Bemerkung 1.1.15 folgt

$\frac{\partial}{\partial x_i} f(y_m) = 0$ für alle $i = 1, ..., n$.

Da f glatt, also stetig differenzierbar, folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(y) = \lim_{m \to \infty} \frac{\partial}{\partial x_i} f(y_m) = \lim_{m \to \infty} 0 = 0 \text{ für alle } i = 1, ..., n$$

$\Rightarrow \quad T_y f = 0 \quad$ nach Bemerkung 1.1.15

$\Rightarrow \quad y \in C_f$.

Bemerkung 1.1.19
Sei $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ *glatt*, dann liegen die nicht ausgearteten kritischen Punkte isoliert.

Beweis. Da es sich um ein lokales Problem handelt, kann man ohne Einschränkung von

$f : U \longrightarrow \mathbf{R}$, $U \subset \mathbf{R}^n$ offen

ausgehen. Außerdem sei ohne Einschränkung $x = 0$ und $f(x) = 0$. Für die Abbildung $grad\ f : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ gilt

$J\,(grad\ f, x) = Hess_0 f$.

Da $Det\,(Hess_x f) \neq 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen die lokale Diffeomorphie von f

$\Rightarrow$ es existiert eine Umgebung U', so daß $(grad\ f)\ |_{U'}$ injektiv

$\Rightarrow grad\ f \neq 0$ für alle $x \in U'$

$\Rightarrow 0 \in U \subset \mathbf{R}^n$ isolierte Nullstelle von $grad\ f$.

$\Rightarrow$ Behauptung.

Folgerung 1.1.20
Eine Morsefunktion hat auf einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit höchstens endlich viele kritische Punkte.

Lemma 1.1.21 (Morse-Lemma)
Sei $p \in X$ ein nicht ausgearteter kritischer Punkt von $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ *glatt*.
Dann existiert eine Karte $U \xrightarrow{\phi} V,\ x \longmapsto (x_1, ..., x_n)$ um p, so daß gilt:

1. $x_1(p) = \cdots = x_n(p) = 0$.

2. $f(x) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2$ für alle $x \in U$.

3. $\lambda =: \mathrm{Ind}_x f$ ist unabhängig von der Wahl der Karte.

Beweis. Nachzulesen in [Mil, §2].

Folgerung 1.1.22
Aus dem Beweis folgt:
$\mathrm{Ind}_x f = \#\{\eta;\ \eta \textit{ ist negativer Eigenwert von } Hess_x f\}$

Beispiel 1.1.23
Sei $S^1 \times S^1 := T_1 \subset \mathbf{R}^3$ der reelle Torus. Dann ist die Höhenfunktion auf dem aufgestellten T_1 eine Morsefunktion. Man sieht, daß der Index eines kritischen Punktes Informationen über die Geometrie des Raumes gibt. So liegt für $\mathrm{Ind}_p h = 1$ ein Sattelpunkt, für $\mathrm{Ind}_p h \in \{0, 2\}$ ein Maximum beziehungsweise ein Minimum vor. Siehe hierzu Abbildung 1.1.

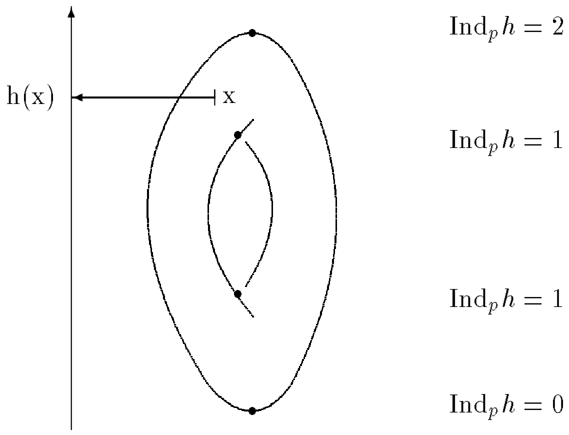


Abbildung 1.1

Satz 1.1.24
Sei $K \subset X$ kompakt, $\epsilon > 0$, $f \in \varepsilon(X)$. Dann existiert eine Morsefunktion $g : X \longrightarrow \mathbf{R}$, so daß

$$\| f\,|_K - g\,|_K \|_\infty < \epsilon.$$

Insbesondere:

$$X \text{ kompakt} \Rightarrow \varepsilon(X) = \overline{MF(X)}^{\|\cdot\|_\infty}.$$

Beweis. Der Beweis beruht im wesentlichen auf dem Theorem von Whitney, welches besagt, daß sich X als eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^{2n+1}$ darstellen läßt. Nun definiert man

$g_a(x) := f(x) + (a \mid x),\ a \in \mathbf{R}^{2n+1}$,

und mit Hilfe des Theorems von Sard [B-J] folgt, daß g_a eine Morsefunktion ist, für fast alle $a \in \mathbf{R}^{2n+1}$.

Details nachzulesen in [Mil].

Folgerung 1.1.25
Sei X eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^{2n+1}$, dann ist

$$f_p : X \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto \|x - p\|$$

eine Morsefunktion für fast alle $p \in \mathbf{R}^{2n+1}$.

Der nun folgende Satz schafft die Verbindung von den topologischen Eigenschaften einer glatten Mannigfaltigkeit X zu den differenziellen Eigenschaften einer Morsefunktion auf X.

Satz 1.1.26
Sei X eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit und $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ MF. Dann gilt:

1. $b_k(x) := rang H_k(X) \leq \#\{p; \mathrm{Ind}_p f = k\} =: h_k(f),\ k \in \mathbf{N}_0$ (Morseungleichung).
2. $\chi(X) := \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k h_k(f) =: \chi(f)$.

Beweis. Siehe [Mil, §4].

Bemerkung 1.1.27
Für glatte, kompakte Mannigfaltigkeiten X ist nach 1.1.26 also die Charakteristik $\chi(f)$ einer beliebigen Morsefunktion f auf X gleich der Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi(X)$. Die Summation ist hierbei endlich, da es wegen der Kompaktheit von X nur endlich viele kritische Punkte geben kann. Aus dem Morselemma 1.1.21 folgt sogar, daß die Summation spätestens bei $k = n$ endet.

Satz 1.1.28
Sei $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ eine Morsefunktion, so daß $f^{-1}((-\infty, a])$ kompakt für alle $a \in \mathbf{R}$.
Dann existiert ein CW-Raum X' mit

1. $X \simeq X'$.

2. $\#\{k - Zellen\ von X'\} = h_k(f)$ für alle $k \in \mathbf{N}_0$.

Beweis. Siehe [Mil, §3].

Bemerkung 1.1.29
Im Beweis wird der Raum X' induktiv über die einzelnen kritischen Punkte in Abhängigkeit vom jeweiligen Index aufgebaut.

Sind alle kritischen Punkte und deren Indices einer Morsefunktion auf einer glatten kompakten Mannigfaltigkeit X bekannt, so ist der Homotopietyp dieser Mannigfaltigkeit schon eindeutig bestimmt.

Die beiden letzten Sätze zeigen, daß die wesentliche Information einer Morsefunktion in Anzahl und Art der kritischen Punkte steckt. Deshalb definiert man:

Definition 1.1.30
Zwei Morsefunktionen $f,\ g \in MF(X)$, X glatte Mannigfaltigkeit, heißen äquivalent, falls beide dieselben kritischen Punkte haben, und in diesen kritischen Punkten die Indices übereinstimmen.

Notation. $f \sim g$.

1.2 Eine Morsefunktion auf $\widetilde{\mathbf{C}}^n$

Da der Raum $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ im weiteren Verlauf noch öfter als Beispiel für die verschiedensten Sachverhalte herangezogen werden wird[2], wird zunächst sehr ausführlich seine Struktur untersucht. Weiterhin werden bei der Konstruktion einer Morsefunktion, wie auch bei dem folgenden Beweis, Verfahren angewandt und erklärt, die häufig bei diesen Problemstellungen Anwendung finden.
Im Abschnitt 1.2 gelte für $n \in \mathbf{N}$ die Konvention: $m := n - 1$.

Definition 1.2.1

$$\widetilde{\mathbf{C}}^n := \{(z,[l]) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C};\ z \in [l]\},$$

wobei nach der Definition der Äquivalenzklassen $[\cdot]$ gilt:
$z \in [l] \Leftrightarrow$ es existiert $\lambda \in \mathbf{C}$, so daß $z = \lambda \cdot l$.

[2] Im Beispiel 2.1.22 wird $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ auch als Torusvarietät dargestellt werden.

$\widetilde{\mathbf{C}}^n$ wird, mit der Unterraumtopologie bezüglich $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ versehen, zu einem topologischen Raum. Aus der Definition von $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ als Teilmenge von $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ folgt direkt die Hausdorffeigenschaft und die Existenz einer abzählbaren Basis.

Um die Struktur dieses Raumes etwas kennenzulernen, ist es nützlich, folgende Abbildung zu betrachten:

$\omega : \widetilde{\mathbf{C}}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n, \quad (z,[l]) \longmapsto z.$

Lemma 1.2.2

1. $\omega^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P_m C}$.
2. $\omega : \widetilde{\mathbf{C}}^n \setminus \{0\} \times \mathbf{P_m C} \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$.

Beweis.

Zu 1.:

Sei $(z,[l]) \in \widetilde{\mathbf{C}}^n$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (z,[l]) \in \{0\} \times \mathbf{P_m C} \\ \Leftrightarrow \quad & z = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \omega\left((z,[l])\right) = z = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (z,[l]) \in \omega^{-1}(0). \end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Zu 2.:

(i) Sei zunächst $z \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ beliebig

$\Rightarrow [z] \in \mathbf{P_m C}$

$\Rightarrow (z,[z]) \in \widetilde{\mathbf{C}}^n$, denn $z \in [z]$

$\Rightarrow \omega\left((z,[z])\right) = z$

$\Rightarrow \omega$ surjektiv.

(ii) Seien $(\tilde{z},[\tilde{l}]),\ (z,[l]) \in \tilde{\mathbf{C}}^n \setminus \{0\} \times \mathbf{P_m C}$, so daß $\omega((\tilde{z},[\tilde{l}])) = \omega((z,[l]))$

$\Rightarrow z = \tilde{z}$

$\Rightarrow$ es existieren $\lambda,\ \tilde{\lambda} \in \dot{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \setminus \{0\}$, so daß $\lambda \cdot l = z = \tilde{\lambda} \cdot \tilde{l}$

$\Rightarrow l = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \cdot \tilde{l}$

$\Rightarrow [l] = [\tilde{l}]$ (nach Definition von $[\cdot]$)

$\Rightarrow \omega$ injektiv.

(iii) Es bleibt nur noch die Stetigkeit von ω zu zeigen. Sei

$i : \widetilde{\mathbf{C}}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C},\ (z,[l]) \longmapsto (z,[l])$

die kanonische Einbettung von $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ in $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ und

$p : \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C} \longrightarrow \mathbf{C}^n, \ (z,[l]) \longmapsto z$

die Projektion von $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ auf die erste Koordinate.
$\widetilde{\mathbf{C}}^n$ trägt die Unterraumtopologie bezüglich $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$.
$\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ ist mit der Initialtopologie bezüglich seiner Faktoren $\mathbf{C}^n$ und $\mathbf{P_m C}$ versehen.

Ferner gilt: $g = p \circ i$.

i ist wegen des Vorliegens der Unterraumtopologie auf $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ stetig

$\Rightarrow p \circ i$ stetig (Initialtopologie auf $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$)

$\Leftrightarrow g$ stetig

Aus (i)-(iii) folgt die zweite Behauptung.

Bemerkung 1.2.3
Lemma 1.2.2 gibt Einblick in die Struktur von $\widetilde{\mathbf{C}}^n$. Es handelt sich um einen $\mathbf{C}^n$, dessen Nullpunkt durch einen (n-1)-dimensionalen komplex projektiven Raum ersetzt wurde. Dieses 'Aufblasen' der Null führt zu einem größeren Abschluß der auch in $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ offenen Menge $\mathbf{C}^n \setminus \{0\}$.

Aber auch eine andere Anschauung bietet sich an: alle Punkte eines projektiven Raumes der Dimension n-1 werden durch eine Kopie von **C** ersetzt, wodurch eine komplexe Mannigfaltigkeit[3] der Dimension n entsteht. Diese Art der Betrachtung wird durch das folgende Resultat gerechtfertigt:

Lemma 1.2.4
Der Raum $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ ist homotopieäquivalent zu $\mathbf{P_m C}$.

Beweis.
Sei $f : \mathbf{P_m C} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{C}}^n, \ [l] \longmapsto (0,[l])$ und $g : \widetilde{\mathbf{C}}^n \longrightarrow \mathbf{P_m C}, \ (z,[l]) \longmapsto [l]$.

(i) Es gilt:

$$g \circ f : \mathbf{P_m C} \longrightarrow \mathbf{P_m C}, \ [l] \longmapsto g((0,[l])) = [l]$$

$$\Rightarrow \ g \circ f = id_{\mathbf{P_m C}}$$

$$\Rightarrow \ g \circ f \simeq id_{\mathbf{P_m C}}.$$

(ii) Es gilt:

$f \circ g : \widetilde{\mathbf{C}}^n \longrightarrow \widetilde{\mathbf{C}}^n, \ (z,[l]) \longmapsto f([l]) = (0,[l])$.

Sei $H : \widetilde{\mathbf{C}}^n \times [0,1] \longrightarrow \widetilde{\mathbf{C}}^n, \ ((z,[l]),t) \longmapsto (t \cdot z,[l])$

$\Rightarrow H_1((z,[l])) := H(((z,[l]),0)) = (z,[l])$ für alle $(z,[l]) \in \widetilde{\mathbf{C}}^n$

$\Rightarrow H_1 = id_{\widetilde{\mathbf{C}}^n}$.

[3] Dies wird später noch bewiesen.

Außerdem: $H_0((z,[l])) := H(((z,[l]),1)) = (0,[l])$ für alle $(z,[l]) \in \widetilde{\mathbf{C}}^n$

$\Rightarrow H_0 = f \circ g$

$\Rightarrow f \circ g \overset{H}{\simeq} id_{\widetilde{\mathbf{C}}^n}$.

Mit (i), (ii) folgt also: $\widetilde{\mathbf{C}}^n \simeq \mathbf{P_m C}$.

Nachdem der Aufbau von $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ etwas klarer geworden ist, wird jetzt die zuvor behauptete analytische Struktur nachgewiesen:

Lemma 1.2.5
$\widetilde{\mathbf{C}}^n$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n.

Beweis.
(i) Sei $U_k := \{(z,[l]);\ l_k \neq 0\}$ für $k \in \{1,...,n\}$.
$\Longrightarrow$

1. $U_k \subset \widetilde{\mathbf{C}}^n$ offen, da $i(U_k) \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ offen.
2. $\widetilde{\mathbf{C}}^n \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

(ii) Sei $\Psi_k : U_k \longrightarrow U'_k := \mathbf{C}^n$,

$(z,[l]) \longmapsto (\frac{l_2}{l_k},..., \underbrace{\frac{l_1}{l_k}}_{(k-1)-te\ Stelle} ,..., \frac{l_n}{l_k}, z_k),\ k = 2,...,n,$

und speziell

$\Psi_1 : U_1 \longrightarrow U'_1 := \mathbf{C}^n$,

$(z,[l]) \longmapsto (\frac{l_2}{l_1},...,\frac{l_n}{l_1}, z_1)$.

(<u>*Bemerkung.*</u>$z \in [l] \Leftrightarrow z = \lambda \cdot l,\ \lambda \in \mathbf{C}$ und da $l_k \neq 0$ in U_k folgt: $\lambda = \frac{z_k}{l_k}$. Somit ist ein Punkt aus U_k eindeutig bestimmt durch die Äquivalenzklasse [l] und den 'Streckfaktor' $\lambda = \frac{z_k}{l_k}$, beziehungsweise durch l_k und z_k. Dieser Tatsache trägt die Wahl der Karten Rechnung. Man vergleiche hierzu auch Lemma 1.2.4.)

Alle Abbildungen $\Psi_k, k \in \{1,...,n\}$ sind wohldefiniert und bijektiv. Für die Umkehrabbildungen gilt:

$\Psi_k^{-1} : \mathbf{C}^n \longrightarrow U_k$,

$z \longmapsto (z_n \cdot (z_{k-1}, z_1, ..., \underbrace{1}_{k-te\ Stelle}, ..., z_m), [z_{k-1}, z_1, ..., \underbrace{1}_{k-te\ Stelle}, ..., z_m])$

$k = 2,...,n$,

und speziell

$$\Psi_1^{-1} : \mathbf{C}^n \longrightarrow U_0,\ z \longmapsto (z_n \cdot (1, z_1, ..., z_m), [1, z_1, ..., z_m]).$$

Für $k, j \in \{2, ..., n\}$ beliebig, aber verschieden folgt:

$$\Psi_j\,(U_k \cap U_j) = \{z \in \mathbf{C};\ z_{k-1} \neq 0\}.$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_k \circ \Psi_j^{-1} : \Psi_j\,(U_k \cap U_j) \longrightarrow \Psi_k\,(U_k \cap U_j)\,,$$

$$z \longmapsto \Psi_k((z_n \cdot (z_{j-1}, z_1, ..., \underbrace{1}_{j-te\ Stelle}, ..., z_m), [z_{j-1}, z_1, ..., \underbrace{1}_{j-te\ Stelle}, ..., z_m]))$$

$$= (\tfrac{z_1}{z_{k-1}}, ..., \underbrace{\frac{1}{z_k}}_{(j-1)-te\ Stelle}, ..., \underbrace{\frac{z_{j-1}}{z_{k-1}}}_{(k-1)-te\ Stelle}, ..., \tfrac{z_m}{z_{k-1}}, z_n \cdot z_k)$$

$$\Rightarrow \quad \Psi_k \circ \Psi_j^{-1} \text{ ist holomorph.}$$

Analog folgt auch für die Kombinationen mit der Karte (Ψ_1, U_1) die Holomorphie und mittels Tausch der Indices sogar die Biholomorphie aller Kartenwechsel

$$\Rightarrow \mathcal{B} := \Big((\Psi_k, U_k)_{k \in \{1,...,n\}}\Big) \text{ ist ein komplexer Atlas.}$$

Also ist $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ mit dem $\mathcal{B}$ zugehörigen maximalen Atlas $\mathcal{A}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Nun kommt der eigentliche Inhalt dieses Beispiels, nämlich die Konstruktion einer MF f und der Nachweis der dafür notwendigen Eigenschaften.

Bemerkung 1.2.6
Bekannterweise liegen mit

$$\begin{array}{llll} h_1 : & \mathbf{C}^n & \longrightarrow \mathbf{R}, & z \longmapsto \sum\limits_{i=1}^n |z_i|^2, \\ h_2 : & \mathbf{P_m C} & \longrightarrow \mathbf{R}, & [l] \longmapsto \dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot |z_i|^2}{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \end{array}$$

Morsefunktionen vor.

Damit ist sofort eine MF auf dem Produkt dieser Räume bekannt:

$$\begin{array}{lll} H : & \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C} & \longrightarrow \ \mathbf{R}, \\ & (z, [l]) & \longmapsto \ h_1(z) + h_2([l]), \end{array}$$

denn es folgt:

1. (z,[l]) kritischer Punkt bezüglich H
   $\Leftrightarrow$ (z) kritisch bezüglich h_1 und [l] bezüglich h_2.

2. $Det\left(Hess_{(z,[l])}(H)\right) = Det\left(Hess_z(g)\right) \cdot Det\left(Hess_{[l]}(h)\right)$.

Die Idee ist es nun, diese Abbildung einzuschränken auf $\widetilde{\mathbf{C}}^n$:

$$f := H \mid_{\widetilde{\mathbf{C}}^n} .$$

Motiviert wird dieses Vorgehen durch folgende Eigenschaften der eingeschränkten Funktion:

1. f ist wieder eine glatte Funktion.
2. (z,[l]) kritisch bezüglich f und nicht ausgeartet für alle kritischen Punkte (z,[l]) von H.

Zu 2. sei angemerkt:

$$\begin{aligned} & T_p\widetilde{\mathbf{C}}^n \text{ ist Untervektorraum von } T_p\left(\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}\right) \\ \Rightarrow\quad & T_p f\left(T_p\widetilde{\mathbf{C}}^n\right) = T_p H \mid_{\widetilde{\mathbf{C}}^n}\left(T_p\widetilde{\mathbf{C}}^n\right) = T_p H\left(T_p\widetilde{\mathbf{C}}^n\right) \subset T_p H\left(T_p\left(\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}\right)\right) \\ \Rightarrow\quad & \left(rang\left(T_p H\right) = 0 \Rightarrow rang\left(T_p f\right) = 0\right). \end{aligned}$$

Als Problem bleibt lediglich zu zeigen, daß durch die Einschränkung eventuell neu entstandene kritische Punkte nicht ausgeartet sind.

Satz 1.2.7
Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$, alle paarweise verschieden. Dann gilt:

$$\begin{array}{rccl} f: & \widetilde{\mathbf{C}}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ & (z,[l]) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2 + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot |l_i|^2}{\sum_{i=1}^{n} |l_i|^2} \end{array}$$

ist eine Morsefunktion.

<u>*Bemerkung.*</u> Satz 1.2.7 wird mit zwei unterschiedlichen Verfahren bewiesen werden. Der erste Beweis nutzt die Definition von $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ als eine Untermenge von $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ aus, die sich als Nullstellenmenge einer holomorphen Funktion darstellen läßt. Die Anwendung des Satzes über die Lagrange'schen Multiplikatoren, ein Standardverfahren in einer solchen Situation, führt zwar zum Erfolg, doch zeigt auch das vorliegende Beispiel die 'Grobheit' dieser Methode, die die Lösung des Problems auf die Kontrolle einer Vielzahl von Gleichungen verlagert.

Eleganter ist die zweite Beweisführung, welche durch die Wahl der entsprechenden Karten sowohl die zuvor bewiesene analytische Struktur des Raumes berücksichtigt, als auch die Informationen aus der Kenntnis der Abbildung ω ausnutzt.

1.Beweis.
Mit $\mathcal{B} := \left((\phi_{k-1}, V_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}\right)$, $\quad V_k =: \{[l];\ l_k \neq 0\}$, $\quad k = 1, ..., n$, liegt nach Beispiel 1.1.16 ein komplexer Atlas auf $\mathbf{P_m C}$ vor. Dieser läßt sich nun trivial zu einem Atlas auf $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ erweitern.
Definiere:

1. $W_k := \mathbf{C}^n \times V_k,\ k = 1, ..., n.$
2. $\Phi_k : W_k \longrightarrow \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m,\quad (z, [l]) \longmapsto (z, \phi_{k-1}([l])).$

Die neuen Kartenabbildungen setzen sich also aus zwei Komponenten zusammen, deren jeweilige Kartenwechsel biholomorph sind. Sie sind selber biholomorph, da sich diese Komponenten nicht gegenseitig beeinflussen. Insgesamt liegt somit ein komplexer Atlas vor. Es folgt, daß $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ mit dem hierzugehörigen maximalen Atlas eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Sei

$$g : \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C} \longrightarrow \mathbf{C}^m,\quad (z, [l]) \longmapsto (z_1 \cdot l_2 - z_2 \cdot l_1, ..., z_m \cdot l_n - z_n \cdot l_m),$$

und

$$\rho : \widetilde{\mathbf{C}}^n \longrightarrow \widetilde{\mathbf{C}}^n,\ (z, [l]) \longmapsto (z, [l_2, ..., l_m, l_1, l_n])$$

eine Umnummerierung. Dann folgt:

$$\begin{array}{rccl} g \circ \rho \circ \Phi_n^{-1} : & \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m & \longrightarrow & \mathbf{C}^m, \\ & (z, w) & \longmapsto & (z_1 \cdot w_2 - z_2 \cdot w_1, ..., z_m \cdot 1 - z_n \cdot w_m) \end{array}$$

$\Rightarrow g \circ \rho \circ \Phi_n^{-1}$ ist holomorph

Analoges ergibt sich in den anderen Karten. Es folgt die Holomorphie von g, da die Umnummerierung hierauf keinen Einfluß hat.

Wie schon eingangs bemerkt, folgt hieraus auch die Glattheit der Funktion

$$\begin{array}{rccl} g_{\mathbf{R}} : & \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{2m}, \\ & (z, [l]) & \longmapsto & (Re(g_1), Im(g_1), ..., Re(g_m), Im(g_m))\,((z, [l])), \end{array}$$

wobei $Re(z)$, $Im(z)$ Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z sind, und g_k die k-te Koordinatenabbildung von g bezeichnet, k=1,...,m.

Sei nun $(z, [l]) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ beliebig. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& (z,[l]) \in \widetilde{\mathbf{C}}^n \\
\Leftrightarrow\quad & z \in [l] \\
\Leftrightarrow\quad & \text{es existiert } \lambda \in \mathbf{C}, \text{ so daß } \lambda \cdot l_i = z_i \text{ für alle } i = 1,...,n \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{z_i}{l_i} = \lambda \text{ für alle } i = 1,...,n \\
\Leftrightarrow\quad & z_i \cdot l_k = z_k \cdot l_i \text{ für alle } l,k = 1,...,n \\
\Leftrightarrow\quad & z_i \cdot l_k = z_k \cdot l_i \text{ für alle } l,k = 1,...,n \text{ mit } i < k \\
\Leftrightarrow\quad & z_i \cdot l_k = z_k \cdot l_i \text{ für alle } l = k-1,\ k = 1,...,n.
\end{aligned}
$$

Denn zum Beispiel:

$$
\left.\begin{aligned} z_{k+1} \cdot l_k &= z_k \cdot l_{k+1} \\ z_{k+2} \cdot l_{k+1} &= z_{k+1} \cdot l_{k+2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_{k+2} \cdot l_k = z_k \cdot l_{k+2}\ .
$$

Es ist also gezeigt, daß $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ die Nullstellenmenge in $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ der Funktion $g_{\mathbf{R}}$ ist, und der Satz über die Lagrange'schen Multiplikatoren ist anwendbar. Da das Umgehen mit den entstehenden Gleichungen sehr unübersichtlich wird, wird der folgende Beweis nur für die Karte mit Index n durchgeführt. Dies schränkt jedoch die Allgemeinheit nicht ein.

Notationen.

1. $z = x + i \cdot y$ sei aus $\mathbf{C}^n$.
2. a, b seien aus $\mathbf{R}^m$.
3. $a_n := 1,\ b_n := 0$.
4. $l := (a + i \cdot b, 1)$ sei aus $\mathbf{C}^n$.
5. $$\begin{aligned} \xi :\quad W_n &\longrightarrow \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2m}, \\ (z,[l]) &\longmapsto \left((x_1, y_1, ..., x_n, y_n), \left(Re\left(\tfrac{l_2}{l_n}\right), Im\left(\tfrac{l_2}{l_n}\right), ..., Im\left(\tfrac{l_1}{l_n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$
   sei die zu Φ_n reelle Kartenabbildung. Es ergibt sich:
6. $$\begin{aligned} \xi^{-1} :\quad \mathbf{R}^{2n+2m} &\longrightarrow W_k, \\ ((x,y),(a,b)) &\longmapsto ((x_1 + i \cdot y_1, ..., x_n + i \cdot y_n), \\ &\qquad [a_m + i \cdot b_m, a_1 + i \cdot b_1, ..., a_{m-1} + i \cdot b_{m-1}, 1]). \end{aligned}$$
7. $F := f \circ \rho \circ \xi^{-1},\quad G := g \circ \rho \circ \xi^{-1} =: (G_1, ..., G_m)$.

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
Re\,(G_k(x,y,a,b)) &= Re(z_k \cdot l_{k+1} - z_{k+1} \cdot l_k) \\
&= x_k \cdot a_{k+1} - y_k \cdot b_{k+1} - x_{k+1} \cdot a_k + y_{k+1} \cdot b_k \\
\Rightarrow\quad grad\ Re\,(G_k(x,y,a,b)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial a_m}, \frac{\partial}{\partial b_m}\right)(G_k(x,y,a,b))
\end{aligned}
$$

$$= (0, ..., 0, \underbrace{a_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial x_k}}, \underbrace{-b_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial y_k}}, \underbrace{-a_k}_{\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}}, \underbrace{b_k}_{\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}}, 0, ..., 0, \underbrace{-x_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial a_k}}, \underbrace{y_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial b_k}}, \underbrace{x_k}_{\frac{\partial}{\partial a_{k+1}}}, \underbrace{-y_k}_{\frac{\partial}{\partial b_{k+1}}}, 0, ..., 0)$$

für alle $k = 1, ..., n-2$.

Für $k = m = n-1$ gilt:

$$\begin{aligned} Re\,(G_m(x,y,a,b)) &= Re(z_m \cdot 1 - z_n \cdot l_m) \\ &= x_m \cdot 1 - y_m \cdot 0 - x_n \cdot a_m + y_n \cdot b_m \\ &= x_m - x_n \cdot a_m + y_n \cdot b_m \\ \Rightarrow \quad grad\ Re\,(G_m(x,y,a,b)) &= (0, ..., 0, \underbrace{1}_{\frac{\partial}{\partial x_m}}, \underbrace{0}_{\frac{\partial}{\partial y_m}}, \underbrace{-a_m}_{\frac{\partial}{\partial x_n}}, \underbrace{b_m}_{\frac{\partial}{\partial y_n}}, 0, ..., 0, \underbrace{-x_n}_{\frac{\partial}{\partial a_m}}, \underbrace{y_n}_{\frac{\partial}{\partial b_m}}). \end{aligned}$$

Für die Imaginärteile folgt analog, beziehungsweise nach den CRDG'en:

$$grad\ Im\,(G_k(x,y,a,b)) =$$
$$(0, ..., 0, \underbrace{b_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial x_k}}, \underbrace{a_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial y_k}}, \underbrace{-b_k}_{\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}}, \underbrace{-a_k}_{\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}}, 0, ..., 0, \underbrace{-y_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial a_k}}, \underbrace{-x_{k+1}}_{\frac{\partial}{\partial b_k}}, \underbrace{y_k}_{\frac{\partial}{\partial a_{k+1}}}, \underbrace{x_k}_{\frac{\partial}{\partial b_{k+1}}}, 0, ..., 0)$$

für alle $k = 1, ..., n-2$.

Für $k = m$ gilt demnach:

$$grad\ Im\,(G_m(x,y,a,b)) = (0, ..., 0, \underbrace{0}_{\frac{\partial}{\partial x_m}}, \underbrace{1}_{\frac{\partial}{\partial y_m}}, \underbrace{-b_m}_{\frac{\partial}{\partial x_n}}, \underbrace{-a_m}_{\frac{\partial}{\partial y_n}}, 0, ..., 0, \underbrace{-y_n}_{\frac{\partial}{\partial a_m}}, \underbrace{x_n}_{\frac{\partial}{\partial b_m}}).$$

Für den Gradienten von F ergibt sich:

$$grad\ F\,((x,y,a,b))$$

$$= 2 \cdot \left(x_1, y_1, ..., x_n, y_n, \frac{a_1 \cdot \lambda_1 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) - a_1 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (a_k^2+b_k^2)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)^2}, ... \right.$$
$$\left. ..., \frac{b_m \cdot \lambda_m \cdot \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) - b_m \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (a_k^2+b_k^2)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(x_1, ..., y_n, \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)^2} \cdot \left(a_1 \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \cdot (\lambda_1 - \lambda_k), ... \right.\right.$$
$$\left.\left. ..., b_m \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \cdot (\lambda_m - \lambda_k) \right) \right).$$

Nach Lagrange gilt nun:
(x,y,a,b) kritischer Punkt von F unter der Nebenbedingung $G((x,y,a,b)) = 0$
$\Leftrightarrow$
es existieren reelle Zahlen $\mu_1, ..., \mu_m$ und $\nu_1, ..., \nu_m$, so daß gilt:

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \cdot grad\ Re\,(G_k(x,y,a,b)) + \sum_{k=1}^{m} \nu_k \cdot grad\ Im\,(G_k(x,y,a,b)) = grad\ F(x,y,a,b). \tag{1}$$

Einsetzen ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l}
1-te\ Stelle \\
2-te\ Stelle \\
\vdots \\
(2k-1)-te\ Stelle \\
(2k)-te\ Stelle \\
\vdots \\
(2n-1)-te\ Stelle \\
(2n)-te\ Stelle \\
(2n+1)-te\ Stelle \\
(2n+2)-te\ Stelle \\
\vdots \\
(2n+2k-1)-te\ Stelle \\
(2n+2k)-te\ Stelle \\
\vdots \\
(2n+2m-1)-te\ Stelle \\
(2n+2m)-te\ Stelle
\end{array}
\begin{pmatrix}
\mu_1 a_2 + \nu_1 b_2 \\
-\mu_1 b_2 + \nu_1 a_2 \\
\vdots \\
\mu_k a_{k+1} - \mu_{k-1} a_{k-1} + \nu_k b_{k+1} - \nu_{k-1} b_{k-1} \\
-\mu_k b_{k+1} + \mu_{k-1} b_{k-1} + \nu_k a_{k+1} - \nu_{k-1} a_{k-1} \\
\vdots \\
-\mu_m a_m - \nu_m b_m \\
\mu_m b_m - \nu_m a_m \\
-\mu_1 x_2 - \nu_1 y_2 \\
\mu_1 y_2 + \nu_1 x_2 \\
\vdots \\
-\mu_k x_{k+1} - \nu_k y_{k+1} + \mu_{k-1} x_{k-1} + \nu_{k-1} y_{k-1} \\
\mu_k y_{k+1} - \nu_k x_{k+1} - \mu_{k-1} y_{k-1} + \nu_{k-1} x_{k-1} \\
\vdots \\
-\mu_m x_n - \nu_m y_n + \mu_{m-1} x_{m-1} + \nu_{m-1} y_{m-1} \\
\mu_k y_{m+1} - \nu_m x_{m+1} - \mu_{m-1} y_{m-1} + \nu_{m-1} x_{m-1}
\end{pmatrix}$$

$$= grad\ F((x,y,a,b)). \tag{2}$$

Sei (x,y,a,b) eine Lösung des Gleichungssystems 2.
$\underline{1.Fall:}$ $(x,y) = 0 \in \mathbf{R}^{2n}$.
Dann sind die ersten (2n) Komponenten von $grad\ F((x,y,a,b))$ gleich Null und ebenso die letzten (2m) Komponenten von

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k \cdot grad\ Re\,(G_k(x,y,a,b)) + \sum_{k=1}^{m} \nu_k \cdot grad\ Im\,(G_k(x,y,a,b)).$$

Es kann also nur ein kritischer Punkt vorliegen, wenn für alle $j = 1, ..., m$ gilt:

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)^2} \cdot \left(a_j \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \cdot (\lambda_j - \lambda_k)\right) = 0, \tag{3}$$

und für die b_j an Stelle der a_j analog.

Umgekehrt liegt schon bei Erfüllung von Gleichung 3 ein kritischer Punkt vor, denn durch Nullsetzen aller Multiplikatoren verifiziert man Gleichung 1.

Sei also Gleichung 3 erfüllt und $\lambda_{j_1} := \max_{k=1}^{n} \lambda_k$. Da

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)^2} \cdot \left(a_{j_1} \cdot \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\cdot(\lambda_{j_1}-\lambda_k)\right) = 0,$$

da diese Gleichung analog mit b_{j_1} an Stelle von a_{j_1} erfüllt ist, und da

$(a_k^2+b_k^2) \geq 0$ und $(\lambda_{j_1}-\lambda_k) \geq 0$ für alle $k = 1, ..., n$

folgt:

(i) $a_{j_1},\ b_{j_1} = 0$, oder

(ii) $a_j = b_j = 0$ für alle $j \neq j_1$.

Im Falle von (ii) ergibt sich:

a) $j_1 = n$.

b) $a_{j_1} + b_{j_1} \cdot i \neq 0$.

$\Rightarrow (0, [0, ..., 0, 1])$ ist der (x, y, a, b) zugehörige kritische Punkt von f in $W_n \cap \widetilde{\mathbf{C}}^n$.

Definiere im Fall (i)

$$\lambda_{j_2} := \max_{k=1,\ldots,n;k\neq j_1} \lambda_k$$

und analog folgt $a_{j_2},\ b_{j_2} = 0$.

Dieses Verfahren fortgesetzt führt letztendlich zu dem Resultat aus (ii), denn nicht alle $a_k,\ b_k$ können nach der Definition von $\mathbf{P_m C}$ gleich null sein.

<u>*Resultat*</u> : Führt man diesen Beweis analog für alle Karten durch, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (0, [l]) \text{ kritisch bezüglich f} \\ \Leftrightarrow \quad & [l] = [0, ..., 0, \underbrace{1}_{k-te\ Stelle}, 0, ..., 0] =: [l]^k,\ k \in \{1, ..., n\}, \end{aligned}$$

denn umgekehrt sind alle Punkte dieser Form kritisch, da die Bedingung von Lagrange sich durch Nullsetzen der Multiplikatoren trivial erfüllen läßt.

<u>*2.Fall :*</u> $(x, y) \neq 0 \in \mathbf{R}^{2n}$

Dann existiert ein $\eta \neq 0$, so daß $\eta \cdot z = l$.

Dies in Gleichung 2 eingesetzt ergibt folgendes spezielles Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mu_1\eta x_2 + \nu_1\eta y_2 \\ -\mu_1\eta y_2 + \nu_1\eta x_2 \\ \vdots \\ \mu_k\eta x_{k+1} - \mu_{k-1}\eta x_{k-1} + \nu_k\eta y_{k+1} - \nu_{k-1}\eta y_{k-1} \\ -\mu_k\eta y_{k+1} + \mu_{k-1}\eta y_{k-1} + \nu_k\eta x_{k+1} - \nu_{k-1}\eta x_{k-1} \\ \vdots \\ -\mu_m\eta x_m - \nu_m\eta y_m \\ \mu_m\eta y_m - \nu_m\eta x_m \\ -\mu_1 x_2 - \nu_1 y_2 \\ \mu_1 y_2 + \nu_1 x_2 \\ \vdots \\ -\mu_k x_{k+1} - \nu_k y_{k+1} + \mu_{k-1}x_{k-1} + \nu_{k-1}y_{k-1} \\ \mu_k y_{k+1} - \nu_k x_{k+1} - \mu_{k-1}y_{k-1} + \nu_{k-1}x_{k-1} \\ \vdots \\ -\mu_m x_n - \nu_m y_n + \mu_{m-1}x_{m-1} + \nu_{m-1}y_{m-1} \\ \mu_k y_{m+1} - \nu_m x_{m+1} - \mu_{m-1}y_{m-1} + \nu_{m-1}x_{m-1} \end{pmatrix} = \frac{2}{\eta}\cdot \begin{pmatrix} \eta x_1 \\ \eta y_1 \\ \vdots \\ \eta x_k \\ \eta y_k \\ \vdots \\ \eta x_n \\ \eta y_n \\ \frac{x_1\cdot\sum_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_1-\lambda_j)}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\right)^2} \\ \vdots \\ \frac{x_k\cdot\sum_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_k-\lambda_j)}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\right)^2} \\ \vdots \\ \frac{y_m\cdot\sum_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_m-\lambda_j)}{\left(\sum_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\right)^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Definiere $M := \{j \in \{1,...,m\};\ (x_j, y_j) \neq 0\}$

1°Fall: $\#M \geq 2$.

Kürzt man nun in Gleichung 4 aus den ersten (2n) Gleichungen $\eta \neq 0$ heraus, und vergleicht dann die (2k-1)-te mit der (2n+2k-1)-ten Gleichung so folgt:

$$\frac{2}{\eta}\cdot x_k = -\frac{2}{\eta}\cdot\frac{x_k\cdot\sum\limits_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_k-\lambda_j)}{\left(\sum\limits_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\right)^2},\ k = 1,...,m,$$

beziehungsweise folgt durch Vergleich der (2k)-ten mit der (2n+2k)-ten Gleichung

$$\frac{2}{\eta}\cdot y_k = -\frac{2}{\eta}\cdot\frac{y_k\cdot\sum\limits_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_k-\lambda_j)}{\left(\sum\limits_{j=1}^n (x_j^2+y_j^2)\right)^2},\ k = 1,...,m$$

$$\overset{(\eta\neq 0)}{\Longrightarrow} \quad x_k \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\right)^2 \quad = \quad -x_k \cdot \sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_k-\lambda_j)$$

beziehungsweise

$$y_k \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\right)^2 \quad = \quad -y_k \cdot \sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_k-\lambda_j).$$

Für k aus M folgt:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\right)^2 = -\sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_k-\lambda_j).$$

Sei nun $k_1, k_2 \in M,\ k_1 \neq k_2$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_{k_1}-\lambda_j) = \sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_{k_2}-\lambda_j)$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}(x_j^2+y_j^2)\cdot(\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2}) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2+y_j^2\right)\cdot(\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2}) = 0$

$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2+y_j^2\right) = 0$

$\Rightarrow (x_j, y_j) = (0,0)$ für alle $j = 1, ..., m$.

Widerspruch zur Annahme. Also kann dieser Fall nicht existieren.

2°Fall: $\#M = 1$.

Dann existiert ein Tupel $(x_j, y_j) \neq (0,0)$.

<u>*Annahme :*</u> $j \in \{1, ..., m-1\}$.

Es folgt aus den Zeilen (2j) und (2j-1) der Gleichung 4, :

$x_j = \frac{\eta}{2}\cdot(\mu_j\eta x_{j+1} - \mu_{j-1}\eta x_{j-1} + \nu_j\eta y_{j+1} - \nu_{j-1}\eta y_{j-1}) = \frac{\eta}{2}\cdot 0 = 0$

beziehungsweise

$y_j = \frac{\eta}{2}\cdot(-\mu_j\eta y_{j+1} + \mu_{j-1}\eta y_{j-1} + \nu_j\eta x_{j+1} - \nu_{j-1}\eta x_{j-1}) = \frac{\eta}{2}\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow (x_m, y_m) \neq 0$.

Wiederum folgt aus den Zeilen (2m-1) und (2m) der Gleichung 4:

$\frac{2}{\eta}\cdot x_m = \mu_m x_n + \nu_m y_n$ und $\frac{2}{\eta}\cdot y_m = -\mu_m y_n + \nu_m x_n$.

Zeilen (2n) und (2n-1) von Gleichung 4 liefern zusätzlich:

$\frac{2}{\eta}\cdot x_n = -\mu_m x_m - \nu_m y_m$ und $\frac{2}{\eta}\cdot y_m = \mu_m y_m - \nu_m x_m$.

Setzt man nun ineinander ein ergibt sich:

$x_m = -\frac{\eta^2}{4} \cdot (\mu_m^2 + \nu_m^2) \cdot x_m$ beziehungsweise $y_m = -\frac{\eta^2}{4} \cdot (\mu_m^2 + \nu_m^2) \cdot y_m$,
ein Widerspruch.
Also besteht M auch nicht aus einem Element und ist gleich der leeren Menge.

Insgesamt folgt also, daß

$$(x_j, y_j) = (0,0), \text{ für alle } j = 1, ..., m$$

$$\Rightarrow \quad (x_n, y_n) = (0,0) \text{ wegen Gleichung 4, Zeilen (2n-1) und (2n)}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung des $\underline{2.Falles}$.
Resultat : Es gibt also keine weiteren kritischen Punkte, außer den im 1.Fall schon gefundenen. Da dies genau die kritischen, nicht ausgearteten Punkte von $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P_m C}$ sind, folgt nach der einleitenden Bemerkung die Behauptung.

2.Beweis.
Sei $\mathcal{A} = ((\Psi_k, U_k)_{k=1,...,n})$ der in Lemma 1.2.5 eingeführte Atlas von $\widetilde{\mathbf{C}}^n$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird der folgende Beweis für die n-te Karte durchgeführt.
Notationen.

1. $$\begin{array}{cccl} \tau : & U_n & \longrightarrow & \mathbf{R}^{2n}, \\ & (z,[l]) & \longmapsto & \left(Re\left(\frac{l_2}{l_1}\right), Im\left(\frac{l_2}{l_1}\right), ..., Im\left(\frac{l_n}{l_1}\right), ..., Re\left(\frac{z_1}{l_1}\right), Im\left(\frac{z_1}{l_1}\right)\right) \end{array}$$
   die zu Ψ_n reelle Kartenabbildung.
2. $F := f \circ \tau^{-1}$
3. Für $(x,y) \in \mathbf{R}^{2n}$ sei $l := (x_1 + iy_1, ..., x_m + iy_m, 1)$, $l_n := 1$ und $\alpha := x_n + iy_n$.
4. Für $l \in \mathbf{C}^n$ sei $||l||^2 := \sum_{j=1}^n |l_j|^2$.

Es gilt:

$$F : \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}, \ (x,y) \longmapsto |\alpha|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |l_j|^2 + \frac{\sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \cdot |l_j|^2}{\sum\limits_{j=1}^n |l_j|^2}$$

$$\Rightarrow grad\ F((x,y)) = \left(2x_1|\alpha|^2 + \frac{2\lambda_1 x_1 ||l||^2 - \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j |l_j|^2 2x_1}{||l||^4}, ... \right.$$
$$\left. ..., 2y_m|\alpha|^2 + \frac{2\lambda_m y_m ||l||^2 - \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j |l_j|^2 2y_m}{||l||^4}, 2x_n||l||^2, 2y_n||l||^2\right).$$

Liegt nun ein kritischer Punkt vor, dann folgt

$$\begin{aligned}
& grad\ F((x,y)) = 0 \\
\Rightarrow\quad & 2 \cdot x_n \cdot ||l||^2 = 0 = 2 \cdot y_n \cdot ||l||^2 \\
\Rightarrow\quad & x_n = 0 = y_n, \text{ da } ||l||^2 \geq 1 \\
\Rightarrow\quad & \alpha = 0 \\
\Rightarrow\quad & (z,[l]) \text{ kann nur kritischer Punkt sein, wenn } z = 0 \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $grad\ F((x,y)) = 0$ folgt mit $|\alpha| = 0$

$$2 \cdot x_k \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} |l_j|^2(\lambda_k - \lambda_j)}{||l||^4} = 0$$

und

$$2 \cdot y_k \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} |l_j|^2(\lambda_k - \lambda_j)}{||l||^4} = 0 \text{ für alle } k = 1, ..., m.$$

Existieren nun zwei Tupel $(x_{k_1}, y_{k_1}), (x_{k_2}, y_{k_2}) \neq (0,0),\ k_1, k_2 \in \{1, ..., m\}$, dann folgt nach Kürzen von x_{k_1}, beziehungsweise y_{k_1} und x_{k_2}, beziehungsweise y_{k_2} und Gleichsetzen:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |l_j|^2(\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})}{||l||^4} = \frac{1}{||l||^2} \cdot (\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}) = 0.$$

Widerspruch, da alle $\lambda_j,\ j = 1, ..., n$ paarweise verschieden und zumindest $|l_n| \neq 0$.

Existiert nur ein Tupel $(x_{k_1}, y_{k_1}) \neq (0,0),\ k_1 \in \{1, ..., m\}$, dann folgt wieder nach Kürzen:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |l_j|^2(\lambda_{k_1} - \lambda_j)}{||l||^4} = 0.$$

Da $l_j = x_j + iy_j,\ j = 1, ..., m$, folgt

$$\frac{|l_n|^2 \cdot (\lambda_{k_1} - \lambda_n)}{||l||^4} = 0, \text{ Widerspruch.}$$

Insgesamt folgt also, daß in U_n nur $(0, [0, ..., 0, 1])$ ein kritischer Punkt von f sein kann. Einsetzen beweist, daß dieser Punkt wirklich kritisch ist.

Keine großen Probleme macht nun die Berechnung der Hesse-Matrix bezüglich dieses einzigen kritischen Punktes in U_n. Für sie ergibt sich:

$$Hess_{(0,[0,...,0,1])}f = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \tag{5}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2(\lambda_m - \lambda_n) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda_1 - \lambda_n) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(\lambda_{m-1} - \lambda_n) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Es folgt:

$$Det\left(Hess_{(0,[0,...,0,1])}f\right) = 2^{2n} \cdot \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_n) \neq 0.$$

Führt man diesen Beweis analog für alle anderen Karten durch, erhält man alle kritischen Punkte von f. Es sind genau die Punkte der Form

$$(0,[0,...,0,\underbrace{1}_{\text{k-te Stelle}},0,...,0]),\ k = 1,...,n.$$

Alle diese Punkte sind nicht ausgeartet, und somit folgt die Behauptung.

Bemerkung 1.2.8
Im Satz 1.2.7 wurden für $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ die kritischen Punkte bestimmt, und deren Hesse-Matrix berechnet. Für die Indices der konstruierten Morsefunktion f folgt demnach:

$$h_{2k}(f) = 1 \text{ für alle } k = 0,...,n-1.$$

Im Beispiel 1.1.16 wurde das gleiche für $\mathbf{P}_{(\mathbf{n-1})}\mathbf{C}$ geleistet. Auch hier folgt für die Morsefunktion g:

$$h_{2k}(g) = 1 \text{ für alle } k = 0,...,n-1.$$

Nach Satz 1.1.28 sind beide Räume homotopieäquivalent zu einem CW-Raum gleichen Aufbaus. Dies steht im Einklang zu der Bemerkung in 1.2.1, wonach $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ homotopieäquivalent zu $\mathbf{P}_{(\mathbf{n-1})}\mathbf{C}$ ist.

Für die Homologie von $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ folgt andererseits aus der Morseungleichung:

$$\begin{aligned} rang H_{2k}(\widetilde{\mathbf{C}}^n) &\leq 1 \text{ für alle } k = 0,...,n-1. \\ rang H_{2k-1}(\widetilde{\mathbf{C}}^n) &= 0 \text{ für alle } k = 1,...,n-1. \end{aligned}$$

Analog folgt für $\mathbf{P}_{(\mathbf{n-1})}\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} rang H_{2k}(\mathbf{P}_{(\mathbf{n-1})}\mathbf{C}) &\leq 1 \text{ für alle } k = 0,...,n-1. \\ rang H_{2k-1}(\mathbf{P}_{(\mathbf{n-1})}\mathbf{C}) &= 0 \text{ für alle } k = 1,...,n-1. \end{aligned}$$

2 Torusvarietäten

Torusvarietäten sind eine spezielle Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten, die von einfachen geometrischen Objekten, sogenannten Fahnen, ausgehend konstruiert werden. Fahne und Torusvarietät, auch Toruseinbettung genannt, entsprechen sich umkehrbar eindeutig. Das Besondere an diesem Weg, komplexe Mannigfaltigkeiten zu beschreiben, liegt an dem Umstand, daß eine Reihe analytischer Eigenschaften der Varietät schon an der elementaren Geometrie der definierenden Fahne abgelesen werden können.

Im gesamten Kapitel 2 sei $N \cong \mathbf{Z}^r$ ein freies Modul vom Rang r über dem Ring $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen. M sei das duale $\mathbf{Z}$-Modul und

$$(\cdot \mid \cdot) : M \times N \longrightarrow \mathbf{Z}$$

die kanonische, bilineare Paarung . Mittels skalarer Erweiterung nach $\mathbf{R}$ erhält man die Vektorräume $N_{\mathbf{R}} := N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ und $M_{\mathbf{R}} := M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ mit dem kanonischen Skalarprodukt

$$(\cdot \mid \cdot) : M_{\mathbf{R}} \times N_{\mathbf{R}} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

2.1 Definitionen

Definition 2.1.1

1. $\sigma \subset N_{\mathbf{R}}$ heißt streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel, falls endlich viele $n_1, ..., n_s \in N_{\mathbf{R}}$ existieren, so daß $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0} n_1 + \cdots + \mathbf{R}_{\geq 0} n_s := \langle n_1, ..., n_s \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}} := \{a_1 n_1 + \cdots + a_s n_s;\ a_i \in \mathbf{R},\ a_i \geq 0,\ i = 1, ..., s\}$ und $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.
2. $\check{\sigma} := \{x \in M_{\mathbf{R}};\ (x \mid y) \geq 0 \ \textit{für alle}\ y \in \sigma\}$ heißt der zu σ duale Kegel.
3. $\dim \sigma := \dim_{\mathbf{R}} \sigma := \dim_{\mathbf{R}}(\sigma + (-\sigma))$.

Bemerkung 2.1.2
$\check{\sigma}$ ist ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel in $M_{\mathbf{R}}$. Da σ streng konvex ist, das heißt $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$, folgt $\check{\sigma} + (-\check{\sigma}) = M_{\mathbf{R}}$, also $\dim \check{\sigma} = r$.

Der duale Kegel läßt sich sehr anschaulich aus dem gegebenen Kegel konstruieren. Sei $\dim \sigma = r$ und ohne Einschränkung $N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^r = M_{\mathbf{R}}$. Sei $\tau \in \sigma^{(r-1)} := \{\tau';\ \tau' \ \textit{ist Seite von}\ \sigma,\ \dim \tau' = r-1\}$, $n \neq 0 \in \tau$ und $\tau^{\perp}$ das orthogonale Komplement von τ. $\tau^{\perp}_{+} := \{x \in \tau^{\perp};\ (x \mid n) \geq 0\}$ sei der bezüglich n positive Halbraum von $\tau^{\perp}$. $\bigcup_{\tau \in \sigma^{(r-1)}} \tau^{\perp}_{+}$ bildet den Rand eines streng konvexen polyedrischen Kegels, nämlich $\check{\sigma}$. Abbildung 2.1 zeigt ein Beispiel für die Dimension $r = 2$.

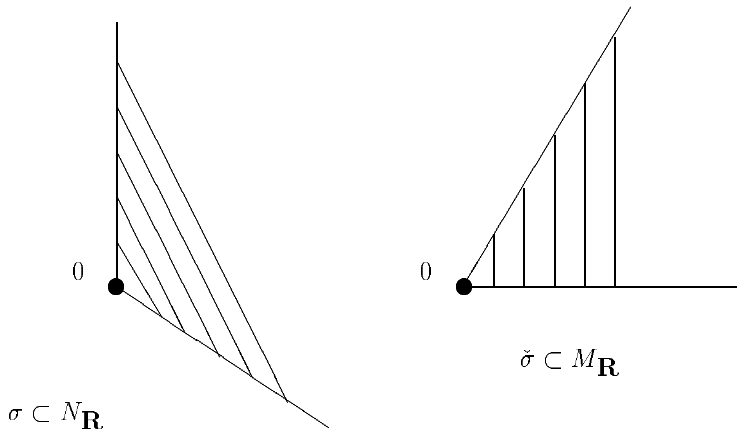


Abbildung 2.1

Definition 2.1.3
$\tau \subset \sigma$ heißt eine Seite von σ, falls

$$\tau = \sigma \cap \{m_0\}^{\perp} := \{y \in \sigma;\ (m_0 \mid y) = 0\}.$$

Bemerkung 2.1.4
$\sigma \subset \sigma$ und $\{0\}$ sind trivale Seiten von σ.

Nun sind die Vorbereitungen getroffen, um das elementare Objekt der Fahne einzuführen.

Definition 2.1.5
Eine Fahne in N ist eine nichtleere Menge Σ von streng konvexen rationalen polyedrischen Kegeln in $\mathrm{N}_{\mathbf{R}}$, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\sigma \in \Sigma$, τ Seite von $\sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.
2. $\sigma, \sigma' \in \Sigma \Rightarrow \tau := \sigma \cap \sigma'$ ist Seite von σ und σ'.

Weiter sei
$|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$.

Bemerkung 2.1.6
Eine Fahne definiert also eine Zerlegung von $|\Sigma| \subset N_{\mathbf{R}}$ in streng konvexe rationale polyedrische Kegel, die sich nicht im relativen Inneren schneiden. Einige Beispiele sind in Abbildung 2.2 für $\dim N_{\mathbf{R}} = 2$ zu sehen. Die schraffierten Bereiche sollen dabei die zweidimensionalen Kegel darstellen.

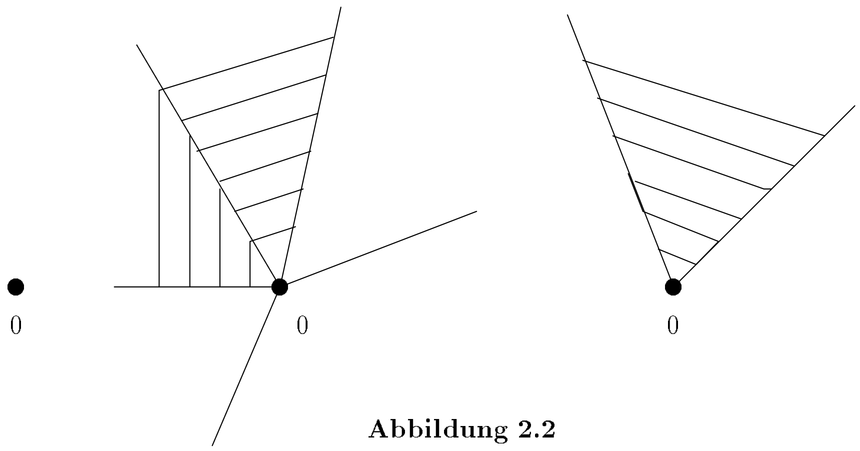


Abbildung 2.2

Lemma 2.1.7
Für einen streng konvexen rationalen polyedrischen Kegel gilt:

1. $\phi_\sigma := M \cap \check{\sigma} = \{m \in M;\ (m \mid y) \geq 0\ \textit{für alle}\ y \in \sigma\}$ ist eine additive Unterhalbgruppe von M.

2. ϕ_σ ist endlich erzeugt als additive Halbgruppe. Das heißt:
$\phi_\sigma = \mathbf{Z}_{\geq 0} m_1 + \cdots + \mathbf{Z}_{\geq 0} m_p := \{a_1 n_1 + \cdots + a_p n_p;\ a_i \in \mathbf{Z},\ a_i \geq 0,\ i = 1, ..., p\}$.

3. ϕ_σ erzeugt M als Gruppe, also $M = \phi_\sigma + (-\phi_\sigma)$.

Beweis. Ausgeführt in [Oda, Seite3].

Definition 2.1.8
Sei $\dot{\mathbf{C}}$ die multiplikative Gruppe $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

$$T_N := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \dot{\mathbf{C}}) = N \otimes_{\mathbf{Z}} \dot{\mathbf{C}}$$

heißt der r-dimensionale $\underline{\textit{algebraische Torus}}$, falls $N \cong \mathbf{Z}^r$.

Bemerkung 2.1.9
Es folgt:

$$T_N \cong \dot{\mathbf{C}} \times \cdots \times \dot{\mathbf{C}} \text{ (r-mal).}$$

Bemerkung 2.1.10

1. Jedes $m \in M$ definiert einen Charakter:
   $\chi(m) : T_N \longrightarrow \dot{\mathbf{C}},\ t \longmapsto \chi(m)(t) := t(m)$.
   Für diese Charaktere gilt das Exponentialgesetz $\chi(m+m') = \chi(m) \cdot \chi(m')$ und insbesondere $\chi(0) = 1$.

2. Jedes $n \in N$ definiert eine Einparameter-Untergruppe in T_N mittels
   $\gamma_n : \dot{\mathbf{C}} \longrightarrow T_N$, mit $\gamma_n(\lambda)(m) := \lambda^{(m|n)}$, also $\gamma_n(\lambda) \in T_N$ für alle $\lambda \in \dot{\mathbf{C}}$.
   Notation.
   a) Die so definierte Untergruppe von T_N sei mit Γ_n bezeichnet.
   b) $\lambda^n := \gamma_n(\lambda)$

Lemma 2.1.11
Sei σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel und
$\phi_\sigma = M \cap \check{\sigma} = \mathbf{Z}_{\geq 0} m_1 + \cdots + \mathbf{Z}_{\geq 0} m_p$
die davon bestimmte Unterhalbgruppe von M. Sei:

$X_\sigma := \{x : \phi_\sigma \to \mathbf{C};\ x(0) = 1,\ x(m+m') = x(m) \cdot x(m') \ \textit{für alle}\ m, m' \in \phi_\sigma\}$.

Ferner sei $\chi(m)(x) := x(m)$ für $m \in \phi_\sigma$ und $x \in X_\sigma$.
Dann ist die Abbildung

$$\chi_\sigma := (\chi(m_1), ..., \chi(m_p)) : X_\sigma \longrightarrow \mathbf{C}^p$$

injektiv. *Identifiziert* mit seinem Bild unter dieser Abbildung ist X_σ eine algebraische Untermenge von $\mathbf{C}^p$, definiert als die Lösungsmenge eines Gleichungssystems der Form (Monom)=(Monom). Die induzierte Struktur eines r-dimensionalen irreduziblen normalen komplex-analytischen Raumes ist unabhängig von den gewählten Halbgruppenerzeugern $m_1, ..., m_p$. Jedes $m \in \phi_\sigma$ definiert eine polynomische Abbildung $\chi(m)$ auf X_σ, die holomorph bezüglich der genannten Struktur ist.

Beweis. Siehe [Oda, Seite 5].

Bemerkung 2.1.12
Die Abbildung χ_σ bettet X_σ in einen geeigneten $\mathbf{C}^p$ ein, indem jedem $x \in X$ das Tupel $\chi_\sigma(x) \in \mathbf{C}^s$ zugeordnet wird. Diese Einbettung wird später benutzt, um einen komplexen Atlas auf nichtsingulären Torusvarietäten zu definieren.

Die Monome, die X_σ bestimmen, werden selbst wiederum durch die gegenseitigen Abhängikeiten der Erzeuger $m_1, ..., m_p$ von $\check{\sigma}$ bestimmt. Gilt zum Beispiel $m_1 = m_2 + m_3$ dann folgt $\chi(m_1)(x) = \chi(m_2) \cdot \chi(m_3)(x)$. In der Einbettung bedeutet dies, daß $z_1 = z_2 \cdot z_3$ gilt, falls $z_i = \chi(m_i)(x),\ i = 1, 2, 3$.

Beispiel 2.1.13
Im folgenden Beispiel sei $\{n_1, n_2\}$ eine feste $\mathbf{Z}$-Basis von $N := \mathbf{Z}^2$ und $\{m_1, m_2\}$ die dazu duale Basis von M. Abbildung 2.3 zeigt die zu den Beispielen gehörenden Kegel σ.

1. Sei $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}n_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}n_2 \Rightarrow \check{\sigma} = \mathbf{R}_{\geq 0}m_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}m_2$.
   Also $\phi_\sigma = \mathbf{Z}_{\geq 0}m_1 + \mathbf{Z}_{\geq 0}m_2$
   und $\chi_\sigma = (\chi(m1), \chi(m_2)) : X_\sigma \longrightarrow \mathbf{C}^2$ biholomorph.

2. Sei $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}n_1$. Dann ist
$$\begin{aligned} \check{\sigma} &= \mathbf{R}_{\geq 0}m_1 + \mathbf{R}m_2 \\ \Rightarrow \quad \phi_\sigma &= \mathbf{Z}_{\geq 0}m_1 + \mathbf{Z}_{\geq 0}m_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0}(-m_2). \end{aligned}$$
   Die Einbettung χ_σ erzeugt eine Biholomorphie
$$\begin{aligned} X_\sigma \to \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3;\ x_1 \cdot x_2 = 1\} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2;\ x_2 \neq 0\} \\ &= \mathbf{C} \times \dot{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

3. Falls $\sigma = \{0\}$ ist $\phi_\sigma = M$ und somit $X_\sigma \cong T_N \cong \dot{\mathbf{C}} \times \dot{\mathbf{C}}$.
   ($\cong$ bedeutet hier isomorph in der Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeiten, also biholomorph gleich.)

4. Ein singuläres Beispiel:
   Sei $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}n_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}(n_1 + n_2)$. Dann ergibt sich:
$$\begin{aligned} \check{\sigma} &= \mathbf{R}_{\geq 0}(2m_1 - m_2) + \mathbf{R}_{\geq 0}m_2 \\ \Rightarrow \quad \phi_\sigma &= \mathbf{Z}_{\geq 0}m_1 + \mathbf{Z}_{\geq 0}m_2 + \mathbf{Z}_{\geq 0}(2m_1 - m_2). \end{aligned}$$
   Die Einbettung χ_σ liefert:
   $X_\sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3;\ x_1^2 = x_2 x_2\}$,
   mit einer isolierten Singularität in $0 \in \mathbf{C}^3$.

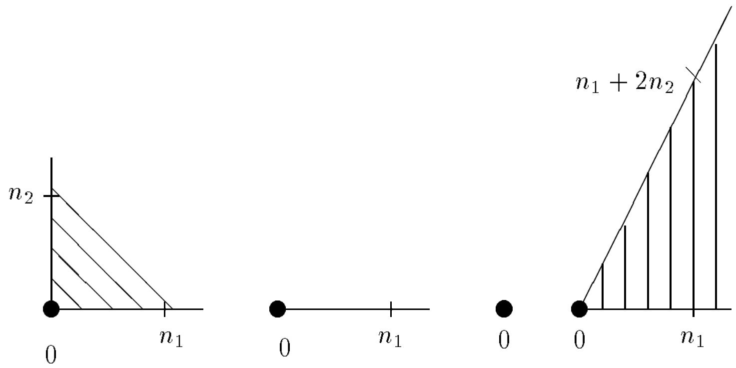


Abbildung 2.3

Lemma 2.1.14
Sei σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel und τ eine Seite von σ. Dann gilt:

1. Es existiert ein $m_0 \in M \cap \check{\sigma}$, so daß
$$\tau = \sigma \cap \{m_0\}^\perp = \{y \in \sigma;\ (m_0 \mid y) = 0\}.$$
Insbesondere ist τ wieder ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel in $N_{\mathbf{R}}$.

2. $\phi_\tau = \phi_\sigma + \mathbf{Z}_{\geq 0}(-m_0)$ und es folgt:
$$X_\tau = \{x \in X_\sigma;\ x(m_0) \neq 0\} \subset X_\sigma \text{ offen.}$$

Beweis. Der Beweis beruht auf einigen elementaren Resultaten der konvexen Analysis, die in [Oda, Anhang] beziehungsweise [Ro] nachzulesen sind. Die Anwendung auf den vorliegenden Fall ist in [Oda] ausgeführt.

Bemerkung 2.1.15
Man beachte, daß aus der Definition einer Fahnenzerlegung von $|\Sigma|$ und Lemma 2.1.14 für den Durchschnitt zweier beliebiger Kegel folgt:
$$\tau = \sigma \cap \sigma' \Rightarrow X_\tau \subset X_\sigma \text{ offen, } X_\tau \subset X_{\sigma'} \text{ offen.}$$
An diesen offen Untermengen werden nun die algebraischen Mengen $X_\sigma,\ \sigma \in \Sigma$ miteinander verheftet. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 2.1.16
Verheftet man die Mengen $X_\sigma,\ \sigma \in \Sigma$ auf natürliche Weise an ihren gemeinsamen offenen Untermengen

$$X_\Sigma := \bigcup_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma,$$

so erhält man einen komplex-analytischen, irreduziblen Hausdorffraum, mit Dimension r gleich Rang von N. X_Σ heißt eine *Torusvarietät* oder eine *Toruseinbettung* bezüglich der Fahne Σ.

Beweis. Nach Lemma 2.1.11 ist jedes X_σ eine r-dimensionale irreduzible normale algebraische Teilmenge eines geeigneten $\mathbf{C}^p$ und somit auch ein analytischer Teil. Nach Bemerkung 2.1.15 können alle diese Mengen auf natürliche Weise längs offener gemeinsamer Teilmengen verheftet werden. Somit ist X_Σ wieder ein r-dimensionaler irreduzibler normaler komplexer analytischer Raum. Als Schwierigkeit bleibt lediglich zu zeigen, daß es sich um einen Hausdorffraum handelt. Dies wird in [Oda] mit Hilfe des Kriteriums durchgeführt, nach welchem es ausreichend ist, daß für alle $\sigma, \tau \in \Sigma$ die Abbildung

$$p : X_{\sigma\cap\tau} \longrightarrow X_\sigma \times X_\tau,\ x \longmapsto (x', x'')$$

eine abgeschlossene Abbildung ist. Hierbei bezeichne x' (beziehungsweise x'') die Einschränkung der Abbildung x auf ϕ_σ (beziehungsweise ϕ_τ).

Bemerkung 2.1.17
Diese Einführung der Torusvarietäten wirkt, zum Beispiel gegenüber derjenigen in [Ehl], unnötig kompliziert, denn zweimal wird ein Dual verwendet. Zunächst der zu σ duale Kegel $\check{\sigma}$, dann X_σ, welches auch eine Art Dual zur Halbgruppe ϕ_σ ist. Dieser Weg läßt jedoch nicht nur die Möglichkeit einer singulären Varietät zu[4], sondern aus dieser Konstruktion folgt außerdem:

$$X_\sigma \cap X_\tau = X_{\sigma\cap\tau}. \tag{7}$$

Dies ist der Schlüssel für die Verbindung der komplexen analytischen Eigenschaften von X_Σ mit der elementaren konvexen Geometrie der definierenden Fahne Σ.
Gleichung 7 ist gleichbedeutend mit $(\sigma \cap \tau)^\vee = \check{\sigma} + \check{\tau}$, also auch mit $\phi_{\sigma\cap\tau} = \phi_\sigma \cap \phi_\tau$.

Bemerkung 2.1.18
Ist die Torusvarietät X_Σ singularitätenfrei, so gilt für die einzelnen Bestandteile nach 2.1.11: $X_\sigma \cong \mathbf{C}^r = \chi_\sigma(X_\sigma)$ für alle $\sigma \in \Sigma^{(r)} := \{\sigma \in \Sigma;\ \dim\sigma = r\}$.
Notation. $(\mathbf{C}^r)_\sigma := \chi_\sigma(X_\sigma)$.

[4] Ein Kriterium dafür ist in Abschnitt 2.2 finden.

Um mit X_Σ rechnerisch umgehen zu können, ist es wichtig die Koordinatenwechsel zwischen den einzelnen Kopien des $\mathbf{C}^r$ zu kennen. Es sei $\sigma,\ \tau \in \Sigma^{(r)}$ und $x \in X_{\sigma\cap\tau}$, $B = \{m_1, ..., m_r\}$ und $B' = \{m'_1, ..., m'_r\}$ Basen von $M \cap \check{\sigma}$ und $M \cap \check{\tau}$, sowie χ_σ, χ_τ die zugehörigen Abbildungen wie in Lemma 2.1.11 definiert. $\chi_\sigma(x) =: z$ und $\chi_\tau(x) =: z'$.
Da B Basis ist, existieren für jedes $k \in \{1, ..., r\}$ $\alpha_{kl} \in \mathbf{Z},\ l = 1, ..., r$, so daß

$$\begin{array}{rcl} m'_k & = & \sum\limits_{l=1}^{r} \alpha_{kl} \cdot m_l \\ \Rightarrow \quad z'_k & = & \chi(m'_k)(x) = \chi(\sum\limits_{l=1}^{r} \alpha_{kl} \cdot m_l)(x) \\ & = & \prod\limits_{l=1}^{r} \chi(\alpha_{kl} \cdot m_l)(x) = \prod\limits_{l=1}^{r} (\chi(m_l)(x))^{\alpha_{kl}} \\ & = & \prod\limits_{l=1}^{r} z_l^{\alpha_{kl}} \text{ für alle } k = 1, ..., r. \end{array}$$

Definiert man:

$g_{\tau\sigma} : (\mathbf{C}^r)_\sigma \setminus def(g_{\tau\sigma}) \longrightarrow (\mathbf{C}^r)_\tau,\ z \longmapsto z^A$,

mit

$A := (\alpha_{kl})_{k,l=1,...,r}$,

$def(g_{\tau\sigma}) = \{(z_1, ..., z_r);\ z_l \neq 0,\ falls\ k\ existiert\ mit\ \alpha_{kl} < 0\}$,

$z^A := (z'_1, ..., z'_r),\ z'_k := \prod_{l=1}^{r} z_l^{\alpha_{kl}}$ für alle $k = 1, ..., r$,

und schränkt die Wertemenge auf das Bild von $g_{\tau\sigma}$ ein, so erhält man einen holomorphen Kartenwechsel bezüglich des Atlasses

$\mathcal{A} := ((\chi_\sigma, X_\sigma))_{\sigma \in \Sigma^{(r)}}$

von X_Σ[5]. Da die restlichen Bedingungen an einen Atlas nach den bisherigen Ergebnissen erfüllt sind, ist X_Σ zusammen mit dem von $\mathcal{A}$ erzeugten maximalen Atlas eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Beispiel 2.1.19
Für $N = \mathbf{Z}$ sei $\sigma := \mathbf{R}_{\geq 0} \subset N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$. Dann ist $\Sigma := \{\sigma, -\sigma, \{0\}\}$ eine Fahne (siehe Abbildung 2.4). Man erhält X_Σ durch Verheften von $X_\sigma \cong \mathbf{C}$ mit $X_{-\sigma} \cong \mathbf{C}$ längs ihrer gemeinsamen offenen Untermenge $X_{\{0\}} \cong \dot{\mathbf{C}} = T_N$. Für den Kartenwechsel gilt nach 2.1.18:

$g_{-\sigma\sigma} : \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \frac{1}{z}$.

Es folgt:

$$X_\Sigma \cong \mathbf{P_1 C} =: \mathbf{PC}.$$

[5] Mit diesen Kartenwechseln als Verheftungsabbildungen von Kopien des $\mathbf{C}^r$ werden in [Ehl] Torusvarietäten eingeführt, analog diesem Beispiel aber nur für den nichtsingulären Fall.

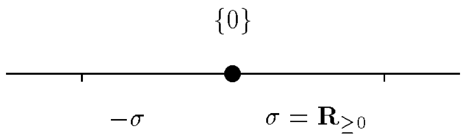


Abbildung 2.4

Beispiel 2.1.20
Sei $\{n_1, n_2\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von $N \cong \mathbf{Z}^2$. Für $a \in \mathbf{Z}$ sei

$$\sigma := \mathbf{R}_{\geq 0} n_1 + \mathbf{R}_{\geq 0} n_2, \qquad \tau := \mathbf{R}_{\geq 0}(-n_1 + a n_2) + \mathbf{R}_{\geq 0} n_2,$$
$$\tau' := \mathbf{R}_{\geq 0}(-n_1 + a n_2) + \mathbf{R}_{\geq 0}(-n_2), \quad \sigma' := \mathbf{R}_{\geq 0} n_1 + \mathbf{R}_{\geq 0}(-n_2).$$

Sei ferner Σ die von $\Sigma^{(r)} := \{\sigma, \sigma', \tau, \tau'\}$ erzeugte Fahne (siehe Abbildung 2.5).

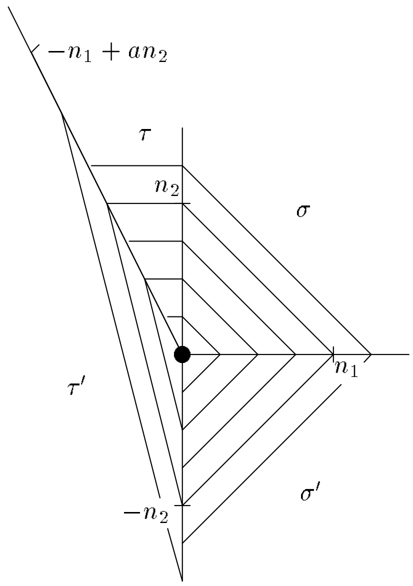


Abbildung 2.5

Dann ist X_Σ die Hirzebruch-Fläche, üblicherweise F_a oder Σ_a genannt. F_a ist ein $\mathbf{PC}$ Bündel über $\mathbf{PC}$.

Beispiel 2.1.21
In diesem Beispiel wird der schon bekannte Raum $\mathbf{P_r C}$ als Torusvarietät vorgestellt.
Sei $\{n_1, ..., n_r\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von $N \cong \mathbf{Z}^r$, $n_0 := -n_1 - \cdots - n_r$, $\sigma_0 := \langle n_1, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$ und $\sigma_k := \langle n_1, ..., n_{k-1}, n_0, n_{k+1}, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$, $k = 1, ..., r$. Σ sei die durch $\Sigma^{(r)} := \{\sigma_0, ..., \sigma_r\}$ erzeugte Fahne (für den Fall $r = 2$ siehe Abbildung 2.6).

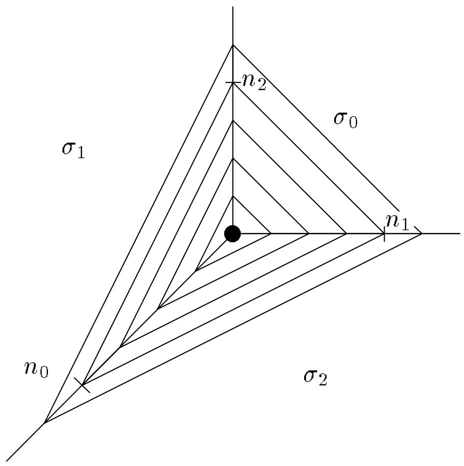


Abbildung 2.6

Für die Kartenwechsel folgt nach Bemerkung 2.1.18:

$$g_{\sigma_k \sigma_0} : (\mathbf{C}^r)_{\sigma_0} \longrightarrow (\mathbf{C}^r)_{\sigma_k}, \ z^0 \longmapsto z^k,$$

mit

$$z_j^k = \begin{cases} \frac{z_j^0}{z_k^0} & j \neq k, \\ \frac{1}{z_k^0} & j = k, \end{cases} \qquad k, j = 1, ..., r.$$

Es folgt:

$$X_\Sigma = \mathbf{P_n C}.$$

Beispiel 2.1.22
Hier wird gezeigt, daß auch $\widetilde{\mathbf{C}}^r$ eine Darstellung als Torusvarietät besitzt.
Sei $\{n_1, ..., n_r\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von $N \cong \mathbf{Z}^r$, $n_0 := n_1 + \cdots + n_r$, $\sigma_k := \langle n_1, ..., n_{k-1}, n_0, n_{k+1}, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$, $k = 1, ..., r$. Σ sei die durch $\Sigma^{(r)} := \{\sigma_1, ..., \sigma_r\}$ erzeugte Fahne (für den Fall $r = 2$ siehe Abbildung 2.7).

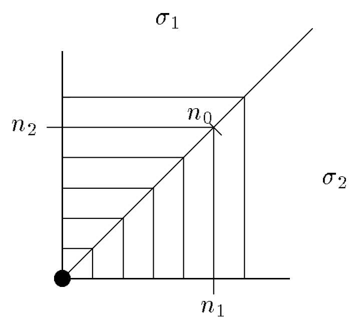


Abbildung 2.7

Für die Kartenwechsel folgt:

$$g_{\sigma_k\sigma_1} : (\mathbf{C}^r)_{\sigma_1} \longrightarrow (\mathbf{C}^r)_{\sigma_k},\ z^1 \longmapsto z^k,$$

mit

$$z_j^k = \begin{cases} \frac{1}{z_k^1} & j = 1, \\ z_k^1 \cdot z_1^1 & j = k, \quad k, j = 1, \ldots, r. \\ \frac{z_j^1}{z_k^1} & sonst, \end{cases}$$

Bis auf einen Koordinatenwechsel sind dies genau die aus Lemma 1.2.5 bekannten Kartenwechsel. Es folgt also:

$$X_\Sigma = \widetilde{\mathbf{C}}^r.$$

2.2 Struktur der Torusvarietäten

In diesem Abschnitt werden einige allgemeine Eigenschaften von Torusvarietäten X_Σ dargestellt. Insbesondere werden auch die Zusammenhänge mit der konvexen Geometrie der definierenden Fahne Σ untersucht.

2.2.1 T_N-Operationen und -Orbits

Zunächst einige Bemerkungen zu den Verbindungen zwischen dem Torus T_N und der durch die Fahne Σ definierten Torusvarietät X_Σ:

Bemerkung 2.2.1
Jede Fahne Σ enthält den Kegel $\{0\}$. Da $\phi_{\{0\}} = M$ und $X_{\{0\}} = T_N$ und da $\{0\}$ eine Seite von allen $\sigma \in \Sigma$ ist, ist T_N eine offene Untermenge aller X_σ, $\sigma \in \Sigma$ (2.1.14). Also enthält jede Torusvarietät den algebraischen Torus T_N als offene Untermenge[6].

Bemerkung 2.2.2
T_N operiert mittels

$$f : T_N \times X_\Sigma \longrightarrow X_\Sigma,\ (t, x) \longmapsto t \cdot x,$$

mit $(t \cdot x)(m) := t(m) \cdot x(m)$ für alle $m \in M$,
algebraisch auf X_Σ.

Beweis.
(i) Zunächst ist zu zeigen, daß f tatsächlich nach X_Σ abbildet.
Sei also $(t, x) \in T_N \times X_\Sigma$ beliebig

$\Rightarrow$ es existiert $\sigma \in \Sigma$, so daß $x \in X_\sigma$

$\Longrightarrow$

1. $(t \cdot x)(0) = t(0) \cdot x(0) = 1 \cdot 1 = 1$
2. $$\begin{aligned}(t \cdot x)(m + m') &= t(m + m') \cdot x(m + m') \\ &= (t(m) \cdot t(m')) \cdot (x(m) \cdot x(m')) \\ &= (t \cdot x)(m) \cdot (t \cdot x)(m') \text{ für alle } m, m' \in \phi_\sigma\end{aligned}$$

$\Longrightarrow t \cdot x \in X_\sigma \subset X_\Sigma$.

(ii) Nun ist zu zeigen, daß es sich hierbei um eine algebraische Operation handelt.
Seien $t, t' \in T_N$ beliebig und e das Einselement aus T_N, dann gilt:

$$\begin{aligned}(t \cdot t')(x)(m) &= (t \cdot t')(m) \cdot x(m) = (t(m) \cdot t'(m)) \cdot x(m) \\ &= t(m) \cdot (t'(m) \cdot x(m)) \\ &= t(m) \cdot (t \cdot x)(m) \text{ für alle } m \in \phi_\sigma \\ \Rightarrow \qquad (t \cdot t') \cdot x &= t \cdot (t \cdot x).\end{aligned}$$

Da außerdem $f(e, x) = x$ gilt, folgt (ii).

Definition 2.2.3
Für ein $x \in X_\Sigma$ heißt $\{t \cdot x;\ t \in T_N\}$ ein T_N-Orbit oder eine T_N-Bahn in X_Σ (bezüglich der algebraischen Operation von T_N auf X_Σ).

[6] Dies ist der Grund für den Namen Toruseinbettung.

Nach Bemerkung 2.1.10 definiert die Abbildung γ_n für $n \in N$ eine Ein-Parameter-Untergruppe von T_N. Die Menge $\{\gamma_n(\lambda) \cdot x;\ \lambda \in \dot{\mathbf{C}}\}$ heißt dann Γ_n-Orbit oder $\dot{\mathbf{C}}$-Orbit bezüglich n. $\gamma_n(\lambda)$ war bisher nur für $\lambda \in \dot{\mathbf{C}}$ definiert. Betrachtet man aber $\gamma_n(\lambda)$ als Element in X_Σ, so kann der Fall eintreten, daß eine Fortsetzung in den Nullpunkt hinein existiert. Dies wird jetzt untersucht:

Definition 2.2.4
Sei $n \in N$ und Σ eine Fahne. Die Abbildung

$$\gamma_n : \dot{\mathbf{C}} \longrightarrow T_N,\ \lambda \longmapsto \gamma_n(\lambda)$$

hat eine Fortsetzung in X_Σ für $\lambda \to 0$, falls eine Abbildung $\bar{\gamma}_n$ existiert, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \dot{\mathbf{C}} & \hookrightarrow & \mathbf{C} \\ \downarrow \gamma_n & & \downarrow \bar{\gamma}_n \\ T_N & \hookrightarrow & X_\Sigma \end{array}$$

Der Punkt $\bar{\gamma}_n(0)$ heißt dann $\lim\limits_{\lambda \to 0} \gamma_n(\lambda)$.

γ_n hat eine Fortsetzung in X_Σ für $\lambda \to \infty$, falls γ_{-n} eine Fortsetzung für $\lambda \to 0$ hat.

<u>*Notation.*</u> Für $n \in N$ werde $\bar{\gamma}_n(0)$ mit 0^n bezeichnet.

Satz 2.2.5
Seien $n, n' \in N$, Σ eine Fahne, und $\sigma,\ \tau \in \Sigma$.

1. γ_n hat eine Fortsetzung in X_Σ für $\lambda \to 0 \Leftrightarrow n \in |\Sigma|$.
2. $0^n = 0^{n'} \Leftrightarrow n$ und n' gehören zum relativen Inneren <u>*eines*</u> $\sigma \in \Sigma$.
   <u>*Notation.*</u> $\mathrm{int}(\sigma)$ bezeichne das relative Innere des Kegels σ.
3. In jedem $T_N - Orbit$ existiert genau ein Punkt der Form $0^{\tilde{n}}$ für ein geeignetes $\tilde{n} \in |\Sigma|$.
   <u>*Notation.*</u> $\mathcal{O}_\tau$ sei das $T_N - Orbit$ des Punktes $0^{\tilde{n}}$, falls $\tilde{n} \in \mathrm{int}(\tau)$. In diesem Fall bezeichne ε_τ den Punkt 0^n.
4. $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_\tau = r - \dim \tau$.
5. τ ist eine Seite von $\sigma \Leftrightarrow \mathcal{O}_\sigma \subset \bar{\mathcal{O}}_\tau$.

Für den *Beweis* sei auf [Te] verwiesen.

Folgerung 2.2.6
Es existieren folgende Bijektionen:

1. $\mathcal{O} : \Sigma \longrightarrow \{T_N - Orbits\ in\ X_\Sigma\},\ \sigma \longmapsto \mathcal{O}_\sigma$.

2. $T : \{0^n;\ n \in N\} \longrightarrow \{T_N - Orbits\ in\ X_\Sigma\},\ x \longmapsto T_N \cdot x$.

Beweis. Die Bijektivität von $\mathcal{O}$ folgt aus 2.2.5 1. und 2., von T direkt aus 2.2.5 3..

Beispiel 2.2.7
Sei Σ die definierende Fahne des $\mathbf{P_2C}$ und alle Bezeichnungen wie in Beispiel 2.1.21. Sei ohne Einschränkung $N = \mathbf{Z}^2$ und $M = \mathbf{Z}^2$. Wähle $n := (\alpha_1, \alpha_2)$ aus dem Inneren von σ_0, also $n_1,\ n_2 \in \mathbf{N}$. Für die Abbildung γ_n ergibt sich:

$\gamma_n(\lambda)(m) = \lambda^{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)} = \lambda^{\alpha_1\beta_1} \cdot \lambda^{\alpha_2\beta_2}$, falls $m = (\beta_1, \beta_2) \in \phi_0$.

Es folgt

$$0^n : \phi_{\sigma_0} \longrightarrow \mathbf{C},\ m \longmapsto 0^{\alpha_1\beta_1} \cdot 0^{\alpha_2\beta_2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 0^n(m_1) & = & 0, \\ 0^n(m_2) & = & 0, \\ 0^n(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

Insbesondere gilt:

$$0^n \in X_{\sigma_0}.$$

γ_n hat mit 0^n eine Fortsetzung in X_Σ für $\lambda \to 0$. Diese ist unabhängig von der Wahl $n \in \mathrm{int}(\sigma_0)$, und entspricht dem Punkt $(0,0) \in (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0}$ (vergl.2.2.5 1., 2.).

Für den zugehörigen Orbit folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\sigma_0} &= \{(t_1 \cdot 0, t_2 \cdot 0) \in (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0};\ t_1, t_2 \in \dot{\mathbf{C}}\} \\ &= \{(0,0)\} \subset (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0} \\ \Rightarrow \quad \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{\sigma_0} &= 0 = 2 - \dim \sigma_0 \text{ (vergl. 2.2.5 4.).} \end{aligned}$$

Für die weiteren Elemente von $\Sigma^{(2)}$ ergibt sich analog:

$$\begin{array}{rcll} \varepsilon_{\sigma_j} & = & (0,0) \in (\mathbf{C}^2)_{\sigma_j}, & j = 1, 2. \\ \mathcal{O}_{\sigma_j} & = & \{(0,0)\} \subset (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0}, & j = 1, 2. \end{array}$$

Für das Elemente $\mathbf{R}_{\geq 0} \cdot (1,0)$ aus $\Sigma^{(1)}$ folgt beispielsweise:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)} &= (0,1) \in (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0}. \\ \mathcal{O}_{\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)} &= \{0\} \times \dot{\mathbf{C}} \subset (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0}. \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)} &= 2 - \dim(\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)) = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Für den Kegel $\{0\}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\{0\}} &= (1,1) \in (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0}. \\ \mathcal{O}_{\{0\}} &= \dot{\mathbf{C}} \times \dot{\mathbf{C}}. \\ \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{\{0\}} &= 2 - \dim\{0\} = 2 - 0 = 2. \end{aligned}$$

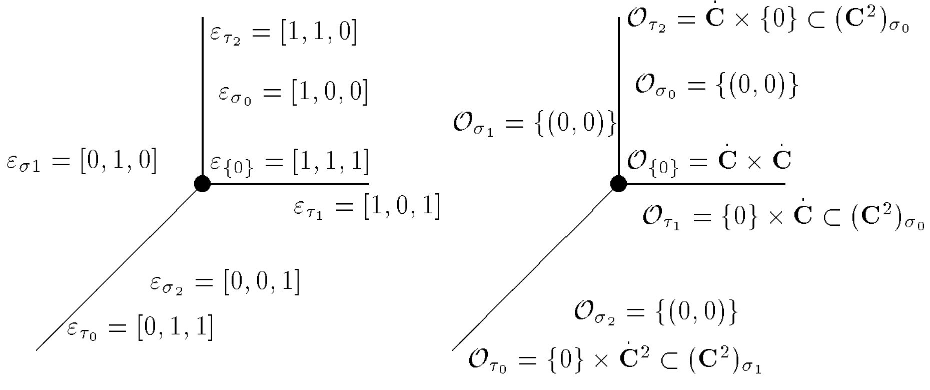
Desweiteren kann man noch die Aussage von 2.2.5 5. für dieses Beispiel prüfen. So gilt für σ_0:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0} \supset \mathcal{O}_{\sigma_0} &= \{(0,0)\} \subset \{0\} \times \mathbf{C} \ (\subset (\mathbf{C}^2)_{\sigma_0}) \\ &= \overline{\{0\} \times \dot{\mathbf{C}}} \\ &= \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{R}_{\geq 0}(1,0)}. \end{aligned}$$

Analoges folgt für alle anderen Seiten von σ_0.
Für den Kegel $\mathbf{R}_{\geq 0}(-1,-1) =: \tau_0$ folgt (in homogenen Koordinaten):

$\overline{\mathcal{O}}_{\tau_0} = \{[0,1,z];\ z \in \mathbf{C}\} \not\supset \{[1,0,0]\} = \mathcal{O}_{\sigma_0}$
im Einklang mit 2.2.5 5..

Noch bemerken kann man, daß alle diese Orbits disjunkt sind, was auch aus 2.2.5 3. folgt.
In Abbildung 2.8 a) sind die Punkte der Form $0^n, n \in N$ mit homogenen Koordinaten in die Fahne des $\mathbf{P_2C}$, in Abbildung 2.8 b) die zugehörigen T_N-Orbits als Teilmengen des jeweiligen $(\mathbf{C}^2)_\sigma$, falls nicht anders angegeben, eingetragen.



(a) (b)

Abbildung 2.8

2.2.2 Äquivariante holomorphe Abbildungen

Sei in 2.2.2 $N' \cong \mathbf{Z}^{r'}$.

Definition 2.2.8
T_N, $T_{N'}$ seien algebraische Tori, die auf den Torusvarietäten X_Σ und $X_{\Sigma'}$ operieren.
$f' : T_N \longrightarrow T_{N'}$ sei ein Homomorphismus und
$f : X_\Sigma \longrightarrow X_{\Sigma'}$ eine holomorphe Abbildung.
Falls

$$f(t \cdot x) = f'(t) \cdot f(x) \text{ für alle } t \in T_N,\ x \in X_\Sigma$$

heißt f äquivariante holomorphe Abbildung (unter Beachtung von f').

Äquivariante holomorphe Abbildungen werden im weiteren Verlauf noch eine größere Rolle spielen, deshalb wird nun noch ein Resultat bezüglich der Zusammenhänge mit den definierenden Fahnen der involvierten Torusvarietäten bewiesen.

Definition 2.2.9
Seien Σ, Σ' Fahnen in N und N'.

$\Phi : N' \longrightarrow N$

heißt eine Fahnenabbildung, falls Φ $\mathbf{Z}$-linear ist, und die relle Erweiterung $\tilde{\Phi} : N'_{\mathbf{R}} \longrightarrow N_{\mathbf{R}}$ folgende Bedingung erfüllt:
für jedes $\sigma' \in \Sigma'$ existiert ein $\sigma \in \Sigma$, so daß $\tilde{\Phi}(\sigma') \subset \sigma$.
Notation. $\Phi : (N', \Sigma') \longrightarrow (N, \Sigma)$ Fahnenabbildung.

Satz 2.2.10
Eine Fahnenabbildung $\Phi : (N', \Sigma') \longrightarrow (N, \Sigma)$ induziert eine äquivariante holomorphe Abbildung

$$\Phi_* : X_{\Sigma'} \longrightarrow X_\Sigma,$$

deren Einschränkung auf die offene Teilmenge $T_{N'}$ mit dem von Φ erzeugten Homomorphismus algebraischer Tori

$$\Phi \otimes id : T_{N'} = N' \otimes_{\mathbf{Z}} \dot{\mathbf{C}} \longrightarrow T_N = N \otimes_{\mathbf{Z}} \dot{\mathbf{C}}$$

übereinstimmt.

Beweis. Sei $\Phi^* : M \longrightarrow M'$ die zu $\Phi : N' \longrightarrow N$ duale Abbildung, $\tilde{\Phi}^* : M_{\mathbf{R}} \longrightarrow M'_{\mathbf{R}}$ die relle Erweiterung, und $\Phi \otimes id$ der von Φ erzeugt Homomorphismus algebraischer Tori.

Sei nun $\tilde{\Phi}(\sigma') \subset \sigma,\ \sigma' \in \Sigma',\ \sigma \in \Sigma$

$\Rightarrow \tilde{\Phi}^*(\check{\sigma}) \subset (\sigma')^\vee$ und $\Phi^*(\phi_\sigma) \subset \phi_{\sigma'} = M' \cap (\sigma')^\vee$

$\Rightarrow \Phi^* : \phi_\sigma \longrightarrow \phi_{\sigma'}$

$\Rightarrow \Phi_* : X'_{\sigma'} \longrightarrow X_\sigma$

mit

$(\Phi_*(x'))(m) := x'(\Phi^*(m))$ für $m \in \phi_\sigma$.

Da

$$\begin{aligned}(\Phi_*(t' \cdot x'))(m) &= (t' \cdot x')(\Phi^*(m)) = t'(\Phi^*(m)) \cdot x'(\Phi^*(m)) \\ &= (\Phi_*(t'))(m) \cdot (\Phi_*(x'))(m) \text{ für alle } m \in \phi_\sigma,\ t' \in T_{N'}\end{aligned}$$

ist Φ_* äquivariant.

Durch Verheften affiner Teile erhält man eine äquivariante holomorphe Abbildung

$$\Phi_* : X_{\Sigma'} \longrightarrow X_\Sigma.$$

2.2.3 Nichtsingularität und Kompaktheit

Nichtsingularität und Kompaktheit sind Eigenschaften, die sich bei Torusvarietäten direkt an der Geometrie der definierenden Fahne ablesen lassen.

Definition 2.2.11

1. Sei σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel. Dann heißt σ regulär (bzw. nicht singulär), wenn es eine $\mathbf{Z}$-Basis $\{n_1, ..., n_r\}$ von N und ein $s \leq r$ gibt, so daß $\sigma = \langle n_1, ..., n_s \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$.
2. Eine Fahne Σ heißt regulär (bzw. nicht singulär), wenn alle $\sigma \in \Sigma$ regulär sind.

Satz 2.2.12
Sei Σ eine Fahne, dann ist X_Σ nicht singulär, das heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit, genau dann, wenn Σ nicht singulär ist.

Beweis. Siehe [Oda, Seite 15].

Beispiel 2.2.13
Sei $\dim N = 2$, $\{n_1, n_2\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von N und Σ die von $\Sigma^{(2)} := \{\sigma\}$ erzeugte Fahne, mit $\sigma := \langle n_1, (n_1 + 2n_2) \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$. Wie schon in Beispiel 2.1.13 erwähnt, hat X_Σ in 0 eine Singularität. Das Minimalsystem der Erzeuger $\{n_1, (n_1 + 2n_2)\}$ von σ über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ erzeugt über $\mathbf{Z}$ eine Untergruppe von N vom Index 2. σ ist also singulär.

Definition 2.2.14
Eine Fahne Σ für die $|\Sigma|(=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma)=N$ gilt, heißt komplette Fahne.

Satz 2.2.15
Sei Σ eine Fahne, dann gilt:

$$X_\Sigma \text{ kompakt } \Leftrightarrow \Sigma \text{ komplett.}$$

Ferner ist $\#\{\sigma\in\Sigma\}$ endlich, falls Σ komplett.

Beweis. Siehe [Ehl].

Beispiel 2.2.16

1. In 2.1.21 wurde gezeigt, wie man den komplexen projektiven Raum als Torusvarietät über eine Fahne Σ konstruieren kann. Wie man dort sehen konnte, galt $|\Sigma|=N$, und bekanntlicherweise ist $\mathbf{P_r C}$ kompakt.
2. Für die $\widetilde{\mathbf{C}}^r$ definierende Fahne gilt lediglich $|\Sigma|=\langle n_1,...,n_r\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}\cong\mathbf{R}^r_{\geq 0}$. Sei für $k\in\mathbf{N}$ $z_k:=((k,0,...,0),[1,0,...,0])$

   $\Rightarrow (z_k)_{k\in\mathbf{N}}\subset\widetilde{\mathbf{C}}^r$,

   aber diese Folge hat selbst in $\mathbf{C}^r\times\mathbf{P_{r-1}C}\supset\widetilde{\mathbf{C}}^r$ keine konvergente Teilfolge. Also ist $\widetilde{\mathbf{C}}^r$ im Einklang mit Satz 2.2.15 nicht kompakt.

2.2.4 Kanonische Untermannigfaltigkeiten

In Bemerkung 2.1.18 wurde schon auf einen anderen Weg zur Einführung von Torusvarietäten hingewiesen. Demnach wird X_Σ gebildet durch Vereinigen von Kopien des $\mathbf{C}^r$ und Ausdividieren einer Äquivalenzrelation. Aus dieser Definition ergeben sich weitere Möglichkeiten, die Struktur einer Torusvarietät zu verstehen.

Im Einklang mit Bemerkung 2.1.18 sei Σ im Unterabschnitt 2.2.4 immer eine reguläre Fahne.

Bemerkung 2.2.17
Σ sei eine Fahne und $\sim$ die Äquivalenzrelation auf der $\#\Sigma$-fachen Vereinigung von Kopien des $\mathbf{C}^r$, die durch die Verheftungsabbildungen $g_{\tau\sigma}$, mit $\sigma, \tau \in \Sigma$ (Definition siehe 2.1.18), definiert wird. Dann gilt:

$$X_\Sigma \cong \frac{\bigcup_{\sigma \in \Sigma^{(r)}} (\mathbf{C}^r)_\sigma}{\sim}.$$

Der *Beweis* ist nach den Rechnungen in Bemerkung 2.1.18 klar.

Notation. Von nun an wird die Bezeichnung X_Σ auch für die durch die Verheftungsabbildungen definierten nichtsingulären Toruseinbettungen verwandt.

Lemma 2.2.18
Sei $x \in X_\Sigma$. Dann ist der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{r} \log z_{\sigma k} \cdot v_{\sigma k}$$

unabhängig von $\sigma = \langle v_{\sigma 1}, ..., v_{\sigma r} \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}} \in \Sigma$, wobei $z_{\sigma k}$ die k-te Komponente des Punktes x in $(\mathbf{C}^r)_\sigma$ bezeichne.

Beweis. Sei $\sigma = \langle n_1, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$ und $\tilde{\sigma} = \langle \tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$. Für $z \in (\mathbf{C}^r)_\sigma$ und $\tilde{z} \in (\mathbf{C}^r)_{\tilde{\sigma}}$ gilt nach 2.1.18:

$z \sim \tilde{z} \Leftrightarrow z^{A^*_{\tilde{\sigma}\sigma}} = \tilde{z}$

wobei $A_{\tilde{\sigma}\sigma}$ die durch

$(\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_r)^t = A_{\tilde{\sigma}\sigma} \cdot (n_1, ..., n_r)^t$

definierte Matrix aus $GL_r\mathbf{Z}$ ist und $A^*_{\tilde{\sigma}\sigma} = (A^{-1}_{\tilde{\sigma}\sigma})^t$.

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r} \log \tilde{z}_k \cdot \tilde{n}_k &= \sum_{k=1}^{r} \log \left(z^{A^*_{\tilde{\sigma}\sigma}}\right)_k \cdot \tilde{n}_k \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} \log z_j^{a^*_{kj}} \right) \cdot \tilde{n}_k &&= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} a^*_{kj} \cdot \log z_j \right) \cdot \tilde{n}_k \\
&= \sum_{j=1}^{r} \log z_j \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} a^*_{kj} \cdot \tilde{n}_k \right) &&= \sum_{j=1}^{r} \log z_j \cdot n_j .
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Definition 2.2.19
Für $\tau \in \Sigma$, Σ Fahne, und $s \leq r = \dim N$ sei

$$St\tau^{(s)} := \{\sigma \in \Sigma;\ \tau \text{ ist Seite von } \sigma,\ \dim \sigma = s\}.$$

Definition 2.2.20
Sei $\tau = \langle n_1, ..., n_s \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}} \in \Sigma^{(s)}, \Sigma$ Fahne. Die Untermannigfaltigkeit $F_\tau \subset X_\Sigma$ der Kodimension s sei gegeben durch $F_\tau \subset \bigcup_{\sigma \in St\tau^{(r)}} (\mathbf{C}^r)_\sigma$ und die Bedingung

$$F_\tau \cap (\mathbf{C}^r)_\sigma = \{z \in (\mathbf{C}^r)_\sigma;\ z_1 = ... = z_s = 0\},\ \text{falls } \sigma = \langle n_1, ..., n_s, n_{s+1}, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}.$$

Die so definierten Untermannigfaltigkeiten F_τ heißen die <u>*kanonischen*</u> Untermannigfaltigkeiten von X_Σ.

Bemerkung 2.2.21
Sei Σ eine Fahne.
[1] Seien $\sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma$, so daß

$\sigma = \langle n_1, ..., n_s, n_{s+1}, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$,
$\tilde{\sigma} = \langle n_1, ..., n_s, \tilde{n}_{s+1}, ..., \tilde{n}_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$

$$\Rightarrow A_{\tilde{\sigma}\sigma} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B_{\tilde{\sigma}\sigma} & C_{\tilde{\sigma}\sigma} \end{pmatrix}, A^*_{\tilde{\sigma}\sigma} = \begin{pmatrix} I & -B^t_{\tilde{\sigma}\sigma} C^*_{\tilde{\sigma}\sigma} \\ 0 & C^*_{\tilde{\sigma}\sigma} \end{pmatrix},$$

mit geeigneten Matrizen $B_{\tilde{\sigma}\sigma},\ C_{\tilde{\sigma}\sigma}$.

[2] Setzt man $(\mathbf{C}^{r-s})_\sigma := F_\tau \cap (\mathbf{C}^r)_\sigma,\ \sigma \in \Sigma$, dann definieren die $C^*_{\tilde{\sigma}\sigma}$ aus [1] die Übergangsabbildungen für diese Karten von F_τ.

[3] F_τ ist in X_Σ abgeschlossen, falls $St\tau^{(r)}$ endlich ist.

[4] F_τ ist eine Torusvarietät.

Beweis.
[1] und [2] folgen direkt durch Nachrechnen aus den Definitionen.

[3] Sei $\sigma \in St\tau^{(r)}$ beliebig.
Da $F_\tau \cap (\mathbf{C}^r)_\sigma = \{z \in (\mathbf{C}^r)_\sigma;\ z_1 = ... = z_s = 0\}$ folgt $F_\tau \subset (\mathbf{C}^r)_\sigma$ abgeschlossen.

Für beliebiges $\tilde{\sigma}$ nicht in $St\tau^{(r)}$ ergibt sich:

$\dim(\tau \cap \tilde{\sigma}) =: k < s$

$$\Rightarrow A^*_{\tilde{\sigma}\sigma} =: \begin{pmatrix} I & E \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei I die $(k \times k)$-Einheitsmatrix ist, hat in jeder der $r - k$ letzten Spalten

eine negative Zahl.
Für den Definitionsbereich der Verheftungsabbildung $g_{\tilde{\sigma}\sigma}$ folgt also:

$$\begin{array}{rrcl} & def(g_{\tilde{\sigma}\sigma}) \cap F_\tau & = & \emptyset \\ \Rightarrow & F_\tau \cap (\mathbf{C}^r)_{\tilde{\sigma}} & = & \emptyset. \end{array}$$

Insgesamt folgt: $F_\tau \subset \bigcup_{\sigma \in \Sigma^{(r)}} (\mathbf{C}^r)_\sigma$ abgeschlossen (da $St\tau^{(r)}$ endlich).
Und wegen der Abgeschlossenheit der Projektion $p : \bigcup_{\sigma \in \Sigma^{(r)}} \sigma \longrightarrow X_\Sigma$ folgt die Behauptung.

[4] Definiert man:

$$\begin{array}{rrcl} & N_\tau & := & N \cap \tau \\ \Rightarrow & \Sigma_\tau & := & \{pr\,\sigma;\ \tau \ Seite\ von\ \sigma\} \text{ ist eine Fahne in } (N_\tau)_{\mathbf{R}}, \end{array}$$

wobei
$pr : N_{\mathbf{R}} \longrightarrow N_{\mathbf{R}}/(N_\tau)_{\mathbf{R}}$ die Projektion ist.
Aus [1] ergibt sich:

$$F_\tau = X_{\Sigma_\tau}.$$

Beispiel 2.2.22
Sei Σ die in Beispiel 2.1.22 definierte Fahne von $\widetilde{\mathbf{C}}^r$ und $\tau := \langle n_0 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$. Dann gilt für F_τ:
$F_\tau \cap (\mathbf{C}^r)_{\sigma_k} = \{z^k \in (\mathbf{C}^r)_{\sigma_k};\ z_k^k = 0,\ k = 1, ..., r\}.$
Für die Kartenwechsel von F_τ ergibt sich nach 2.2.21[2]:
$g'_{\sigma_k\sigma_1} : (\mathbf{C}^r)_{\sigma_0} \cap F_\tau \longrightarrow (\mathbf{C}^r)_{\sigma_k} \cap F_\tau,\ z^0 \longmapsto z^k,$

$$\text{mit } z_j^k = \begin{cases} \frac{1}{z_k^1} & j = 1, \\ 0 & j = k, \\ \frac{z_j^1}{z_k^1} & k = j, \end{cases} \quad k, j = 1, ..., r.$$

Es folgt:

$$F_\tau \cong \mathbf{P_{r-1}C}.$$

Damit ist F_τ wieder eine Torusvarietät 2.1.21 und liegt in X_Σ abgeschlossen.
Mit der Abbildung ω aus Abschnitt 1.2 folgt:

$$X_\Sigma \setminus F_\tau \overset{\omega}{\cong} \mathbf{C}^r \setminus \{0\}.$$

(Der Nachweis, daß ω sogar eine holomorphe Abbildung ist, wird bei Verwendung des Atlasses aus Beispiel 2.1.22 trivial.)

Sei Σ_0 die von $\Sigma_0^{(r)} := \{\langle n_1, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}\}$ erzeugte Fahne, so ergibt sich

$$X_{\Sigma_0} = \mathbf{C}^r.$$

Vergleicht man nun diese beiden Räume miteinander, so erkennt man, daß das Einfügen von τ als eindimensionaler Kegel in die Fahne Σ_0 dazu führte, daß der Nullpunkt von X_{Σ_0} zu einem komplexen projektiven Raum $\mathbf{P_{r-1}C}$ aufgeblasen wurde.

Analog würde durch Einfügen eines weiteren eindimensionalen Kegels eine weitere Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 entstehen. Wählt man aus Σ den Kegel $\sigma_k,\ k=1,...,r$, und fügt hier einen eindimensionalen Kegel ein, so wird der Punkt

$$(0,...,0,[0,...,\underbrace{1}_{k-te\ Stelle},...,0])\in \mathbf{C}\times \mathbf{P_{r-1}C}\cong \widetilde{\mathbf{C}}^r$$

zu einem weiteren $\mathbf{P_{r-1}C}$ aufgeblasen.

Bemerkung 2.2.23 (Zu Beispiel 2.2.22.)
Führt man für dieses Beispiel das in 2.2.21[4] beschriebene Verfahren durch, so erhält man:

1. $N_\tau = \mathbf{Z}_{\geq 0}\cdot n_0$

2. $pr\,\sigma_k =: \sigma_{\tau,k} = \langle n_{\tau,1},...,n_{\tau,k-1},n_{\tau,r},n_{\tau,k+1},...,n_{\tau,r-1}\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\ k=1,...,r-1.$
   $pr\,\sigma_r =: \sigma_{\tau,r} = \langle n_{\tau,1},...,n_{\tau,r-1}\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$,
   mit $n_{\tau,k} = (-1,...,\underbrace{r-1}_{k-te\ Stelle},...,-1)$.

3. $N/N_\tau \cong \langle n_{\tau,1},...,n_{\tau,r-1}\rangle_{\mathbf{Z}}$
   ($\cong$ bedeutet hier isomorph in der Kategorie der freien $\mathbf{Z}$- Module).

4. Σ_τ als die von $\Sigma_\tau^{(r-1)} = \{\sigma_{\tau,1},...,\sigma_{\tau,r}\}$ erzeugte Fahne, ist eine Fahne in $N_{\mathbf{R}}/(N_\tau)_{\mathbf{R}}$.

Da für die erzeugenden Elemente $\{n_{\tau,k};\ k=1,...,r-1\}$ die Beziehung

$$n_{\tau,1}+\cdots+n_{\tau,r}=0$$

gilt, und das Bildungsverfahren für die Kegel der Dimension r-1 dasselbe ist wie im Beispiel 2.1.21, folgt

$$X_{\Sigma_\tau}\cong \mathbf{P_{n-1}C}.$$

2.3 Projektivität

Dieser Abschnitt ist allein der Eigenschaft Projektivität gewidmet, welche für die Konstruktion von Morsefunktionen auf Torusvarietäten eine entscheidende Rolle spielt.

Ziel ist das Kernresultat, nach welchem man einer Torusvarietäten genau dann einen gewissen kompakten Polyeder zuordnen kann, wenn sie projektiv ist. Dies wird im folgenden Abschnitt 3.1 benutzt werden, um Morsefunktionen zu konstruieren.

Definition 2.3.1
Die durch eine reguläre Fahne Σ in N definierte Torusvarietät heißt *projektive* Torusvarität, wenn sie sich als abgeschlossener analytischer Unterraum in einen geeigneten projektiven Raum $\mathbf{P}_{\mathbf{r}'}\mathbf{C}$ holomorph einbetten läßt.

Bemerkung 2.3.2
Aus der Definition einer projektiven Torusvarietät X_Σ folgt, daß X_Σ als abgeschlossener Teil des kompakten Raumes $\mathbf{P}_{\mathbf{r}'}\mathbf{C}$ kompakt ist. Deshalb bezeichne im Rest des Abschnittes 2.3 Σ immer eine reguläre Fahne mit der Eigenschaft $|\Sigma| = N_{\mathbf{R}}$.

Beispiel 2.3.3
Mittels der identischen Abbildung ist der r-dimensionale projektive Raum trivialerweise eine projektive Torusvarietät.

Um die Eigenschaft Projektivität auf die definierende Fahne übertragen zu können, benötigt man noch folgenden Begriff:

Definition 2.3.4
Eine Funktion $h : |\Sigma| \longrightarrow \mathbf{R}$ heißt Σ-lineare Stützfunktion, falls $h(N \cap |\Sigma|) \subset \mathbf{Z}$ gilt, und für ein beliebiges $\sigma \in \Sigma$ die eingeschränkte Funktion $h\mid_\sigma$ linear ist.

Bemerkung 2.3.5
Für eine Stützfunktion nach obiger Definition existieren für jedes $\sigma \in \Sigma$ ein $l_\sigma \in M$, so daß gilt:

$$h(n) = (l_\sigma \mid n) \text{ für alle } n \in \sigma.$$

Außerdem gilt:

$$(l_\sigma \mid n) = (l_\tau \mid n) \text{ falls } \tau \text{ Seite von } \sigma.$$

Die Menge der Σ-linearen Stützfunktionen bildet also eine additive Gruppe.

Notation. Diese Gruppe sei mit $SF(N, \Sigma)$ bezeichnet.

Definition 2.3.6
Sei $h \in SF(N, \Sigma)$.

1. h heißt konvex, wenn für alle $n, n' \in N_{\mathbf{R}}$ gilt:
$$h(n + n') \leq h(n) + h(n').$$

2. h heißt strikt konvex, wenn die Gleichheit aus 1. nur gilt, wenn n, n' aus dem gleichen Kegel σ stammen.

Bemerkung 2.3.7
Sei $h \in SF(N, \Sigma)$. Dann gilt:
h ist strikt konvex
$\Leftrightarrow$ für jedes $\sigma \in \Sigma$ existiert $l_\sigma \in M$, so daß für alle $n \in N_{\mathbf{R}}$ gilt:

$$(l_\sigma \mid n) \begin{cases} = h(n) & \text{falls } n \in \sigma, \\ > h(n) & \text{falls } n \notin \sigma. \end{cases}$$

Beweis. Sei $\{l_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\} \subset M$ die durch die Gleichungen $h(n) = (l_\sigma \mid n)$, falls $n \in \sigma \in \Sigma$, bestimmte Menge.
(i) Wähle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ beliebig, so daß $\sigma \neq \sigma'$, und hierzu $n' \in \sigma'$.
Da σ regulär existiert ein $n \in \sigma$, so daß $n + n' \in \sigma$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad h(n+n') &= (l_\sigma \mid n + n') = (l_\sigma \mid n) + (l_\sigma \mid n') \\ &> h(n) + h(n') \qquad \text{(nach Voraussetzung)} \\ &= (l_\sigma \mid n) + (l_{\sigma'} \mid n') \\ \Rightarrow \quad (l_\sigma \mid n') &> (l_{\sigma'} \mid n') = h(n'). \end{aligned}$$

Damit ist die Hinrichtung bewiesen.

(ii) Sei nun $n, n' \in N_{\mathbf{R}}$.
a) Sei $\sigma \in \Sigma$, so daß $n, n' \in \sigma$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad h(n+n') &= (l_\sigma \mid n + n') = (l_\sigma \mid n) + (l_\sigma \mid n') \\ &= h(n) + h(n'). \end{aligned}$$

b) Sei $n \in \sigma \neq \sigma' \ni n'$ und $\tilde{\sigma}$, so daß $n + n' \in \tilde{\sigma}$
$\Rightarrow n$ oder $n' \notin \tilde{\sigma}$. Ohne Einschränkung sei $n' \notin \tilde{\sigma}$.

$$\begin{aligned} h(n+n') &= (l_{\tilde{\sigma}} \mid n + n') = (l_{\tilde{\sigma}} \mid n) + (l_{\tilde{\sigma}} \mid n') \\ &\geq h(n) + (l_{\tilde{\sigma}} \mid n') \\ &> h(n) + h(n'), \text{ da } n' \notin \tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Aus a) und b) folgt die Rückrichtung und zusammen mit (i) die gesamte Behauptung.

Satz 2.3.8
Die Toruseinbettung X_Σ ist genau dann projektiv, wenn es eine Stützfunktion $h \in SF(N,\Sigma)$ gibt, die strikt konvex ist.

Beweis. Der Beweis ist in [Oda, Korollar 2.5 und 2.14] ausgeführt.

Definition 2.3.9
Sei $h \in SF(N,\Sigma)$. Dann sei

$$\Delta_h := \{m \in M_{\mathbf{R}};\ (m \mid n) \geq h(n),\ \textit{für alle}\ n \in N_{\mathbf{R}}\}.$$

Bemerkung 2.3.10
Für $h \in SF(N,\Sigma)$ ist Δ_h ein konvexer Polyeder, da es als Schnitt von Halbräumen gebildet wird. Ein Resultat der konvexen Analysis [Ro],[Oda, Anhang] besagt nun, daß für den Fall einer strikt konvexen Funktion h

1. dieser Polyeder r-dimensional und kompakt ist.
2. $\{l_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ (Definition siehe Bemerkung 2.3.7) ist die Eckenmenge von Δ_h.
3. $l_\sigma \neq l_\tau$ falls $\sigma \neq \tau$ und beide aus $\Sigma^{(r)}$.

Darüberhinaus hat dieser Polyeder die wichtige Eigenschaft, daß jede Ecke $l_\sigma,\ \sigma \in \Sigma$ mit genau r weiteren Ecken durch eine Kante verbunden ist. Ferner existiert eine $\mathbf{Z}$-Basis B_σ von M, die gleichzeitig über $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ die Halbgruppe ϕ_σ erzeugt, folgender Form: $B_\sigma = \{m_{1,\sigma} - l_\sigma, ..., m_{r,\sigma} - l_\sigma\}$ und alle $m_{i,\sigma},\ i = 1, ..., r$ liegen auf den Kanten, deren eines Ende l_σ ist.

Beispiel 2.3.11
Sei $\{n_1, ..., n_r\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von N, $\{m_1, ..., m_r\}$ die dazu duale Basis und Σ die in Beispiel 2.1.21 vorgestellte Fahne des $\mathbf{P_r C}$. Definiert man:

$$\begin{aligned} l_{\sigma_0} &:= 0 \in M, \\ l_{\sigma_i} &:= m_i,\ i = 1, ..., r. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} h:\ N_{\mathbf{R}} &\longrightarrow \mathbf{R}, \\ n &\longmapsto (l_{\sigma_i} \mid n), \text{ falls } n \in \sigma_i,\ i = 0, ..., r \end{aligned}$$

eine strikt konvexe Stützfunktion aus $SF(N,\Sigma)$. Für den zugehörigen Polyeder Δ_h gilt:

$$\Delta_h \cap M = \{0, m_1, ..., m_r\}.$$

Abbildung 2.9 zeigt den Polyeder für den Fall $r = 3$.

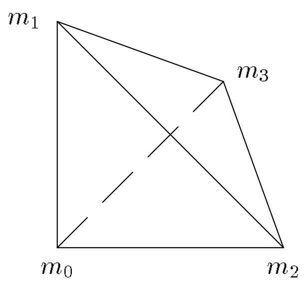


Abbildung 2.9

Bemerkung 2.3.12
Die Bildung dieses Polyeders kann man sich sehr anschaulich verständlich machen. Dazu sei $N = \mathbf{Z}^r = M$ und $h \in SF(N, \Sigma)$. Sei τ ein $(r-1)$-dimensionaler Kegel aus Σ. Ferner seien $\sigma, \sigma' \in \Sigma^{(r)}$, so daß τ von beiden eine Seite ist. Dann gilt für jedes $n \in \tau$:

$h(n) = (l_{\sigma'} \mid n) = (l_\sigma \mid n)$.

Die Strecke, die l_σ mit $l_{\sigma'}$ verbindet, muß nun senkrecht zu τ liegen, da sonst ein $n_0 \in \tau$ existiert, so daß $(l_\sigma \mid n_0) \neq (l_{\sigma'} \mid n_0)$

$\Rightarrow \tau \subset \{l_\sigma - l_{\sigma'}\}^\perp$

$\Rightarrow$ es existiert ein $m_{\sigma',\sigma}$ aus der Kante von l_σ nach $l_{\sigma'}$, das zu einem Erzeugendensystem von $\phi_{\sigma'}$ gehört

$\Rightarrow$ die Strecke von l_σ nach $l_{\sigma'}$ ist eine Kante von Δ_h.

Es gilt also, daß $(l_\sigma + \tau^\perp) \cap \Delta_h$ eine Kante von Δ_h ist.

Diese Überlegungen analog durchgeführt, ergibt sich für einen Kegel τ der Dimension d, daß für einen beliebigen Kegel $\sigma \in \Sigma^{(r)}$, mit τ ist Seite von σ, gilt:

$(l_\sigma + \tau^\perp) \cap \Delta_h$ ist eine Seite von Δ der Dimension $(r - d)$.

Es existiert also eine bijektive Abbildung zwischen den Kegeln aus Σ der Dimension d und den Seiten des Polyeders der Dimension $(r - d)$. Faßt man die Elemente von τ als Linearform auf $M_{\mathbf{R}}$ auf, so sind diese auf $(l_\sigma + \tau^\perp) \cap \Delta_h$ konstant, und nehmen dort ihren minimalen Wert bezüglich des ganzen Polyeders Δ an.

Dies läßt sich zu folgendem Resultat zusammenfassen:

$$\Delta_h = \bigcap_{\sigma \in \Sigma^{(r)}} (l_\sigma + \check{\sigma}).$$

Das bedeutet insbesondere, daß der Polyeder Δ_h allein durch die Fahne Σ bis auf einen ganzzahligen Faktor $L \in \mathbf{N}$ eindeutig bestimmt ist.

In der folgenden Abbildung 2.10 sei $N = \mathbf{Z}^2$ mit M identifiziert, und der Polyeder Δ_h für eine spezielle Wahl von h in die Fahnenzerlegung der Ebene eingezeichnet.

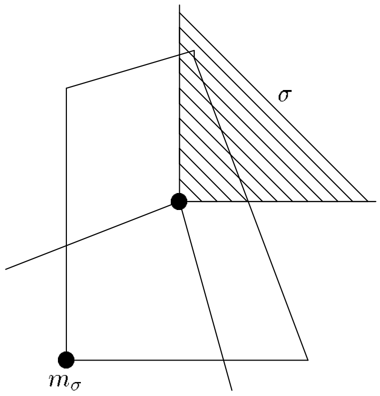


Abbildung 2.10

Aus dieser Darstellung des Polyeders Δ_h ergibt sich für die Dimension 2, daß alle kompakten Torusvarietäten projektiv sind. Denn für die Winkel $\alpha_1, ..., \alpha_m$ der Kegel $\sigma_1, ..., \sigma_m$ (Bezeichnungen siehe Abbildung 2.11) gilt im kompakten Fall:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 2\pi.$$

Für die Winkel $\beta_1, ..., \beta_m$ der dualen Kegel $\check{\sigma}_1, ..., \check{\sigma}_m$ ergibt sich:

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j = \sum_{j=1}^{m} (\pi - \alpha_j) = (m-2) \cdot \pi.$$

Da $m \geq 3$ lassen sich die dualen Kegel zu einem m-Eck zusammenfügen.

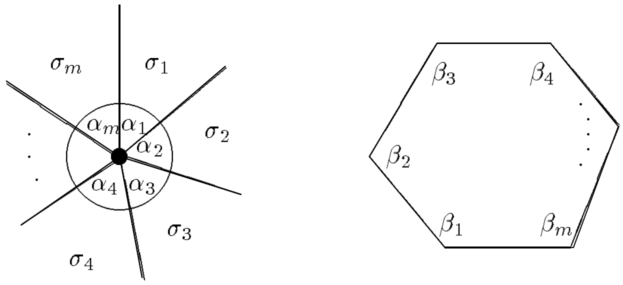


Abbildung 2.11

Nun kann man auch die Einbettungsfunktion für eine projektive Torusvarietät angeben:

Bemerkung 2.3.13
Sei X_Σ projektiv und $h \in SF(N,\Sigma)$ strikt konvex. Ferner sei $\{m_0,...,m_s\} = \Delta_h \cap M$. Dann ist

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & X_\Sigma & \longrightarrow & \mathbf{P_S C}, \\ & x & \longmapsto & [\chi(m_0)(x), \chi(m_1)(x), ..., \chi(m_s)(x)] \end{array}$$

eine holomorphe abgeschlossene und äquivariante Einbettung von X_Σ in $\mathbf{P_S C}$.

Beweis. Sei $\sigma_0 \in \Sigma^{(r)}$ beliebig und $m_0 = l_{\sigma_0}$. Dann gilt für Ψ auf der in X_Σ offenen Menge X_σ:

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & X_\sigma & \longrightarrow & \mathbf{P_S C}, \\ & x & \longmapsto & [1, \chi(m_1 - m_0)(x), ..., \chi(m_s - m_0)(x)]. \end{array}$$

Ohne Einschränkung sei $\{m_1 - m_0, ..., m_r - m_0\}$ die nach 2.3.10 in der Menge $\{m_1 - m_0, ..., m_s - m_0\}$ enthaltene $\mathbf{Z}$-Basis von M. In den Standardkoordinaten von X_σ folgt dann für Ψ:

$$\begin{array}{rccl} \Psi \circ \chi_{\sigma_0}^{-1}: & \mathbf{C}^r & \longrightarrow & \mathbf{P_S C}, \\ & (z_1, ..., z_r) & \longmapsto & [1, z_1, ..., z_r, f_{r+1}(z), ..., f_s(z)], \end{array}$$

wobei $f_{r+1}, ..., f_s$ aufgrund der Basiseigenschaft von $\{m_1 - m_0, ..., m_r - m_0\}$ Polynome in $z_1, ..., z_r$ sind

$\Rightarrow \Psi$ holomorph und abgeschlossen.

Mit $\chi(m)(x) = x(m)$ nach Lemma 2.1.11 folgt

$$\begin{array}{rcl} \Psi(t \cdot x) & = & [(t \cdot x)(m_0), ..., (t \cdot x)(m_s)] \\ & = & [t(m_0), ..., t(m_s)] \cdot [x(m_0), ..., x(m_s)] \\ & =: & t_s \cdot [x(m_0), ..., x(m_s)] \text{ für alle } x \in X_\Sigma,\ t \in T_N. \end{array}$$

Also ist Ψ äquivariant bezüglich der Operation von $\dot{\mathbf{C}}^s \cong \frac{\dot{\mathbf{C}}^{s+1}}{\dot{\mathbf{C}}}$ auf $\mathbf{P_S C}$ und der Abbildung

$\Phi: T_N \longrightarrow \dot{\mathbf{C}}^s,\ t \longmapsto t_s := [t(m_0), ..., t(m_s)]$

algebraischer Tori .

Beispiel 2.3.14
Sei Σ die den $\mathbf{P_r C}$ definierende Fahne, und h die in Beispiel 2.3.11 vorgestellte Stützfunktion. Dann ergibt sich aus Bemerkung 2.3.13 die Identität als Einbettungsfunktion.

3 Morsefunktionen auf projektiven Torusvarietäten

Weiterhin bezeichne im Kapitel 3 $N \cong \mathbf{Z}^r$ ein $\mathbf{Z}$-Modul mit Rang r und M das dazu duale Modul. Σ sei immer eine solche Fahne, so daß X_Σ eine projektive Torusvarietät ist, insbesondere sei Σ komplett und regulär. Weiterhin wird mit Δ *ein* durch ein strikt konvexes $h \in SF(N, \Sigma)$ definierter Polyeder bezeichnet, da für alle folgenden Resultate lediglich die Existenz einer solchen Funktion wichtig ist, nicht aber deren konkrete Form. Für projektive Toruseinbettungen existiert nach den Ergebnissen des letzten Abschnittes jedoch immer eine strikt konvexe Stützfunktion.

3.1 Konstruktion von Morsefunktionen

Bevor nun erklärt wird, wie man Morsefunktionen auf projektiven Torusvarietäten konstruieren kann, müssen erst noch einige Resultate bezüglich der Struktur von Torusvarietäten angesprochen werden. Für die Beweise sei auf [Jurk, Kapitel 2 und 3] verwiesen.

Definition 3.1.1

1. $c - T_N := \{t \in T_N;\ |t(m)| = 1\ \textit{für alle}\ m \in M\}$ heißt der *kompakte* Torus.
2. $T_N^{>0} := \{t \in T_N;\ t(m) \in \mathbf{R}_{>0}\ \textit{für alle}\ m \in M\}$ heißt der *radiale Faktor* von T_N.

Bemerkung 3.1.2

[1] Es folgt direkt aus dieser Definition, daß für den algebraischen Torus $T_N \cong \dot{\mathbf{C}}^r$ gilt:

$$T_N = (c - T_N) \times T_N^{>0}.$$

[2] $T_N^{>0}$ und $(c - T_N)$ sind Untergruppen von T_N. Darüber sind analog zu Definition 2.2.3 die Begriffe algebraische Operation von $T_N^{>0}$ und $(c - T_N)$ auf X_Σ und die entsprechenden Orbits definiert.

Definition 3.1.3

1. $|\cdot|$ bezeichne die Projektionsabbildung von T_N auf den radialen Faktor von T_N:

$$\begin{array}{rclcl} |\cdot|: T_N & = & (c - T_N) \times T_N^{>0} & \longrightarrow & T_N^{>0}, \\ t & =: & (t_c, t_f) & \longmapsto & |t| := t_f. \end{array}$$

2. arg heiße die Projektionsabbildung von T_N auf den kompakten Torus:

$$\begin{array}{rcccl} arg: & T_N & = & (c-T_N)\times T_N^{>0} & \longrightarrow & T_N^{>0}, \\ & t & = & (t_c, t_f) & \longmapsto & arg(t) := t_c. \end{array}$$

Definition 3.1.4
Der nicht negative Teil einer Torusvarietät X_Σ sei der Abschluß des radialen Faktors von T_N in der Torusvarietät X_Σ.

$X_\Sigma^{\geq 0} := \overline{T_N^{>0}}^{X_\Sigma}$.

Lemma 3.1.5
Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} i: & \{T_N - Orbits\ in\ X_\Sigma\} & \longrightarrow & \{T_N^{>0} - Orbits\ in\ X_\Sigma^{\geq 0}\}, \\ & \mathcal{O} & \longmapsto & \mathcal{O}\cap X_\Sigma^{\geq 0} =: \mathcal{O}^{\geq 0} \end{array}$$

ist eine Bijektion.

Insbesondere ist für alle T_N-Orbits $\mathcal{O}$ in X_Σ die Menge $\mathcal{O}\cap X_\Sigma^{\geq 0}$ ein $T_N^{>0}$-Orbit in $X_\Sigma^{\geq 0}$.

Ferner gilt:

$$i(\mathcal{O}_\tau) = T_N^{>0}\cdot \varepsilon_\tau \text{ für alle } \tau\in\Sigma.$$

(Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.2.5.)

Lemma 3.1.6
Es existiert eine stetige Fortsetzung der Projektion $|\cdot|$ auf die gesamte Torusvarietät X_Σ mit der Eigenschaft:

$$\chi(m)(|x|) = |\chi(m)(x)| \text{ für alle } m\in M.$$

Bemerkung 3.1.7
Torusvarietäten wurden als Verheftungen von Mengen von Halbgruppenhomomorphismen, die in die Menge der komplexen Zahlen abbilden (vergleiche Satz 2.1.16), definiert. Führt man dieses Verfahren mit Halbgruppenhomomorphismen in die reellen Zahlen analog durch, so erhält man reelle Mannigfaltigkeiten.

Definition 3.1.8
Die durch das in letzter Bemerkung beschriebene Verfahren entstehende reelle Mannigfaltigkeit heißt der reelle Teil der Torusvarietät X_Σ, bezeichnet mit $X_\Sigma(\mathbf{R})$.

Bemerkung 3.1.9
[1] Nach dem Bildungsverfahren von [Ehl] ergibt sich

$$X_\Sigma(\mathbf{R}) = \frac{\bigcup_{\sigma\in\Sigma^{(r)}}(\mathbf{R}^r)_\sigma}{\sim},$$

wobei die Äquivalenzrelation '$\sim$' über die gleichen Verheftungsabbildungen $g_{\sigma\tau}$ definiert wird wie in Bemerkung 2.2.17, mit dem einzigen Unterschied, daß Definitions- und Wertebereich durch die entsprechenden Mengen in $\mathbf{R}^r$ ersetzt werden.
[2] Da für die Beweise keine Besonderheiten der komplexen Zahlen gebraucht werden, folgt aus der in [1] beschriebenen Darstellung von $X_\Sigma(\mathbf{R})$, daß der reelle Teil einer Torusvarietät genau dann kompakt und nichtsingulär ist, wenn dies auch für die Varietät X_Σ gilt.

Beispiel 3.1.10
1. Der reelle projektive Raum $\mathbf{P_r R} := \{1-\dim_{\mathbf{R}}\ \textit{Unterräume von}\ \mathbf{R}^{n+1}\}$ ergibt sich als reeller Teil der Torusvarietät $\mathbf{P_r C}$.

2. Der reelle Torus T_1 ist der reelle Teil der Torusvarietät, die durch eine Fahnenzerlegung von $N_{\mathbf{R}} := \mathbf{R}^2$ definiert wird, für die $\Sigma^{(2)}$ aus den vier Quadranten besteht.

Satz 3.1.11
Seien X_Σ eine projektive Torusvarietät und Δ ein zugehöriger Polyeder in $M_{\mathbf{R}}$. Ferner sei $\{m_0, ..., m_s\}$ eine Menge, die alle Ecken von Δ enthält (vergleiche Bemerkung 2.3.10). Dann hat die rationale Abbildung von Mannigfaltigkeiten

$$\begin{array}{rccl} j: & X_\Sigma & \longrightarrow & M_{\mathbf{C}}, \\ & x & \longmapsto & j(x) := \dfrac{\sum_{i=0}^{s} x(m_i)\cdot m_1}{\sum_{i=0}^{s} x(m_i)} \end{array}$$

folgende Eigenschaften:

1. $j\mid_{X_{\bar\sigma}^{\geq 0}}: X_{\bar\sigma}^{\geq 0} \longrightarrow \Delta$, so daß $T_N^{\geq 0}$-Orbits auf entsprechende offene Seiten von Δ abgebildet werden.

2. $j\mid_{\mathcal{O}_{\bar\tau}^{\geq 0}}: \mathcal{O}_{\bar\tau}^{\geq 0} \longrightarrow \mathrm{int}(l_\tau + \tau^\perp) \cap \Delta$ (Bezeichnungen vergleiche Bemerkung 2.3.5 und Lemma 3.1.5)

   ist ein reeller analytischer Isomorphismus (also ein Diffeomorphismus) für alle $\tau \in \Sigma$.

Bemerkung 3.1.12
[1] Durch $\alpha \in N$ wird für beliebiges strikt konvexes $h \in SF(N;\Sigma)$ eine lineare Funktion auf Δ_h definiert. Die Werte $\alpha(m) \in \mathbf{R}$ kann man auch als die Höhe des Punktes m bezüglich der Richtung α auffassen. Dies definiert eine Index-Funktion I_α auf der Eckenmenge von Δ_h, die jeder Ecke l_σ, $\sigma \in \Sigma$, die Zahl der Kanten zuordnet, deren oberes Ende l_σ ist.

[2] Die Abbildung

$$q : X_{\bar\Sigma}^{\geq 0} \longrightarrow X_{\bar\Sigma}^{\geq 0},\ x \longmapsto x^2$$

ist in Koordinaten lokal gegeben durch $(x_1, ..., x_r)^2 = (x_1^2, ..., x_r^2)$ und somit glatt.

Nun sind alle notwendigen Vorarbeiten geleistet, um den zentralen Satz zu formulieren.

Satz 3.1.13 (Vergleiche [Jurk, 3.2.5.].)
Seien X_Σ eine projektive Torusvarietät, Δ ein zugehöriger Polyeder, $\{m_0, ..., m_s\} = \Delta \cap M$ und j die zugehörige Abbildung nach 3.1.11.
Ist $\alpha \in N$, so daß alle $\alpha_i := (m_i, \alpha)$ paarweise verschieden sind, dann hat die Abbildung

$$f_\alpha : X_\Sigma \xrightarrow{|\cdot|} X_{\bar\Sigma}^{\geq 0} \xrightarrow{x \mapsto x^2} X_{\bar\Sigma}^{\geq 0} \xrightarrow{j} \Delta \xrightarrow{\alpha} \mathbf{R}$$

folgende Eigenschaften:

1. f_α ist eine MF auf X_Σ.

2. $g_\alpha := f_\alpha\mid_{X_\Sigma(\mathbf{R})}$ ist eine MF auf dem reellen Teil von X_Σ.

3. f_α ist konstant auf $(c - T_N)$-Orbits in X_Σ und wächst streng monoton entlang $\mathbf{R}_{>0}$-Orbits bezüglich α.

4. Kritische Punkte sind genau die Punkte $x_\sigma := j^{-1}(l_\sigma)$, wobei l_σ der dem Kegel $\sigma \in \Sigma$ zugeordnete Eckpunkt von Δ ist (vergleiche Bemerkung 2.3.10).

5. $\mathrm{Ind}_{x_\sigma} f_\alpha = 2 \cdot I_\alpha(l_\sigma)$.
   $\mathrm{Ind}_{x_\sigma} g_\alpha = I_\alpha(l_\sigma)$.

Beweis. Sei $\sigma_0 \in \Sigma^{(r)}$ beliebig, $x_0 := x_{\sigma_0}$, $m_0 := l_{\sigma_0}$, also $j(x_0) = m_0$. Es ergibt sich:

$$f_\alpha(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s}(m_i \mid \alpha)|x|^2(m_i)}{\sum\limits_{i=0}^{s}|x|^2(m_i)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}(m_i - m_0 \mid \alpha)|x|(2(m_i - m_0))}{1 + \sum\limits_{i=1}^{s}|x|(2(m_i - m_0))} + (m_0 \mid \alpha).$$

Wegen der Projektivität von X_Σ kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\{m_1 - m_0, ..., m_r - m_0\}$ eine Basis von M ist
$\Rightarrow m_k - m_0 = \sum_{i=1}^{r} \beta_{ik}(m_i - m_0)$, $\beta_{ik} \in \mathbf{Z}$ für alle $i = 1, ..., r$ und $k = r+1, ..., s$.

Da alle m_i aus dem konvexen Polyeder Δ stammen, folgt sogar, daß alle β_{ik}, $i = 1, ..., r$ und $k = r+1, ..., s$ aus $\mathbf{N_0} := \mathbf{N} \cup \{0\}$ sind.
Seien nun $z_i := \chi(m_i - m_0)(x) = x(m_i - m_0)$, $i = 1, ..., r$ die Standardkoordinaten von X_σ nach Lemma 2.1.11 und $a_i := (m_i - m_0 \mid \alpha)$, dann ergibt sich unter Berücksichtigung von $|x|(m) = |x(m)|$ für alle $m \in M$ nach Lemma 3.1.6

$$f_\alpha(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} a_i|z_i|^2 + \mathcal{P}_2}{1 + \sum\limits_{i=1}^{r}|z_i|^2 + \mathcal{P}_2'} + (m_0 \mid \alpha), \tag{8}$$

wobei $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2'$ Polynome in $|z_1|^2, ..., |z_r|^2$ sind, die keinen Exponenten kleiner als 2 enthalten.
Es folgt:

$$f_\alpha(x) = (m_0 \mid \alpha) + \sum_{i=1}^{r} a_i|z_i|^2 + \mathcal{R}_2, \tag{9}$$

und analog

$$g_\alpha(x) = (m_0 \mid \alpha) + \sum_{i=1}^{r} a_i(u_i)^2 + \mathcal{R}_2'. \tag{10}$$

Hierbei seien $z_i = u_i + w_i \cdot \sqrt{-1}$, $i = 1, ..., r$ und $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_2'$ lokal gleichmäßig konvergente Reihen in $|z_i|^2$ und in u_i^2, $i = 1, ..., r$ ohne Exponenten kleiner 2.

Aus dieser Darstellung folgen nun fast alle Behauptungen.

Zu 1., 2.:
Da alle α_i, $i = 0, ..., s$ nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, sind alle $a_i = \alpha_i - \alpha_0$ ungleich null. Also sind f_α und g_α MF auf X_Σ und $X_\Sigma(\mathbf{R})$.

Zu 3.:
Da f_α nur von $|x|$ abhängt, folgt die Konstanz auf $(c-T_N)$-Orbits. Das Wachsen entlang den $\mathbf{R}_{>0}$-Bahnen folgt aus

$$\frac{df_\alpha(\gamma_n(\lambda)\cdot x)}{d\lambda} > 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbf{R}^{>0}.$$

Dies wird in [Jurk, 3.2.5.b)] nachgerechnet.

Zu 4.:
Aus den Gleichungen 9 und 10 folgt, daß ein kritischer Punkt genau dann vorliegt, wenn alle u_i, w_i gleich null sind. Der entsprechende Punkt in X_{σ_0} ist die triviale Abbildung

$$e : \phi_{\sigma_0} \longrightarrow \dot{\mathbf{C}},\ 0 \neq m \longmapsto 0,$$

und es gilt

$$\begin{array}{rrcl} & j(e) = m_0 & = & l_{\sigma_0} \\ \Rightarrow & x_0 \;=\; e & = & j^{-1}(m_0). \end{array}$$

Zu 5.:
Der Index von g_α in x_0 läßt sich in Gleichung 10 als die Zahl der negativen $a_i,\ i = 1, ..., r$ ablesen. Es gilt:

$a_i < 0 \Leftrightarrow (m_i - m_0 \mid \alpha) < 0$

$\Leftrightarrow (m_0 + \lambda(m_i - m_0) \mid \alpha) < (m_0 \mid \alpha)$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$

$\Leftrightarrow$ die Ecke m_0 liegt höher als die in Richtung $m_i - m_0$ gelegene Ecke l_{σ_i} bezüglich der Richtung α.

Also gilt:

$$\mathrm{Ind}_{x_0} g_\alpha = I_\alpha(m_0).$$

Für die Funktion f_α folgt analog mit Gleichung 9 und $|z_i|^2 = (u_i^2 + w_i^2),\ i = 1, ..., r:$

$$\mathrm{Ind}_{x_0} f_\alpha = 2 \cdot I_\alpha(m_0).$$

Bemerkung 3.1.14
Die Struktur der nach Satz 3.1.13 gebildeten Morsefunktionen wird im wesentlichen von der Funktion j aus Satz 3.1.11 bestimmt. Die Projektion auf $X_\Sigma^{\geq 0}$ wird vorgeschaltet, um in den Wertebereich von j zu gelangen, die Quadratfunktion, um sicherzustellen, daß die kritischen Punkte nicht ausgeartet sind (die Linearform α auf Δ wird dadurch zu einer 'quadratischen' Funktion).

Die Wahl von $\alpha \in N$ bedingt, daß α, wenn man $N_{\mathbf{R}}$ mit $M_{\mathbf{R}}$ identifiziert, auf keiner Kante des Polyeders Δ senkrecht steht, also auch auf keiner Seite von Δ mit Dimension größer als eins. Dadurch ist garantiert, daß keine weiteren kritischen Punkte entstehen außer den Urbildern der Eckpunkte unter j.

Außerdem ist so einfach zu zeigen, daß die kritischen Punkte nicht ausgeartet sind, da in Gleichung 9 alle Koordinatenfunktionen als reine Quadratsummanden auftreten. Die höheren Termen spielen bei der Berechnung der Hessematrix im Nullpunkt der betreffenden Karte keine Rolle. Wären anderenfalls $l_{\sigma_0}, l_{\sigma_1}$ zwei Ecken von Δ, auf deren gemeinsamer Kante α senkrecht steht, dann würden die Terme $u_{\sigma_1}^2$ und $w_{\sigma_1}^2$ in Gleichung 9 nicht mehr auftreten, und man hätte große Schwierigkeiten in den Standardkoordinaten nachzuweisen, ob mit f_α eine MF vorliegt.

Diese Überlegungen führen zu einer einfachen Verallgemeinerung des Satzes 3.1.13:

Folgerung 3.1.15
Seien alle Voraussetzungen und Bezeichnungen gleich denen des Satzes 3.1.13, mit der Ausnahme, daß lediglich verlangt wird, daß $\alpha_i \neq \alpha_j$, falls l_i und l_j aus $\Delta \cap M$ durch eine gemeinsame Kante verbunden werden, dann gelten alle Aussagen des Satzes 3.1.13 analog.

Beweis. Die Behauptung ist klar, da in den Beweis des Satzes 3.1.13 lediglich die nun eingeschränkte Voraussetzung einfließt.

Definition 3.1.16

1. Für eine projektive Torusvarietät X_Σ heiße die Menge der nach Satz 3.1.13 gebildeten Morsefunktionen f_α, wobei $\alpha \in N$ die Bedingungen aus Folgerung 3.1.15 erfülle, die Menge der ***speziellen*** Morsefunktionen auf X_Σ. Sie sei mit $MF_s(X_\Sigma)$ bezeichnet.

2. Zwei Morsefunktionen $f_\alpha,\ f_\beta \in MF_s(X_\Sigma)$ heißen speziell äquivalent, falls $f_\alpha \sim f_\beta$ und zusätzlich alle Quadratterme in Gleichung 9 für alle kritischen Punkte von f_α und f_β die gleichen Vorzeichen haben.
   Notation. $f_\alpha \sim_s f_\beta$.

Bemerkung 3.1.17
Damit der Begriff der speziellen Äquivalenz sinnvoll wird, müssen die lokalen Darstellungen von f_α und f_β bezüglich der gleichen Durchnummerierung der Basis des jeweiligen ϕ_σ betrachtet werden; dies sei für die Definition vorausgesetzt.

Beispiel 3.1.18
Sei X_Σ eine projektive Torusvarietät und $\{m_0, ..., m_s\} = \Delta \cap M$. Nach Bemerkung 2.3.13 liegt mit

$$\Psi : X_\Sigma \longrightarrow \mathbf{P_S C},\ x \longmapsto [x(m_0), ..., x(m_s)]$$

eine abgeschlossene Einbettung vor. Nach Beispiel 1.1.16 ist

$$f : z \longmapsto \frac{\sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i |z_i|^2}{\sum\limits_{i=0}^{s} |z_i|^2}$$

eine Morsefunktion auf $\mathbf{P_S C}$, falls alle $\lambda_i,\ i = 1, ..., s$ paarweise verschieden sind.

Für die Verkettung dieser beiden Funktionen ergibt sich:

$$f \circ \Psi : X_\Sigma \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$x \longmapsto \frac{\sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i |x(m_i)|^2}{\sum\limits_{i=0}^{s} |x(m_i)|^2}.$$

Aus Lemma 3.1.6 folgt

$$f \circ \Psi(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i |x|2m_i}{\sum\limits_{i=0}^{s} |x|2m_i}, x \in X_\Sigma.$$

Wählt man ein $\alpha \in N$, so daß alle $(m_i \mid \alpha),\ i = 1, ..., s$ paarweise verschieden sind, setzt $\lambda_i := (m_i \mid \alpha),\ i = 1, ..., s$ und bildet dann nach Satz 3.1.13 die MF f_α, so folgt:

$$f_\alpha = f \circ \Psi.$$

Eine Morsefunktion nach Satz 3.1.13 ist also nichts anderes als die Verkettung der Standardeinbettung in den projektiven Raum $\mathbf{P_S C}$ mit der nach Beispiel 1.1.16 bekannten MF auf $\mathbf{P_S C}$.
Umgekehrt betrachtet, ist die Standardeinbettung Ψ einer projektiven Torusvarietät X_Σ in einen entsprechenden projektiven Raum $\mathbf{P_S C}$ so beschaffen, daß die Einschränkung der MF nach 1.1.16 auf $\mathbf{P_S C}$ auf das Bild von X_Σ unter Ψ eine Morsefunktion bleibt. Dies ist für abgeschlossene Einbettungen im Allgemeinen falsch.

Definition 3.1.19
Sei Σ' eine Fahne, so daß die Torusvarietät $X_{\Sigma'}$ eine offene holomorphe Einbettung in einen projektiven Raum $\mathbf{P_s C}$ besitzt. $X_{\Sigma'}$ heißt dann quasiprojektive Torusvarietät.

Beispiel 3.1.20
Mittels der Einbettung

$$\begin{array}{cccc} i: & \mathbf{C}^r & \longrightarrow & \mathbf{P_r C}, \\ & (z_1, ..., z_r) & \longmapsto & [1, z_1, ..., z_r] \end{array}$$

wird der $\mathbf{C}^r$ zu einer quasiprojektiven Torusvarietät.

In den Bezeichnungen von Beispiel 2.1.21 ergibt sich:
$i(\mathbf{C}^r) = X_{\sigma_0} \subset X_\Sigma = \mathbf{P_r C}$.
Damit folgt die Behauptung.

Bemerkung 3.1.21
Sei $X_{\Sigma'}$ eine quasiprojektive Torusvarietät mit der offenen Einbettung

$$i : X_{\Sigma'} \longrightarrow \mathbf{P_s C}$$

und f eine MF auf $\mathbf{P_s C}$ nach Beispiel 1.1.16. Dann ist $f \circ i$ eine MF auf der Varietät $X_{\Sigma'}$.

Beweis. Die Behauptung ist im Gegensatz zum Beispiel 3.1.18 trivial. $f\mid_{i(X_{\Sigma'})}$ bleibt eine glatte Funktion und alle kritischen Punkte der eingeschränkten Funktion sind auch kritisch bezüglich f. Insbesondere sind die kritischen Punkte von $f\mid_{i(X_{\Sigma'})}$ nicht ausgeartet.

3.2 Symmetrisierte Fahnen und Torusvarietäten

Der Abschnitt 3.2 behandelt die Einführung der Symmetrisierung von Fahnen und von Torusvarietäten und einige Folgerungen daraus. Die Bedeutung für die Morsetheorie wird erst im darauffolgenden Abschnitt deutlich werden.

Definition 3.2.1
Sei Σ eine komplette Fahne.

1. $$\mathcal{A}(\Sigma^{(k)}) := \{\tau + (-\tau) = \mathbf{R}\tau;\ \tau \in \Sigma^{(k)}\}$$

   heißt das von Σ erzeugte k-dimensionale Arrangement.

2.
$$|\mathcal{A}(\Sigma^{(k)})| := \bigcup_{\tau \in \Sigma^{(k)}} \mathbf{R}\tau$$
heißt die Stützmenge des von Σ erzeugten k-dimensionalen Arrangements.

3. Die Stützmenge des von Σ erzeugten Hyperflächenarrangement heißt das von Σ erzeugte Netz, bezeichnet mit $N(\Sigma)$.

Bemerkung 3.2.2
[1] Bei $\mathcal{A}(\Sigma)$ handelt es sich tatsächlich um ein Arrangement wie zum Beispiel in [Orl] definiert.

[2] Die Stützmenge des von Σ erzeugten r-dimensionalen Arrangements ist gerade $N_{\mathbf{R}}$, da die komplette Fahne Σ mindestens einen Kegel der Dimension r enthält.

[3] Jede Zusammenhangskomponente von $N_{\mathbf{R}} \setminus N(\Sigma)$ ist Lösungsmenge eines Systems von strikten homogenen Ungleichungen. Da deren Anzahl nach Satz 2.2.15 endlich ist, ist jede Zusammenhangskomponente eine offene Menge in $N_{\mathbf{R}}$. Vereinigt mit ihrem Rand, hat sie die Struktur eines r-dimensionalen konvexen Kegels $\tilde{\sigma}$, denn $\tilde{\sigma}$ ergibt sich als Lösungsmenge des gleichen Systems homogener schwacher Ungleichungen. Da $\Sigma^{(r-1)} \subset N(\Sigma)$, ist $\tilde{\sigma}$ streng konvex, denn es existiert ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\tilde{\sigma} \subset \sigma$. Der Rand von $\tilde{\sigma}$ ist die Vereinigung streng konvexer Kegel kleinerer Dimension. Erzeugt wird $\tilde{\sigma}$ über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ von seinen eindimensionalen Seiten $\tau_1, ..., \tau_s$ (vergleiche auch [Ro]).

Definition 3.2.3

1. Die Menge der durch $N(\Sigma)$ gemäß der letzten Bemerkung definierten r-dimensionalen Kegel und aller ihrer Randflächen heißt die Symmetrisierung von Σ und wird mit $\tilde{\Sigma}$ bezeichnet.

2. Analog für Fahnen sei $\tilde{\Sigma}^{(k)}$ definiert als die Menge der k-dimensionalen Kegel in $\tilde{\Sigma}$.

Bemerkung 3.2.4
[1] Der Name Symmetrisierung berücksichtigt den Umstand, daß mit jedem Kegel $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$ auch der negative Kegel $-\tilde{\sigma}$ in $\tilde{\Sigma}$ liegt.

[2] Gilt $N(\Sigma) \subset \Sigma^{(r-1)}$ so folgt:
$$\Sigma = \tilde{\Sigma}.$$

Dies gilt zum Beispiel für die Fahne mit der Eigenschaft $X_\Sigma(\mathbf{R}) = T_1$, die in Beispiel 3.1.10 vorgestellt wurde.

[3] Für die Fahne $-\Sigma := \{-\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ folgt aus dem Bildungsprozeß, der vom Übergang Σ zu $-\Sigma$ unabhängig ist:

$$\widetilde{(-\Sigma)} = \tilde{\Sigma}.$$

Lemma 3.2.5
Die durch das Netz einer kompletten Fahne definierten Kegel sind rational, das heißt

$$\tau \cap N \neq \emptyset \text{ für alle } \tau \in \tilde{\Sigma}^{(1)}.$$

Beweis. Sei $\tau \in \tilde{\Sigma}^{(1)}$ beliebig. Aus der Konstruktion folgt, daß es $\rho_1, ..., \rho_{p_\tau} \in \Sigma^{(r-1)}$ gibt, so daß gilt:

$$\mathbf{R}\tau = \bigcap_{i=1}^{p_\tau} \mathbf{R}\rho_i.$$

Für jedes ρ_i existieren $v_{\rho_i,1}, ..., v_{\rho_i,r-1} \in N$, so daß

$$\rho_i = \langle v_{\rho_i,1}, ..., v_{\rho_i,r-1}\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\ i = 1, ..., p_\tau.$$

Sei $\{n_1, ..., n_r\}$ eine fest gewählte Basis von N, dann existieren für jedes $v_{\rho_i,j},\ i = 1, ..., p_\tau,\ j = 1, ..., r-1$ ganze Zahlen $v^k_{\rho_i,j}$, so daß

$$v_{\rho_i,j} = \sum_{k=1}^{r} v^k_{\rho_i,j} \cdot n_k. \tag{11}$$

Sei $x \in (\mathbf{R}\rho_1) \cap (\mathbf{R}\rho_2)$ dann folgt:

$$\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i \cdot v_{\rho_1,i} = x = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i \cdot v_{\rho_2,i},\ \alpha_i,\ \beta_i \in \mathbf{R},\ i = 1, ..., r-1. \tag{12}$$

Setzt man die Darstellung aus Gleichung 11 in die Gleichung 12 ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A \cdot b = 0,\ A \in \mathbf{Q}^{r \times 2(r-1)},\ b \in \mathbf{R}^{2(r-1)},$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} v^1_{\rho_1,1} & \cdots & v^1_{\rho_1,r-1} & v^1_{\rho_2,1} & \cdots & v^1_{\rho_2,r-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^r_{\rho_1,1} & \cdots & v^r_{\rho_1,r-1} & v^r_{\rho_2,1} & \cdots & v^r_{\rho_2,r-1} \end{pmatrix}$$

und

$$b = (\alpha_1, ..., \alpha_{r-1}, -\beta_1, ..., -\beta_{r-1})^t.$$

$\mathbf{Q}$ bezeichne die Menge der rationalen Zahlen.

Da alle Einträge der Matrix rational sind, gibt es ein System $\{w_1, ..., w_s\}$ von Vektoren aus dem $\mathbf{Q}^{2(r-1)}$, die den Lösungsraum aufspannen.

Sei w_j^i die i-te Komponente von w_j. Definiert man:

$$v_j := \sum_{i=1}^{(r-1)} w_j^i v_{\rho_1,i}, \; j = 1, ..., s,$$

so gilt:

$$\langle v_1, ..., v_s \rangle_{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}\rho_1) \cap (\mathbf{R}\rho_2).$$

Wählt man nun eine ganze Zahl $K \in \mathbf{N}$ groß genug, dann gilt:

$$\{K \cdot v_1, ..., K \cdot v_s\} \subset N.$$

Nun schneidet man den von $K \cdot v_i, \; i = 1, ..., s$ erzeugten Unterraum von $N_{\mathbf{R}}$ mit $\mathbf{R}\rho_3$. Dieses Verfahren p_τ-mal durchgeführt, ergibt schließlich, daß es ein $v_\tau \in N$ gibt, so daß $\mathbf{R}\tau = \mathbf{R}v_\tau$.

Damit ist die Behauptung bewiesen, denn

$$v_\tau \in \tau \cap N \text{ oder } -v_\tau \in \tau \cap N.$$

Folgerung 3.2.6
Die Symmetrisierung $\tilde{\Sigma}$ der kompletten Fahne Σ ist eine Fahne im Sinne der Definition 2.1.5.

Beweis. Da alle $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$ wieder rationale streng konvexe polyedrische Kegel sind, bleibt zu zeigen, daß $\tilde{\Sigma}$ die Bedingungen der Definition 2.1.5 erfüllt.
Aus der Definition von $\tilde{\Sigma}$ über das Netz $N(\Sigma)$ folgt jedoch, daß alle Seiten eines Kegels $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$ wieder in $\tilde{\Sigma}$ enthalten sind. Ebenso folgt, daß der Schnitt zweier Kegel wiederum Seite jeder dieser Kegel ist.

Bemerkung 3.2.7
[1] Dieses Verfahren, eine Symmetrisierung $\tilde{\Sigma}$ zu einer gegebenen Fahne Σ zu definieren, läßt sich auch für nicht komplette Fahnen durchführen. Allerdings können hierbei Schwierigkeiten beim Übergang von $N(\Sigma)$ zu $\tilde{\Sigma}$ auftreten, da unter Umständen einige Zusammenhangskomponenten von $N_{\mathbf{R}} \setminus N(\Sigma)$ vereinigt mit ihrem Rand keinen streng konvexen Kegel bilden. Diese kann man jedoch aussortieren. Hier wird nicht näher darauf eingegangen, da dieses Verfahren im weiteren Verlauf nur auf komplette Fahnen angewandt wird.

[2] Keine Probleme entstehen allerdings, wenn die gegebene Fahne Σ singulär und komplett ist. In keinem Schritt des Verfahrens der Symmetrisierung wird die Regularität der Fahne Σ benutzt.

[3] Da $\tilde{\Sigma}$ eine Fahne ist, definiert die Symmetrisierung von Σ wieder eine Torusvarietät.

Definition 3.2.8
Die von der Symmetrisierung der Fahne Σ erzeugte Torusvarietät $X_{\tilde{\Sigma}}$ heißt die Symmetrisierung von X_Σ.

Bemerkung 3.2.9
[1] Für eine komplette Fahne Σ ist $\tilde{\Sigma}$ wieder komplett, also bleibt die Symmetrisierung von X_Σ eine kompakte Torusvarietät.

[2] Konstruiert man für eine nichtkomplette Fahne mit dem nötigen Aussortierungsprozeß die Symmetrisierung, so kann $X_{\tilde{\Sigma}}$ kompakt werden.
Ist zum Beispiel

$N = \mathbf{Z}n_1,\ \Sigma = \{\{0\}, \mathbf{R}_{\geq 0}n_1\}$, also $X_\Sigma = \mathbf{C}$,

so folgt

$\tilde{\Sigma} = \{\{0\}, \mathbf{R}_{\geq 0}n_1, \mathbf{R}_{\leq 0}n_1\}$ und $X_{\tilde{\Sigma}} = \mathbf{PC}$.

[3] Unklar ist jedoch bis jetzt, ob sich die Eigenschaft der Nichtsingularität von X_Σ auf $X_{\tilde{\Sigma}}$ überträgt. Zum einen ist noch nicht bewiesen, daß jedes $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ wieder genau r eindimensionale Randflächen besitzt, zum anderen ist noch offen, ob diese dann wieder eine Basis des Gitters N bilden. Für alle bisher gerechneten Beispiele war jedoch $X_{\tilde{\Sigma}}$ genau dann nichtsingulär, wenn dies auch für X_Σ galt, so daß die Vermutung besteht:

$$X_\Sigma \text{ nichtsingulär } \Leftrightarrow X_{\tilde{\Sigma}} \text{ nichtsingulär.}$$

Beispiel 3.2.10
Für den Fall $N \cong \mathbf{Z}^3$ und Σ komplett, gibt es eine spezielle Art, eine Fahne darzustellen. Stellt man sich den Nullpunkt von N im Zentrum einer Kugel vor, so bestimmt der Schnitt der Kegel der Dimensionen ≤ 2 mit der Kugeloberfläche eine Triangulierung der S^2. Ist $\{n, n', n''\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ den Kegel σ erzeugt, und $\tau = \mathbf{R}n$, dann idendifiziert man n mit dem Schnittpunkt von τ mit der Kugeloberfläche. Da $S^2 \cong \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$, kann man diese Triangulierung unter der Konvention, daß sich alle Linien mit offenem Ende im Punkt ∞ treffen, aufzeichnen.
Für den dreidimensionalen projektiven Raum wird diese Darstellung von der zugehörigen Fahne Σ in Abbildung 3.1 gezeigt. Die Bezeichnungen sind analog Beispiel 2.1.21.

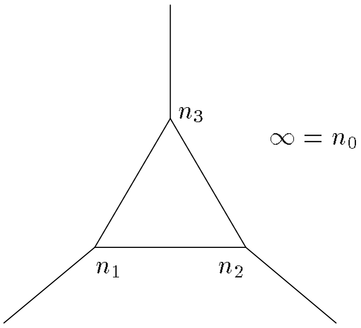


Abbildung 3.1

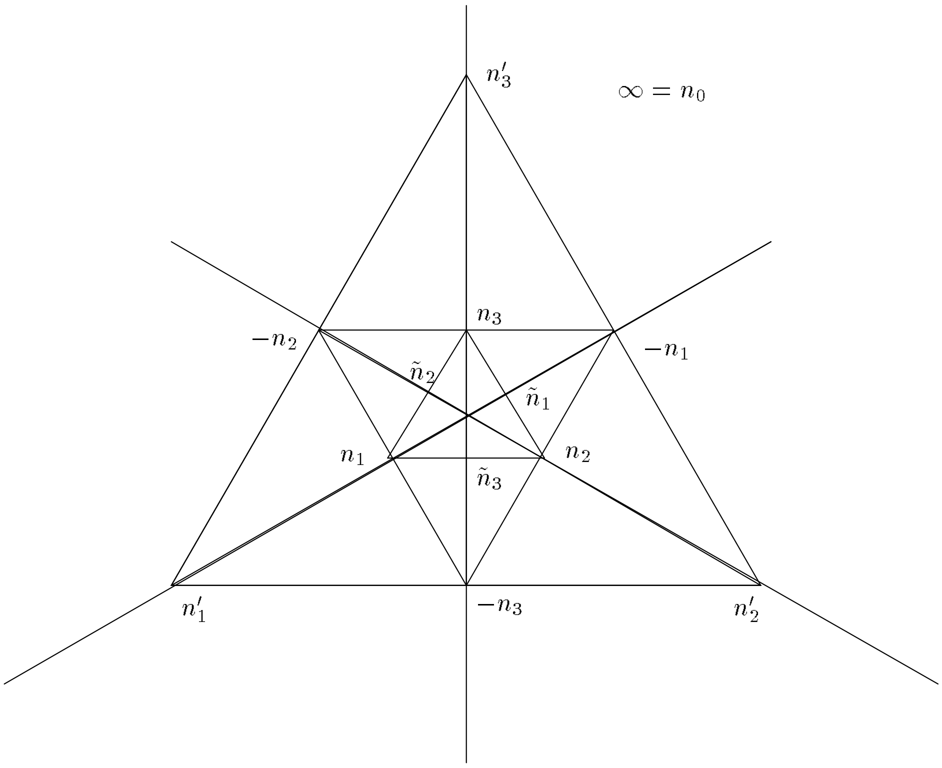


Abbildung 3.2

Die Symmetrisierung von Σ ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Der Mittelpunkt des innersten Dreiecks sei hierbei $-n_0$. Weiter seien $n_i' := n_0 + n_i$, $\tilde{n}_i :=$

$-n_0 - n_i, \; i = 1, 2, 3.$
Die Fahne $\tilde{\Sigma}$ ist komplett und regulär. Sie hat 24 dreidimensionale Kegel. Die Zahl ist gegenüber der von Σ, nämlich vier, beträchtlich angestiegen. Hier sei schon festgestellt, daß Σ vier zweidimensionale Kegel enthält, und $24 = 4! := 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ gilt. Dieser Zusammenhang wird später noch genauer untersucht werden.

Lemma 3.2.11
Sei $X_{\tilde{\Sigma}}$ die Symmetrisierung einer projektiven Torusvarietät X_Σ. Dann existiert eine Abbildung

$f : X_{\tilde{\Sigma}} \longrightarrow X_{\tilde{\Sigma}}, \; x \longmapsto \frac{1}{x} := f(x)$

mit folgenden Eigenschaften:

1. f ist holomorph.
2. Für alle $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}, \; x \in X_{\tilde{\sigma}}$ und $m \in \phi_{\tilde{\sigma}}$, so daß auch $(-m) \in \phi_{\tilde{\sigma}}$ liegt, gilt

$$f(x)(m) = \frac{1}{x(m)}.$$

Beweis.
(i) Definition der Abbildung f.
Sei $x \in X_{\tilde{\Sigma}}$ beliebig

$\Rightarrow$ es existiert $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$, so daß $x \in X_{\tilde{\sigma}}$.

Nach Bemerkung 3.2.4 gilt $-\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$. Seien nun $m_1, ..., m_s$ die Halbgruppenerzeuger von $\phi_{\tilde{\sigma}}$

$\Rightarrow -m_1, ..., -m_s$ erzeugen $\phi_{-\tilde{\sigma}}$

$\Rightarrow$ für die Erzeuger von $\phi_{-\tilde{\sigma}}$ gelten die gleichen Abhängigkeiten wie für die Erzeuger von $\phi_{\tilde{\sigma}}$; das heißt, daß für alle $j = 1, ..., s$ gilt:

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{s} \alpha_{ij} m_i = m_j, \; \alpha_{ij} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \sum_{i=1, i \neq j}^{s} \alpha_{ij}(-m_i) = (-m_j). \tag{13}$$

Definiert man x^{-1} über

$x^{-1}(-m_i) := x(m_i),$

dann ist x^{-1} nach der Eigenschaft 13 ein eindeutig bestimmtes Element aus $X_{-\tilde{\sigma}}$.
Definiert man nun

$$f(x) = \frac{1}{x} := x^{-1},$$

so folgt die Wohldefiniertheit der Abbildung f.

(ii) Zeigen der 2. Eigenschaft.

Seien $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$, $m \in \phi_{\tilde{\sigma}}$ und $x \in X_{\tilde{\sigma}}$ beliebig gewählt, so daß auch $-m \in \phi_{\tilde{\sigma}}$. Ferner seien $m_1, ..., m_s$ wieder die Erzeuger von $\phi_{\tilde{\sigma}}$ und alle anderen Bezeichnungen wie in (i).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad m &= \sum_{i=1}^{s} \alpha_i m_i, \ \alpha_i \in \mathbf{N_0} \text{ geeignet} \\
\Rightarrow \quad \tfrac{1}{x(m)} &= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{s} (x(m_i))^{\alpha_i}} = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{s} (x^{-1}(-m_i))^{\alpha_i}} \\
&= \tfrac{1}{x^{-1}(-m)} = x^{-1}(m), \text{ da } m, -m \in -\phi_{\tilde{\sigma}}. \\
\Rightarrow \quad \tfrac{1}{x(m)} &= f(x)(m).
\end{aligned}$$

(iii) Zeigen der Holomorphie.

Da alle $X_{\tilde{\sigma}}$ offen in $X_{\tilde{\Sigma}}$ liegen und die Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, genügt der Nachweis in einem beliebigen Punkt $x \in X_{\tilde{\sigma}}$, $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$ beliebig.

Sei also $x \in X_{\tilde{\sigma}}$ und $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$ vorgegeben. In der Standardkarte ergibt sich:

$\chi_{-\tilde{\sigma}} \circ f \circ \chi_{\tilde{\sigma}}^{-1} : \chi_{\tilde{\sigma}}(X_{\tilde{\sigma}}) \cap \mathbf{C}^s \longrightarrow \chi_{-\tilde{\sigma}}(X_{-\tilde{\sigma}}) \cap \mathbf{C}^s, \ z \longmapsto z.$

Dies ist eine holomorphe Abbildung

$\Rightarrow f$ ist holomorph in x.

Bemerkung 3.2.12

[1] Insbesondere gilt für $\phi_{\{0\}} = M$:

1. $m \in M \Rightarrow -m \in M$.
2. $X_{\{0\}} = T_N$.

Also liefert Lemma 3.2.11, daß für alle $x \in T_N$ und alle $m \in M$ gilt:

$$\frac{1}{x(m)} = \frac{1}{x}(m).$$

In Koordinaten ergibt das für die Abbildung f aus Lemma 3.2.11:

$$f(x_1, ..., x_r) = (\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_r}) \text{ für alle } x = (x_1, ..., x_r) \in T_N.$$

Hierbei wurde T_N mit dem isomorphen Raum $\dot{\mathbf{C}}^r$ identifiziert.

Da alle Fahnen den Kegel $\{0\}$ enthalten, setzt f die Kehrwertbildung von dem algebraischen Torus auf die gesamte Torusvarietät fort.

[2] Der Beweis der Existenz und Holomorphie von f hätte auch mittels Satz 2.2.10 geführt werden können. Die Abbildung

$\Phi : N \longrightarrow N, \ n \longmapsto -n$

definiert eine Fahnenabbildung von $(N, \tilde{\Sigma})$ nach $(N, \tilde{\Sigma})$. Diese induziert nach

Satz 2.2.10 eine holomorphe Abbildung

$$\Phi_* : X_{\tilde{\Sigma}} \longrightarrow X_{\tilde{\Sigma}},$$

für die auch die zweite Bedingung aus Lemma 3.2.11 erfüllt ist.

[3] Nach Bemerkung [2] nutzt man im Lemma 3.2.11 die besondere Eigenschaft der Symmetrisierung von Σ, daß für jeden Kegel $\tilde{\sigma}$ auch $-\tilde{\sigma}$ in $\tilde{\Sigma}$ liegt. Die so definierte 'Inversionsabbildung' aus Lemma 3.2.11 überträgt die geometrische Eigenschaft der Fahne $\tilde{\Sigma}$, eine Punktsymmetrie, in eine analytische Eigenschaft von $X_{\tilde{\Sigma}}$, nämlich die Möglichkeit der holomorphen Fortsetzung der natürlichen Kehrwertbildung auf dem Torus nach ganz $X_{\tilde{\Sigma}}$.

Folgerung 3.2.13
Für jede symmetrisierte Torusvarietät existiert eine holomorphe äquivariante Selbstabbildung vom Grad zwei, das heißt, es existiert eine Abbildung

$$f : X_{\tilde{\Sigma}} \longrightarrow X_{\tilde{\Sigma}} \; glatt,$$

so daß

$$f \circ f = id_{X_{\tilde{\Sigma}}}.$$

Beweis. Sei f definiert wie in Lemma 3.2.11

$$\Rightarrow \begin{cases} f \; holomorph, \\ f \circ f = id_{X_{\tilde{\Sigma}}}. \end{cases}$$

Die Äquivarianz folgt aus Bemerkung 3.2.12 [2].

3.3 Spezielle Morsefunktionen, Homologie und Charakteristik

In diesem Abschnitt werden die sich aus der Verbindung der Ergebnisse aus Abschnitt 3.1 mit dem neuen Begriff der Symmetrisierung ergebenden Resultate dargestellt.

Definition 3.3.1
Zwei Kegel σ, $\sigma' \in \Sigma^{(s)}$, $s \leq r$ heißen benachbart, wenn ein $\tau \in \Sigma^{(s-1)}$ existiert, so daß $\sigma \cap \sigma' = \tau$.

Folgerung 3.3.2
Sei $\alpha \in N \setminus N(\Sigma)$, dann liegt mit f_α, gebildet analog Satz 3.1.13, eine Morsefunktion auf der projektiven Torusvarietät X_Σ vor, das heißt $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$.

Beweis. Sei $\alpha \in N$ beliebig. Nach Folgerung 3.1.15 ist zum Nachweis, daß mit f_α eine MF vorliegt, zu zeigen:

$$(l_\sigma \mid \alpha) \neq (l_{\sigma'} \mid \alpha) \text{ für alle } l_\sigma, l_{\sigma'}, \text{ die Enden einer Kante von } \Delta \text{ sind .} \qquad (14)$$

Nach Bemerkung 2.3.12 sind dies gerade die Ecken l_σ, $l_{\sigma'}$ deren zugehörige Kegel σ, σ' benachbart sind. Es folgt also für zwei derartige Kegel σ, $\sigma' \in \Sigma^{(r)}$:

$$\begin{aligned}
&\alpha \notin N(\Sigma) \\
&\Rightarrow \alpha \notin \mathbf{R}\tau, \ \tau := \sigma \cap \sigma' \\
&\Leftrightarrow \alpha \notin \{l_\sigma - l_{\sigma'}\}^\perp \quad \text{(Bemerkung 2.3.12)} \\
&\Leftrightarrow (l_\sigma \mid \alpha) \neq (l_{\sigma'} \mid \alpha).
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.3.3
Es gilt sogar die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
& \alpha \in N \setminus N(\Sigma) \text{ und } f_\alpha \text{ wurde nach Satz 3.1.13 gebildet} \\
\Leftrightarrow \quad & f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma).
\end{aligned}$$

Beweis. Zu zeigen ist nach Folgerung 3.3.2 nur die Rückrichtung.
Sei also $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$

$$\begin{aligned}
& (l_\sigma \mid \alpha) \neq (l_{\sigma'} \mid \alpha), \text{ falls } \sigma,\ \sigma' \text{ benachbart sind} \\
\Rightarrow \quad & \alpha \notin \mathbf{R}\tau, \text{ falls } \tau = \sigma \cap \sigma'.
\end{aligned}$$

Da Σ komplett ist, existieren für jedes $\tau \in \Sigma^{(r-1)}$ r-dimensionale Kegel σ, $\sigma' \in \Sigma$, so daß $\tau = \sigma \cap \sigma'$ und die Behauptung ist bewiesen.

Bemerkung 3.3.4
Für jedes $N \ni \alpha \notin N(\Sigma)$ existiert eindeutig ein Kegel $\sigma \in \Sigma$, so daß $\alpha \in \sigma$ und $\dim \sigma = r$.

Beweis. Sei α nach Voraussetzung beliebig gewählt.

(i) Zu zeigen ist, daß ein $\sigma \in \Sigma^{(r)}$ existiert, so daß $\alpha \in \sigma$.

Da Σ komplett ist, existiert ein $\sigma \in \Sigma$ mit $\alpha \in \sigma$.

Da $\alpha \notin N(\Sigma)$ folgt $\sigma \in \Sigma^{(r)}$.

(ii) Eindeutigkeit:

Annahme : $\alpha \in \sigma \cap \sigma' =: \tau$, mit σ, $\sigma' \in \Sigma$

Aus den Fahneneigenschafen folgt, daß τ eine Seite von σ und somit aus Σ ist.

Da $\alpha \in \tau$, ist $\dim \tau$ gleich r (analog (i)).

Alle Seiten lassen sich in der Form $\sigma \cap \{m_0\}^\perp,\ m_0 \in M$ darstellen und nur für $m_0 = 0 \in M$ ist dieser Schnitt eine r-dimensionale Seite

$\Rightarrow \tau = \sigma \cap \{0\}^\perp = \sigma$

$\Rightarrow \sigma = \sigma'$.

Damit lassen sich direkt die Indices der kritischen Punkte für Morsefunktionen, die nach Satz 3.1.13 gebildet wurden, angeben. Zuvor noch eine Bemerkung zur Struktur der Fahne Σ:

Bemerkung 3.3.5
Sei für ein $\sigma \in \Sigma^{(r)}$ $B = \{n_1, ..., n_r\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ auch σ erzeugt. Für jede Seite τ der Dimension d existieren d Elemente aus B, so daß τ von diesen d Elementen erzeugt wird (vergleiche [Oda, Anhang]). Für die Elemente aus $St\sigma^{(r-1)}$ bedeutet das:

Für jedes $\tau \in St\sigma^{(r-1)}$ existiert ein $n_i \in B$, so daß τ von $B \setminus \{n_i\}$ erzeugt wird

$\Rightarrow$ es existieren genau r Seiten der Dimension (r-1) von σ.

Allgemein gilt, daß σ genau $\binom{r}{d}$ Seiten der Dimension d hat. Das heißt, es gibt insgesamt

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} = 2^r$$

Seiten von $\sigma \in \Sigma^{(r)}$.

Folgerung 3.3.6
Seien $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$, $g_\alpha := f_\alpha \mid_{X_\Sigma^{\geq 0}}$, $m_{\sigma 1}, ..., m_{\sigma r}$ die Erzeuger der Halbgruppe ϕ_σ, $\alpha \in \sigma \in \Sigma$ und x_σ der kritische Punkt von f_α in X_σ. Dann gilt:

$$\mathrm{Ind}_{x_\sigma} f_\alpha = 2 \cdot \#\{m_{\sigma i};\ (m_{\sigma i} \mid \alpha) < 0\ i = 1, ..., r\},$$

beziehungsweise

$$\mathrm{Ind}_{x_\sigma} g_\alpha = \#\{m_{\sigma i};\ (m_{\sigma i} \mid \alpha) < 0,\ i = 1, ..., r\}.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 3.1.13 folgt, daß der Index von f_α im kritischen Punkt x_σ gleich der doppelten Anzahl der negativen Koeffizienten a_i aus Gleichung 9 in Satz 3.1.13 ist.
Dabei gilt für a_i:

$a_i = (m_i - l_\sigma \mid \alpha),\ i = 1, ..., r,$

wobei l_σ die dem Kegel σ zugeordnete Ecke ist, und $m_i - l_\sigma$ aus einem Erzeugendensystem von ϕ_σ stammt.

Da im regulären Fall dieses Erzeugendensystem eindeutig bestimmt ist, folgt:

$\{a_i;\ i=1,...,r\} = \{(m_{\sigma i} \mid \alpha);\ i=1,...,r\}$.

Damit folgt die Behauptung für f_α und analog für g_α.

Folgerung 3.3.7

Sei $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$, $g_\alpha := f_\alpha \mid_{X_\Sigma^{\geq 0}}$, $\sigma \in \Sigma^{(r)}$ beliebig und $\{n_1,...,n_r\}$ die **Z**-Basis von N, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ auch σ erzeugt (existiert, da Σ regulär). Ferner sei $\sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k n_k = \alpha$ die Darstellung von α in dieser Basis und x_σ der kritische Punkt von f_α in X_σ. Dann gilt:

$$\mathrm{Ind}_{x_\sigma} f_\alpha = 2 \cdot \#\{\alpha_k;\ \alpha_k < 0,\ k=1,...,r\}$$

beziehungsweise

$$\mathrm{Ind}_{x_\sigma} g_\alpha = \#\{\alpha_k;\ \alpha_k < 0,\ k=1,...,r\}.$$

Beweis. Seien $m_{\sigma 1},...,m_{\sigma r}$ die Erzeuger von ϕ_σ.

Nach Bemerkung 2.3.12 existiert für jedes $m_{\sigma i}$ genau ein $\tau_i \in St\sigma^{(r-1)}$, so daß $\tau_i \subset {m_{\sigma i}}^{\perp}$, $i=1,...,r$.

Also existiert nach Bemerkung 3.3.5 für jedes $m_{\sigma i}$ genau ein $n_{j(i)} \notin \tau_i$, $i = 1,...,r$, so daß

$$(m_{\sigma i} \mid n_{j(i)}) \neq 0,\ (m_{\sigma i} \mid n_k) = 0,\ k \neq j(i),\ k=1,...,r.$$

Da $m_{\sigma i} \in \check{\sigma}$ gilt sogar:

$$(m_{\sigma i} \mid n_{j(i)}) > 0,\ (m_{\sigma i} \mid n_k) = 0,\ k \neq j(i),\ k=1,...,r$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (m_{\sigma i} \mid \alpha) &= (m_{\sigma i} \mid \sum_{k=1}^{r} \alpha_k n_k) = (m_{\sigma i} \mid \alpha_{j(i)} n_{j(i)}) \\ &= \alpha_{j(i)} (m_{\sigma i} \mid n_{j(i)}) \begin{cases} < 0, & \alpha_{j(i)} < 0 \\ > 0, & \alpha_{j(i)} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \#\{m_{\sigma i};\ (m_{\sigma i} \mid \alpha) < 0,\ i=1,...,r\} = \#\{\alpha_k;\ \alpha_k < 0,\ k=1,...,r\}$

$\Rightarrow$ (mit Folg 3.3.6) die Behauptung für f_α.

Analog folgt die Behauptung für g_α.

Bemerkung 3.3.8
Sei $\{n_1, ..., n_r\} =: B$ eine Basis von N, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ auch $\sigma \in \Sigma^{(r)}$ erzeugt und $\{m_1, ..., m_r\}$ die dazu duale Basis von M. Dann sei $\{n \in N;\ (m_i \mid n) \geq 0\}$ das von n_i erzeugte negative Halbgitter.

Notation.

1. $H^-(n_i)$ bezeichne das von n_i erzeugte Halbgitter.
2. $H^-(\tau) := H^-(n_i)$ sei das von $\tau = \langle n_j;\ j \neq i\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$ erzeugte Halbgitter.
3. $H^-(n_i),\ i = 1, ..., r$ heißen die von σ bestimmten Halbgitter.
4. $H(n_i) := \{y \in N_{\mathbf{R}};\ (m_i \mid y) = 0\},\ i = 1, ..., r$ heißen die von σ bestimmten Hyperebenen.

Nach Folgerung 3.3.7 ist der Index von f_α im Punkt $x_\sigma := 0 \in (\mathbf{C}^r)_\sigma$ gleich der doppelten Anzahl der von σ bestimmten negativen Halbgitter, in denen α liegt. Er wird also bestimmt, von der relativen Lage von α zu den von σ bestimmten Hyperebenen. Sind die Basen fest gewählt, so zeigt der Beweis der Folgerung 3.3.7, daß man sogar die Vorzeichen der Quadratterme in Gleichung 9 aus Satz 3.1.13 angeben kann. Liegt α bezüglich der Richtung n_i unter $H(n_i)$, also in $H^-(n_i)$, so ist der Koeffizient des Termes $|z_i|^2$ kleiner null.

Beispiel 3.3.9
Sei $N = \mathbf{Z}^3$ und σ ein dreidimensionaler Kegel im $\mathbf{R}^3$, der von der N-Basis $\{n_1, n_2, n_3\}$ erzeugt wird. Analog dem Beispiel 3.2.10 stelle man sich den Nullpunkt von N im Zentrum einer Kugel vor. Wegen der strengen Konvexität von σ liegt der Schnitt von $St\sigma^{(2)}$ mit der Oberfläche der Kugel ganz in einer geeignet gewählten Halbkugeloberfläche ohne Äquator. Diese wird nun in den $\mathbf{R}^2$ projeziert, so daß der Äquator nach ∞ abgebildet würde.

Abbildung 3.3 zeigt die Projektion des Schnittes von $St\sigma^{(2)}$ mit der Kugeloberfläche. Die Projektion der Schnitte der Hyperebenen $H(n_i),\ i = 1, 2, 3$ ist gestrichelt eingetragen. Sie teilt den $\mathbf{R}^2$ in Sektoren ein, in denen α, identifiziert mit seiner Projektion, variieren kann, ohne daß sich die Vorzeichen der Quadratterme in Gleichung 9 aus Satz 3.1.13 ändern. In diese Sektoren sind die zugehörigen Vorzeichen als (+/-)-Tupel eingetragen.

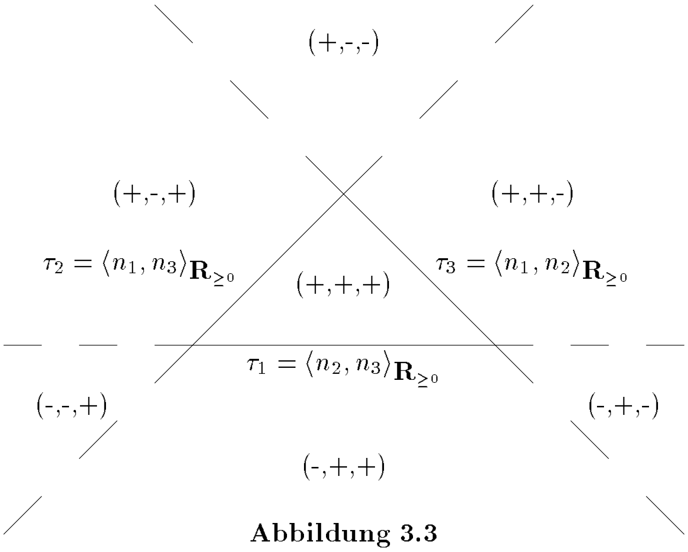


Abbildung 3.3

Satz 3.3.10
$f_\alpha,\ f_\beta \in MF_s(X_\Sigma)$ sind genau dann speziell äquivalent, wenn ein Kegel $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ existiert, so daß α und β im Inneren dieses Kegels liegen.

Beweis. Nach Bemerkung 3.3.8 gilt:
$f_\alpha,\ f_\beta \in MF_s(X_\Sigma)$ sind genau dann speziell äquivalent, wenn α und β für alle $\sigma \in \Sigma$ die gleiche relative Lage bezüglich aller Hyperebenen obiger Form haben.

Nach Definition von $\tilde{\Sigma}$ ist dies genau dann der Fall, wenn ein Kegel $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ existiert, so daß α und β im Inneren dieses Kegels liegen.

Bemerkung 3.3.11
Nach Satz 3.3.10 existiert also eine bijektive Abbildung

$$F : \tilde{\Sigma}^{(r)} \longrightarrow \frac{MF_s(X_\Sigma)}{\sim_s},$$

in der jedem r-dimensionalen Kegel $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$ die Klasse der zu f_α speziell äquivalenten Funktionen zugeordnet wird, wobei α aus dem Inneren von $\tilde{\sigma}$ beliebig gewählt werden darf.
Insbesondere besagt Satz 3.3.10 also, daß die Anzahl der Äquivalenzklassen speziell äquivalenter Morsefunktionen gleich der Anzahl r-dimensionaler Kegel in $\tilde{\Sigma}$, beziehungsweise gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $N_{\mathbf{R}} \setminus N(\Sigma)$ ist.

Folgerung 3.3.12
Sei $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$, α, $\beta \in \mathrm{int}(\tilde{\sigma})$. Dann existiert für die Morsefunktionen f_α, $f_\beta \in MF_s(X_\Sigma)$ eine Homotopie

$$H : X_\Sigma \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R},$$
$$(x,t) \longmapsto f(x,t) := f_{t\alpha+(1-t)\beta}(x),$$

so daß gilt:

1. $f(x,0) = f_\alpha(x)$ für alle $x \in X$.
2. $f(x,1) = f_\beta(x)$ für alle $x \in X$.
3. $H\ |_{X_\Sigma \times (0,1)}$ ist eine glatte Funktion. In $X_\Sigma \times \{0,1\}$ existieren zusätzlich die einseitigen partiellen Ableitungen nach t.
4. $H_t : X_\Sigma \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto f(x,t)$ ist MF für alle $t \in [0,1]$.
5. $H_t \sim_s H_{t'}$ für alle t, $t' \in [0,1]$.

Beweis.
Die erste und zweite Eigenschaft folgen direkt aus der Definition der Homotopie H, die vierte und fünfte Eigenschaft aus der Konvexität von $\tilde{\sigma}$ und der Bemerkung 3.3.8.

Beweis der dritten Eigenschaft:
Sei $t \in (0,1)$, $x \in X_\Sigma$ beliebig, und $\sigma \in \Sigma$, so daß $x \in X_\sigma$. Dann ergibt sich für Gleichung 8 aus Satz 3.1.13 in den dortigen Bezeichnungen

$$f_{t\alpha+(1-t)\beta}(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}(ta_i + (1-t)b_i)|z_i|^2 + \mathcal{P}_2}{1 + \sum\limits_{i=1}^{r}|z_i|^2 + \mathcal{P}_2'} + (l_0 \mid ta_i + (1-t)b_i),$$

wobei die Koeffizienten des Polynoms $\mathcal{P}_2$ lineare Funktionen in t sind, diejenigen von $\mathcal{P}_2'$ nicht von t abhängen

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} f_{t\alpha+(1-t)\beta}(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r}(a_i - b_i)|z_i|^2 + \mathcal{P}_2^*}{1 + \sum\limits_{i=1}^{r}|z_i|^2 + \mathcal{P}_2'} + (l_0 \mid a_i - b_i),$$

wobei die Koeffizienten von $\mathcal{P}_2^*$ nicht mehr von t abhängen

$\Rightarrow H\ |_{X_\Sigma \times (0,1)}$ ist unendlich oft partiell nach t differenzierbar und in $X_\Sigma \times \{0,1\}$ existieren die einseitigen Ableitungen nach t

$\Rightarrow H\ |_{X_\Sigma \times (0,1)}$ ist glatt, da H_t für festes t eine MF ist.

Bemerkung 3.3.13
Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Folgerung 3.3.12 gilt die analoge Aussage auch für die reellen Morsefunktionen g_α und g_β.

Die Resultate bezüglich der Menge der speziellen Morsefunktionen auf der Varietät X_Σ werden jetzt benutzt, um einige Aussagen über die Homologie und die Charakteristik von X_Σ zu beweisen. Zunächst folgt noch eine Bemerkung zur Anzahl $h_k(f_\alpha)$ der kritischen Punkte mit Index k der Funktion f_α:

Bemerkung 3.3.14
Für $h_{2i}(f_\alpha)$ ergibt sich nach Bemerkung 3.3.8 für alle $i = 0, ..., r$:

$h_{2i}(f_\alpha) = \#\{\sigma \in \Sigma;\ \alpha\, liegt\ in\ i\ der\ durch\ \sigma\ bestimmten\ negativen\ Halbgitter\}$.

Lemma 3.3.15
Die Menge der von $\sigma \in \Sigma$ bestimmten negativen Halbgitter ist gleich der Menge der von $-\sigma \in -\Sigma$ bestimmten positiven Halbgitter.

Beweis. Sei $\{n_1, ..., n_r\}$ eine **Z**-Basis von N, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ auch σ erzeugt und $\{m_1, ..., m_r\}$ die dazu duale Basis.
Dann ist $\{-n_1, ..., -n_r\}$ eine **Z**-Basis von von N, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ den Kegel $-\sigma$ erzeugt und $\{-m_1, ..., -m_r\}$ die dazu duale Basis von M.
Da $\{n \in N;\ (m_i \mid n) < 0\} = \{n \in N;\ (-m_i \mid n) > 0\}$ gilt:

$$H^+(-n_i) = H^-(n_i) \text{ für alle } i = 1, ..., r.$$

Satz 3.3.16
Sei $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$ beliebig. Dann gilt die Morsegleichung

$$h_k(f_\alpha) = rang H_k(X_\Sigma) \text{ für alle } k = 0, ..., 2r.$$

Beweis. Aus Satz 3.1.13 folgt:

$$h_k(f_\alpha) = 0 \text{ für alle } 1 \leq k \leq 2r-1,\ k\ ungerade, \tag{15}$$

denn es können nur gerade Indices auftreten.
Nach der Morseungleichung gilt:

$$\begin{aligned} & rang H_k(X_\Sigma) \leq h_k(f_\alpha) \text{ für alle } k = 0, ..., 2r \\ \Rightarrow\quad & rang H_{2i+1}(X_\Sigma) = 0 = h_{2i+1}(f_\alpha) \text{ für alle } i = 0, ..., r-1. \end{aligned} \tag{16}$$

Nach Satz 1.1.26 gilt außerdem:

$$\begin{array}{rrcl} & \sum_{k=0}^{2r}(-1)^k rang H_k(X_\Sigma) & = & \sum_{k=0}^{2r}(-1)^k h_k(f_\alpha) \\ \overset{15+16}{\Longrightarrow} & \sum_{i=0}^{r} rang H_{2i}(X_\Sigma) & = & \sum_{i=0}^{r} h_{2i}(f_\alpha). \end{array}$$

Da alle auftretenden Summanden nicht negativ sind, und für alle $i = 0, ..., r$ nach der Morseungleichung

$$rang H_{2i}(X_\Sigma) \leq h_{2i}(f_\alpha)$$

gilt, folgt auch für die Homologiegruppen mit geradem Index:

$$rang H_{2i}(X_\Sigma) = h_{2i}(f_\alpha) \text{ für alle } i = 0, ..., r.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Folgerung 3.3.17
Für eine projektive Torusvarietät X_Σ gilt:

$$rang H_0(X_\Sigma) = rang H_{2r}(X_\Sigma) = 1.$$

Beweis. Sei $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$ beliebig. Nach Bemerkung 3.3.4 existiert genau ein $\sigma \in \Sigma^{(r)}$ mit $\alpha \in \sigma$.
Aus Folgerung 3.3.7, Bemerkung 3.3.14 und der Morsegleichung folgt:

$$rang H_0(X_\Sigma) = h_0(f_\alpha) = 1.$$

Da mit Σ auch die Fahne $-\Sigma$ komplett ist, folgt mit Bemerkung 3.3.15 analog:

$$rang H_{2r} = h_{2r}(f_\alpha) = 1.$$

Beispiel 3.3.18
In Bemerkung 1.2.8 wurden die Homologiegruppen der Räume $\mathbf{P_r C}$ und $\widetilde{\mathbf{C}}^r$ mit der Morseungleichung abgeschätzt. Da $\mathbf{P_r C}$ nach Beispiel 2.3.3 eine projektive Torusvarietät ist, kann die Homologie nun mittels Satz 3.3.16 exakt berechnet werden. Es ergibt sich mit der Standardmorsefunktion aus Beispiel 1.1.16:

$$rang H_k(\mathbf{P_r C}) = h_k(f) = \begin{cases} 0 & k \ ungerade, \\ 1 & k \ gerade, \end{cases} \quad k = 0, ..., 2r.$$

Folgerung 3.3.19
Seien $f_\alpha,\ f_\beta \in MF_s(X_\Sigma)$. Dann gilt:

$$h_k(f_\alpha) = h_k(f_\beta) \text{ für alle } k = 0, ..., 2r.$$

Beweis. Nach Satz 3.3.16 gilt:

$$h_k(f_\alpha) = rangH_k(X_\Sigma) = h_k(f_\beta) \text{ für alle } k = 0, ..., 2r$$

$\Rightarrow$ die Behauptung.

Lemma 3.3.20
Für beliebiges $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$ gilt:

$$h_{2i}(f_\alpha) \geq 1 \text{ für alle } i = 0, ..., r.$$

Beweis. Sei $i \in \{0, ..., r\}$ und $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$ vorgegeben. Sei σ ein beliebiger r-dimensionaler Kegel aus Σ, und $\{n_1, ..., n_r\}$ eine Basis von N, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ auch σ erzeugt. Dann definiert $\langle -n_1, ..., -n_i, n_{i+1}, ..., n_r\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$ einen Kegel σ' in $N_{\mathbf{R}}$.
Da $N(\Sigma)$ eine Nullmenge in $N_{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}^r$ ist, folgt:

$$\sigma' \setminus N(\Sigma) \neq \emptyset.$$

Wählt man nun ein beliebiges $\beta \in \sigma' \setminus N(\Sigma)$, so gilt nach Folgerung 3.3.7:

$$\mathrm{Ind}_{x_\sigma} f_\beta = 2i,$$

wobei x_σ der kritische Punkt von f_β in X_σ ist.
Da nach Folgerung 3.3.19

$$h_{2i}(f_\alpha) = h_{2i}(f_\beta),$$

folgt die Behauptung.

Bemerkung 3.3.21
Sei $\alpha \in N \setminus N(\Sigma)$. Aus Lemma 3.3.20 folgt, daß für alle $i = 0, ..., r$ ein Kegel $\sigma \in \Sigma$ existiert, so daß α in i der durch σ bestimmten negativen Halbgitter liegt. Aus dieser geometrischen Aussage über die Fahne Σ folgt insbesondere:

$$\#\Sigma^{(r)} \geq r + 1.$$

Satz 3.3.22
Sei X_Σ eine projektive Torusvarietät, dann gilt:

$$rang H_k(X_\Sigma) \begin{cases} = 0 & k \ ungerade, \\ \geq 1 & k \ gerade, \end{cases} \quad k = 0, ..., 2r.$$

Beweis. Aus Satz 3.1.13 und Lemma 3.3.20 folgt für beliebiges $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$:

$$h_k(f_\sigma) \begin{cases} = 0 & k \ ungerade, \\ \geq 1 & k \ gerade, \end{cases} \quad k = 0, ..., 2r.$$

Dies in die Morsegleichung aus Satz 3.3.16 eingesetzt, ergibt die Behauptung.

Folgerung 3.3.23
Die Euler-Poincaré-Charakteristik der projektiven Torusvarietät X_Σ ist immer größer oder gleich $r + 1$.

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 3.3.16 folgt:
$\chi(X_\Sigma) = \sum_{i=0}^{r} rang H_{2i}(X_\Sigma).$
aus Satz 3.3.22 folgt:
$\sum_{i=0}^{r} rang H_{2i}(X_\Sigma) \geq \sum_{i=0}^{r} 1 = r + 1$
$\Rightarrow$ Behauptung.

Lemma 3.3.24
Für beliebiges $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$ gilt:

$$h_k(f_\alpha) = h_{2r-k}(f_\alpha) \text{ für alle } k = 0, ..., 2r.$$

Beweis. Für die reelle Erweiterung $\tilde{\Phi}$ des $\mathbf{Z}$-linearen Morphismus

$$\Phi : N \longrightarrow N, \quad n \longmapsto -n$$

gilt:
$\tilde{\Phi}(\sigma) = -\sigma \in -\Sigma$ für alle $\sigma \in \Sigma$.
Also ist

$$\Phi : (N, \Sigma) \longrightarrow (N, -\Sigma)$$

eine Fahnenabbildung.

Da Φ ein Isomorphismus ist, ist die von Φ induzierte äquivariante holomorphe Abbildung Φ_* sogar eine Biholomorphie, und es gilt:

$$X_\Sigma \cong X_{-\Sigma}.$$

Es folgt für die Homologien:

$$H_k(X_\Sigma) = H_k(X_{-\Sigma}) \text{ für alle } k = 0, ..., 2r. \tag{17}$$

Da $\tilde{\Sigma} = (\tilde{-\Sigma})$, induziert α nach Satz 3.1.13 auch eine Funktion $\hat{f}_\alpha \in MF_s(X_{-\Sigma})$ und es folgt für f_α und $\hat{f}_\alpha$ aus Gleichung 17 und der Morsegleichung aus Satz 3.3.16:

$$h_k(f_\alpha) = h_k(\hat{f}_\alpha) \text{ für alle } k = 1, ..., 2r. \tag{18}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&h_{2i}(\hat{f}_\alpha)\\
\overset{3.3.14}{=}\ &\#\{\sigma' \in -\Sigma;\ \alpha \textit{ liegt in } i \textit{ der durch } \sigma' \textit{ bestimmten negativen Halbgitter}\}\\
\overset{3.3.15}{=}\ &\#\{\sigma \in \Sigma;\ \alpha \textit{ liegt in } i \textit{ der durch } \sigma \textit{ bestimmten positiven Halbgitter}\}\\
\overset{3.3.5}{=}\ &\#\{\sigma \in \Sigma;\ \alpha \textit{ liegt in } (r-i) \textit{ der durch } \sigma \textit{ bestimmten negativen Halbgitter}\}\\
\overset{3.3.14}{=}\ &h_{2(r-i)}(f_\alpha) \text{ für alle } i = 0, ..., r.
\end{aligned}$$

Aus Gleichung 18 folgt nun die Behauptung für die geraden Werte für k.

Da keine kritischen Punkte mit ungeradem Index existieren, ist hiermit das Lemma bewiesen.

Satz 3.3.25
Für eine projektive Torusvarietät X_Σ gilt:

$$rang H_k(X_\Sigma) = rang H_{2r-k}(X_\Sigma) \text{ für alle } k = 0, ..., 2r.$$

Beweis. Aus Satz 1.1.26 und Lemma 3.3.24 folgt die Behauptung.

Bemerkung 3.3.26
Für die auf den reellen Teil $X_\Sigma(\mathbf{R})$ eingeschränkte MF g_α gelten Bemerkung 3.3.14, Folgerung 3.3.19 und das Lemma 3.3.24 in analoger Form.

Folgerung 3.3.27
Für die Euler-Poincaré-Charakteristik der glatten Mannigfaltigkeit $X_\Sigma(\mathbf{R})$ gilt:

$$\chi(X_\Sigma(\mathbf{R})) = 0 \text{ für ungerades r.}$$

Beweis. Sei $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$ beliebig und g_α deren Einschränkung auf den reellen Teil von X_Σ, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\chi(X_\Sigma(\mathbf{R})) &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i h_i(g_\alpha) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \big((-1)^i h_i(g_\alpha) + (-1)^{r-i} h_{r-i}(g_\alpha)\big) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i \big(h_i(g_\alpha) + (-1)^r h_{r-i}(g_\alpha)\big) \\
&\overset{3.3.24}{=} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^i \underbrace{(1+(-1)^r)}_{=0} h_i(g_\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

3.4 Abbildungen in symmetrische Gruppen

Die Existenz der speziellen Äquivalenzklassen und die Unabhängigkeit der Werte $h_k(f_\alpha)$ von der Wahl des Kegels $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, aus dem α gewählt wurde, ermöglichen es, Abbildungen von $\Sigma^{(r-1)}$ und $\tilde{\Sigma}^{(r)} \times \tilde{\Sigma}^{(r)}$ in die symmetrische Gruppe S_K zu definieren. Hierbei ist K die Anzahl der r-dimensionalen Kegel in Σ.

Bemerkung 3.4.1
Sei $K := \#\Sigma^{(r)}$ und $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$, dann hat f_α nach Satz 3.1.13 genau K kritische Punkte in X_Σ, bezeichnet mit $x_{\sigma_1}, ..., x_{\sigma_K}$, wobei $x_{\sigma_i} \in X_{\sigma_i},\ i = 1, ..., K$. Diese Bezeichnungen und eine beliebige, aber fest gewählte Durchnummerierung der kritischen Punkte gelten für den gesamten Abschnitt 3.4.

Definition 3.4.2
Mit P sei folgende Abbildung bezeichnet:

$$\begin{aligned}
P:\ \tilde{\Sigma}^{(r)} &\longrightarrow \mathbf{N_0}^K, \\
\tilde{\sigma} &\longmapsto (\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_1}} f_{\alpha(\tilde{\sigma})}, ..., \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_K}} f_{\alpha(\tilde{\sigma})}),
\end{aligned}$$

wobei $\alpha(\tilde{\sigma}) \in \tilde{\sigma}$ beliebig gewählt ist.

Bemerkung 3.4.3
Aufgrund Satz 3.3.10 ist die Abbildung P wohldefiniert.

Bemerkung 3.4.4
Sei $H \in \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ beliebig. In der Symmetrisierung von Σ existiert nach Definition mindestens ein Paar r-dimensionaler Kegel $(\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}')$, so daß

$$\tilde{\sigma} \cap \tilde{\sigma}' = \tilde{\tau},\ \ \tilde{\tau} + (-\tilde{\tau}) = H.$$

Nun seien $\alpha \in \tilde{\sigma}, \beta \in \tilde{\sigma}'$ fest gewählt.

Da Σ komplett ist, existieren nur endlich viele paarweise verschiedene Kegel $\tau_1, ..., \tau_l \in \Sigma^{(r)}$ mit der Eigenschaft:

$\tau_i + (-\tau_i) = H,\ \ i = 1, ..., l.$

Aus der Definition von $\tilde{\Sigma}$ folgt, daß $l \geq 1$ ist.

Ebenfalls wegen der Komplettheit von Σ existieren l Paare r-dimensionaler Kegel $(\sigma_{k_1}, \sigma_{k_1'}), ..., (\sigma_{k_l}, \sigma_{k_l'})$, so daß für alle $i = 1, ..., l$ gilt:

$\sigma_{k_i} \cap \sigma_{k_i'} = \tau_i.$

Die hier vorkommenden r-dimensionalen Kegel $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_1'}, ..., \sigma_{k_l}, \sigma_{k_l'}$ sind wegen der zweiten Fahneneigenschaft paarweise verschieden.

Nach Bemerkung 3.3.5 existieren $n_1, n_1', ..., n_l, n_l' \in N$, so daß

$\sigma_{k_i} = \langle \tau_i, n_i \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, \sigma_{k_i'} = \langle \tau_i, n_i' \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$ für alle $i = 1, ..., l.$

Die Paare $(\sigma_{k_i}, \sigma_{k_i'})$ seien nun ohne Einschränkung so angeordnet, daß

$\alpha \in H^-(n_i) = H^+(n_i'),\ \ \beta \in H^-(n_i') = H^+(n_i)$ für alle $i = 1, ..., l.$

In einigen der endlich vielen Paare müssen hierzu lediglich die beiden Kegel vertauscht werden, die das jeweilige Paar bilden.

Für die Morsefunktionen $f_\alpha,\ f_\beta \in MF_s(X_\Sigma)$ folgt nun nach Bemerkung 3.3.8 und Satz 3.3.10:

$$\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i}}}(f_\alpha) = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i}}}(f_\beta) + 2 \text{ für alle } i = 1, ..., l \tag{19}$$

und

$$\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i'}}}(f_\alpha) = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i'}}}(f_\beta) - 2 \text{ für alle } i = 1, ..., l.$$

Behauptung: $\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i}}} f_\alpha = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i'}}} f_\beta$ für alle $i = 1, ..., l.$

Beweis. Sei $i \in \{1, ..., l\}$ beliebig, $\sigma := \sigma_{k_i},\ \sigma' := \sigma_{k_i'}$ und $\ \tau := \tau_i.$
$\{b_1, ..., b_{r-1}\}$ sei Teil einer Basis von N, die über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ auch τ erzeugt und $b_r := n_i,\ b_r' := n_i'.$

Die zu $\{b_1, ..., b_r\} =: B$ eindeutig bestimmte duale Basis von M sei mit $\{m_1, ..., m_r\}$ bezeichnet, die zu $\{b_1, ..., b_{r-1}, b'_r\} =: B'$ mit $\{m'_1, ..., m'_r\}$. Da Σ eine Fahne ist, gilt:

$$(m_r \mid b'_r) < 0 > (m'_r \mid b_r). \tag{20}$$

Seien

$\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i b_i, \ \alpha_i \in \mathbf{Z}$ und

$\beta = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i b_i + \beta_r b'_r, \ \beta_i \in \mathbf{Z}$

die Darstellungen von α und β in den Basen B und B' von N.

Annahme : Es existiert ein $i \in \{1, ..., r-1\}$, so daß $\alpha_i \cdot \beta_i < 0$.
Sei ohne Einschränkung $i = 1$ und $\alpha_1 < 0 < \beta_1$.

$$\left.\begin{array}{rcl} (m'_1 \mid \beta) & = & \beta_1 > 0 \\ (m'_1 \mid \alpha) & = & \alpha_1 + \alpha_r (m'_1 \mid b_r) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_r (m'_1 \mid b_r) > 0,$$

denn α und β entstammen benachbarten r-dimensionalen Kegeln aus $\tilde{\Sigma}$ und werden deshalb nur durch eine einzige Hyperebene aus $\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ getrennt. Dies leistet nach Voraussetzung jedoch schon $H(b_r) = H(b'_r)$,

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha \in H^-(b_r) \Rightarrow \alpha_r & < & 0 \\ \alpha_1 & < & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_r (m'_1 \mid b_r) & > & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (m'_1 \mid b_r) < 0.$$

Sei nun

$$b_r = \sum_{i=1}^{r-1} \gamma_i b_i + \gamma_r b'_r, \ \gamma_i \in \mathbf{Z} \tag{21}$$

die Darstellung von b_r in der Basis B' von N, dann folgt:

$$\gamma_1 = (m'_1 \mid b_r) < 0 \overset{20}{>} \gamma_r = (m'_r \mid b_r).$$

Analog ergibt sich (diesmal dürfen α und β von $H(n_1)$ nicht getrennt werden):

$$\left.\begin{array}{rcl} (m_1 \mid \beta) & = & \beta_1 + \beta_r (m_1 \mid b'_r) \\ (m_1 \mid \alpha) & = & \alpha_1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta_1 + \beta_r (m_1 \mid b'_r) < 0,$$

und nun

$$\left.\begin{array}{rcl} \beta \in H^-(b'_r) \Rightarrow \beta_r & < & 0 \\ \beta_1 & > & 0 \\ \beta_1 + \beta_r (m_1 \mid b'_r) & < & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (m_1 \mid b'_r) > 0.$$

Sei nun

$$b_r' = \sum_{i=1}^{r} \delta_i b_i, \ \delta_i \in \mathbf{Z} \tag{22}$$

die Darstellung von b_r' in der Basis B von N, dann folgt:

$$\delta_1 = (m_1 \mid b_r') > 0 \overset{20}{>} \delta_r = (m_r \mid b_r').$$

Setzt man nun Gleichung 22 in Gleichung 21 ein, so ergibt sich:

$$b_r = \sum_{i=1}^{r-1} \big(\gamma_i + (\gamma_r \delta_i)\big)\, b_i + \gamma_r \delta_r b_r \tag{23}$$

$\Rightarrow \underbrace{\gamma_1}_{<0} + \underbrace{(\underbrace{\gamma_r}_{<0} \cdot \underbrace{\delta_1}_{>0})}_{<0} = 0$, ein Widerspruch.

Die Annahme ist also falsch. Da im Beweis auch gezeigt wurde, daß $\alpha_r,\ \beta_r < 0$ haben alle α_i und $\beta_i,\ i = 1, ..., r$ jeweils das gleiche Vorzeichen und mit Folgerung 3.3.7 folgt die Behauptung.

Der Übergang von α zu β, beziehungsweise von $\tilde{\sigma}$ zu $\tilde{\sigma}'$ führt zu einer Vertauschung der Indices in den Punktepaaren $(x_{\sigma_{k_i}}, x_{\sigma_{k_i'}})$. Da alle auftretenden Kegel paarweise verschieden waren, sind auch alle auftretenden kritischen Punkte paarweise verschieden. Die Tupel $P(\tilde{\sigma})$ und $P(\tilde{\sigma}')$ unterscheiden sich also dadurch, daß der Eintrag an k_i-ter Stelle jeweils mit demjenigen an k_i'-ter Stelle, $i = 1, ..., l$, ausgetauscht wurde. Aus Gleichung 19 folgt, daß tatsächlich an jeder Stelle k_i und k_i' eine Veränderung stattgefunden hat, das heißt:

$\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i}}} f_\alpha \neq \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{k_i'}}} f_\alpha,\ i = 1, ..., l.$

Dieses Verfahren definiert eine Bijektion $\Pi(H)$ auf der Menge $\{1, ..., K\}$:

$$\begin{array}{llll} \Pi(H): & \{1, ..., K\} & \longrightarrow & \{1, ..., K\} \quad , \\ & k & \longmapsto & k' \quad , \text{falls } \mathbf{R}(\sigma_k \cap \sigma_{k'}) = H. \end{array}$$

Die spezielle Wahl der Kegel $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ zu Anfang der Bemerkung hat keinen Einfluß auf das Verfahren und die Abbildung $\Pi(H)$, denn es wurde nur benutzt, daß diese Kegel benachbart sind, und ihr Inneres von H getrennt wird.

Definition 3.4.5
S_K sei die symmetrische Gruppe von $\{1, ..., K\}$.

1. Mit Π sei die Abbildung

$$\Pi : \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)}) \longrightarrow S_K$$

bezeichnet, die jeder Hyperfläche aus dem von Σ erzeugten Hyperflächenarrangement die nach dem Verfahren aus Bemerkung 3.4.4 eindeutig bestimmte bijektive Abbildung $\Pi(H)$ zuordnet.

2. $$\begin{array}{rlll} \Pi_1: & \Sigma^{(r-1)} & \longrightarrow & S_K, \\ & \tau & \longmapsto & \Pi_1(\tau) := \Pi(\tau + (-\tau)). \end{array}$$

Bemerkung 3.4.6
Aus den Definitionen folgt:

$$\Pi(\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})) = \Pi_1(\Sigma^{(r-1)}).$$

Beweis.
(i) Für alle $\tau \in \Sigma^{(r-1)}$ ist $\tau + (-\tau)$ in $\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$.
(ii) Für alle Hyperebenen $H \in \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ existiert nach Definition von $\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ ein $\tau \in \Sigma^{(r-1)}$, so daß $H = \tau + (-\tau)$.

Folgerung 3.4.7
In den Bezeichnungen von Bemerkung 3.4.4 gilt:

$$\Pi(H) = (k_1, k_1') \circ \cdots \circ (k_l, k_l'),$$

wobei für $i, j \in \{1, ..., K\}$ mit (i, j) die Transposition aus S_K bezeichnet sei, die i und j vertauscht.

Alle auftretenden Transpositionen (k_i, k_i') sind paarweise disjunkt, da alle in Bemerkung 3.4.4 auftretenden kritischen Punkte $x_{\sigma_{k_1}}, x_{\sigma_{k_1'}}, ..., x_{\sigma_{k_l}}, x_{\sigma_{k_l'}}$ paarweise verschieden sind.

Folgerung 3.4.8
Die Abbildung Π ist injektiv.

Beweis. In den Bezeichnungen von Bemerkung 3.4.4 ergibt sich für zwei Elemente $H,\ H' \in \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ mit $\Pi(H) = \Pi(H')$:

Sei (k_1, k_1') eine der Transpositionen, aus denen sich $\Pi(H)$ zusammensetzt

$\Rightarrow$ auch $\Pi(H')$ enthält diese Transposition, da alle vorkommenden Transpositionen paarweise disjunkt sind

$\Rightarrow H = \sigma_{k_1} \cap \sigma_{k_1'} = H'$, nach Definition der Kegel σ_{k_1} und $\sigma_{k_1'}$.

Bemerkung 3.4.9
Die Abbildung Π_1 ist im Allgemeinen nicht injektiv. Existieren $\tau, \tau' \in \Sigma^{(r-1)}$ mit $\tau + (-\tau) = \tau' + (-\tau')$, so folgt:

$\Pi_1(\tau) = \Pi_1(\tau')$.

Dies ist zum Beispiel bei der Fahnenzerlegung des $\mathbf{R}^2$ der Fall, wobei $\Sigma^{(2)}$ aus den vier Quadranten besteht.

Lemma 3.4.10
Für $k,\ n \in N$ sei mit $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient bezeichnet. Es gilt:

1. $\#\Sigma^{(r-1)} = \frac{K \cdot r}{2} \le \binom{K}{2}$.
2. $K \ge r + 1$.

Ist insbesondere jeder r-dimensionale Kegel aus Σ mit jedem anderen r-dimensionalen Kegel aus Σ benachbart, folgt:

$$K = r + 1.$$

Umgekehrt sind alle r-dimensionalen Kegel einander benachbart, falls $K = r+1$ gilt.

Beweis.
Zu 1.:
Jeder r-dimensionaler Kegel hat nach Bemerkung 3.3.5 genau r Seiten der Dimension (r-1). Da Σ komplett ist, ist jede dieser r Seiten wiederum auch Seite eines weiteren r-dimensionalen Kegels. Also existieren genau $\frac{K \cdot r}{2}$ verschiedene (r-1)-dimensionale Schnittkegel.
Aus der Komplettheit von Σ folgt weiter, daß jedes $\tau \in \Sigma^{(r-1)}$ der Schnitt zweier r-dimensionaler Kegel ist. Daher ist die erste Gleichung bewiesen.
Da die Anzahl der zweielementigen Teilmengen von $\Sigma^{(r)}$ gleich $\binom{K}{2}$ ist, folgt auch die behauptete Ungleichung.

Zu 2.:
Nach 1. gilt:

$$\begin{array}{lll} & \frac{K \cdot r}{2} & \le \binom{K}{2} = \frac{K \cdot (K-1)}{2} \\ \Rightarrow & r & \le K - 1 \\ \Rightarrow & K & \ge r + 1. \end{array}$$

Zusatz:
Sind alle r-dimensionalen Kegel einander benachbart, dann gilt:

$$\frac{K \cdot r}{2} = \#\Sigma^{(r-1)} = \binom{K}{2}, \tag{24}$$

denn $\Sigma^{(r-1)}$ besteht dann genau aus den Schnittkegeln jeweils zweier verschiedener r-dimensionaler Kegel aus Σ.
Gilt umgekehrt: $K = r + 1$

$\Rightarrow \#\Sigma^{(r-1)} = \frac{K\cdot(K-1)}{2}$

$\Rightarrow$ es existieren $\frac{K\cdot(K-1)}{2} = \binom{K}{2}$ verschiedene Kegel der Dimension (r-1).

Da für jedes $\tau \in \Sigma^{(r-1)}$ Kegel $\sigma,\ \sigma' \in \Sigma^{(r)}$ existieren, so daß $\tau = \sigma \cap \sigma'$ und es höchstens $\binom{K}{2}$ verschiedene Paare r-dimensionaler Kegel gibt, folgt:

$\sigma \cap \sigma' \in \Sigma^{(r-1)}$, für alle $\sigma,\ \sigma' \in \Sigma^{(r)}$.

Also sind alle r-dimensionalen Kegel einander benachbart.

Folgerung 3.4.11
Es gilt:

$$\#\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)}) \leq \frac{K\cdot r}{2} \leq \binom{K}{2}.$$

Beweis. Aus der Definition von $\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ und Lemma 3.4.10 folgt die Behauptung.

Folgerung 3.4.12
Aus Lemma 3.4.10 folgt insbesondere, daß für ungerades $r = \dim N$ die Anzahl K der r-dimensionalen Kegel gerade ist.

Beispiel 3.4.13
Die den r-dimensionalen projektiven Raum erzeugende Fahne hat, nach Beispiel 2.1.21, genau (r+1) Kegel der Dimension r. Für alle ungeraden r ist $\#\Sigma^{(r)}$ insbesondere geradzahlig.

Bemerkung 3.4.14
Lemma 3.4.10 und die Folgerungen gelten in dieser Form genauso für lediglich komplette Fahnen.

Lemma 3.4.15
Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Für alle $\tau,\ \tau' \in \Sigma^{(r-1)}$ gilt $\tau + (-\tau) \neq \tau' + (-\tau')$, falls $\tau \neq \tau'$.

2. Π_1 ist injektiv.

3. $\Pi(\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})) = \Pi_1(\Sigma^{(r-1)}) \subset T(S_K)$,
   wobei mit $T(S_K)$ die Menge der Transpositionen in S_K bezeichnet ist.

Beweis.
1.⇒2.:
Gilt 1., so ist die Abbildung

$$h : \Sigma^{(r-1)} \longrightarrow \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)}), \ \ \tau \longmapsto \tau + (-\tau)$$

bijektiv.
Da Π injektiv ist, folgt $\Pi_1 = \Pi \circ h$ injektiv.

2.⇒1.:

$$\begin{aligned} & \Pi_1 = \Pi \circ h \text{ injektiv} \\ \Rightarrow \ & h \text{ injektiv} \\ \Leftrightarrow \ & 1.\ . \end{aligned}$$

1.⇒3.:
Da die Abbildung h aus dem ersten Beweisteil bijektiv ist, besteht nach Konstruktion von Π die Abbildung $\Pi(H)$ nur aus einer einzigen Transposition für alle $H \in \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$.

3.⇒1.:
Da $\Pi(H)$ für alle $H \in \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ nur aus einer einzigen Transposition besteht, folgt aus der Konstruktion von Π, daß es für jedes H nur ein $\tau \in \Sigma^{(r-1)}$ geben kann, mit $H = \tau + (-\tau)$.
Da für jedes $\tau \in \Sigma^{(r-1)}$ ein $H \in \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$ existiert, mit $H = \tau + (-\tau)$, folgt die Behauptung.

Satz 3.4.16
Für alle $\tau,\ \tau' \in \Sigma^{(r-1)}$ gelte $\tau + (-\tau) \neq \tau' + (-\tau')$, falls $\tau \neq \tau'$; und alle $\sigma,\ \sigma' \in \Sigma^{(r)}$ seien einander benachbart. Dann gilt:

$$\Pi_1 : \Sigma^{(r-1)} \longleftrightarrow T(S_K) \text{ bijektiv.}$$
$$\Pi : \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)}) \longleftrightarrow T(S_K) \text{ bijektiv.}$$

Beweis. Die Injektivität von Π_1 gilt nach Lemma 3.4.15 Teil 1. Nach Lemma 3.4.10 gilt:

$$\#\Pi_1(\Sigma^{(r-1)}) = \binom{K}{2}.$$

Für $T(S_K)$ gilt ebenfalls:

$$\#T(S_K) = \binom{K}{2}.$$

Es folgt die Behauptung für Π_1.
Für Π folgt sie mittels Lemma 3.4.15 Teil 3.

Bemerkung 3.4.17
Umgekehrt kann eine Transposition (k,l) nur dann in $\Pi_1(\Sigma^{(r-1)})$ sein, falls die r-dimensionalen Kegel σ_k und σ_l benachbart sind, und wenn für ihren Schnitt τ gilt: $\tau + (-\tau) \neq \tau' + (-\tau')$ für alle $\tau' \in \Sigma^{(r-1)},\ \tau \neq \tau'$.

Lemma 3.4.18
Sind alle $\sigma,\ \sigma' \in \Sigma^{(r)}$ einander benachbart und $f_\alpha \in MF_s(X_\Sigma)$ beliebig. Dann gilt:

$$\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_i}} \neq \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_k}} \text{ für alle } i,j \in \{1,...,K\},\ i \neq j.$$

Beweis. Nach Lemma 3.4.10 gilt: $K = r+1$.
Es existieren also genau $r+1$ kritische Punkte von f_α.
Nach Lemma 3.3.20 gilt:

$$\begin{aligned} & h_{2i} \geq 1 \text{ für alle } i = 0,...,r \\ \Rightarrow\quad & \{\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_i}};\ i = 1,...,K\} = \{0,2,...,2r\} \\ \Rightarrow\quad & \text{alle Indices sind paarweise verschieden.} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.4.19
Wiederum gelte $K = r+1$. Wählt man nun zwei beliebige Kegel $\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}' \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ und $\alpha,\ \beta$ aus dem Inneren von $\tilde{\sigma}$ und $\tilde{\sigma}'$. Dann gilt:

$$P(\tilde{\sigma}) = (\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_1}}(f_\alpha), ..., \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_K}}(f_\alpha)) =: (P_1(\tilde{\sigma}), ..., P_K(\tilde{\sigma})),$$

mit

$\{P_i(\tilde{\sigma});\ i = 1,...,K\} = \{0,...,r\}$.

Gleiches gilt für $P(\tilde{\sigma}')$. Also ist die Abbildung

$\Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') : \{1,...,K\} \longrightarrow \{1,...,K\}$ durch die Bedingung

$P_i(\tilde{\sigma}) = P_{\Pi_2(\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}')(i)}(\tilde{\sigma}')$ für alle $i = 1,...,K$

eindeutig bestimmt. $\Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$ ist eine bijektive Abbildung und somit ein Element aus S_K.

Definition 3.4.20
Sei Σ eine Fahne, so daß $K = r + 1$. Mit Π_2 sei die in Bemerkung 3.4.18 konstruierte Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \Pi_2 : & \tilde{\Sigma}^{(r)} \times \tilde{\Sigma}^{(r)} & \longrightarrow & S_K, \\ & (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') & \longmapsto & \Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \end{array}$$

bezeichnet.

Bemerkung 3.4.21
[1] Der Schnitt zweier benachbarter Kegel aus $\tilde{\Sigma}^{(r)}$ bestimmt eindeutig eine Hyperebene $H(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \in \mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$. Für die Abbildungen Π und Π_2 gilt:

$$\Pi(H(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')) = \Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'),$$

falls die Kegel $\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}'$ benachbart sind.

Die Abbildung Π_2 ist also eine Erweiterung der Abbildung Π, falls die Voraussetzung $K = r + 1$ gegeben ist.

[2] Eine Abschwächung der Definitionsbedingung $K = r+1$ bringt die Schwierigkeit mit sich, daß nicht mehr eindeutig feststeht, welche Indices gegeneinander ausgetauscht werden, wenn man von $\tilde{\sigma}$ zu $\tilde{\sigma}'$ übergeht, da dann einige Werte mehrfach als Index vorkommen. Die Hinzunahme der Vorzeichen in der lokalen Darstellung einer Morsefunktion wie in Gleichung 9 aus Satz 3.1.13 könnte eine Lösung sein, doch ist noch nicht sicher, ob nicht zwei kritische Punkte existieren können, die sich auch dadurch nicht unterscheiden lassen.

Satz 3.4.22
Sei $K = r + 1$. Für die Abbildung Π_2 gilt:

1. $\Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \circ \Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = id \in S_K$ für alle $\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}' \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$.
2. $\Pi_2(\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3) \circ \Pi_2(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) = \Pi_2(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_3)$ für alle $\tilde{\sigma}_i,\ i = 1, 2, 3;\ \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$.

Beweis.
Zu 1.:
Seien $\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}' \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ beliebig. Aus der Konstruktion der Abbildung Π_2 folgt die Behauptung, doch ist sie auch ein Spezialfall der 2.Aussage des Satzes, indem man $\tilde{\sigma}_1 := \tilde{\sigma}_3 := \tilde{\sigma}$ und $\tilde{\sigma}_2 := \tilde{\sigma}'$ setzt.

Es folgt dann:
$\Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \circ \Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \overset{2.}{=} \Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}) \overset{3.3.10}{=} id \in S_K$.

Zu 2.:
Seien nun $\tilde{\sigma}_i,\ i = 1, 2, 3,\ \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ beliebig gewählt, $\alpha \in \mathrm{int}(\tilde{\sigma}_1),\ \beta \in \mathrm{int}(\tilde{\sigma}_2)$ und $\gamma \in \mathrm{int}(\tilde{\sigma}_3)$. Sei $\pi_1 := \Pi_2(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ und $\pi_2 := \Pi_2(\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3)$.

Es gilt nach Definition von Π_2:

$\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{\pi_2(i)}}} f_\gamma = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_i}} f_\beta$

und

$\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{\pi_1(i)}}} f_\beta = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_i}} f_\alpha$ für alle $i = 1, ..., K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_{(\pi_2 \circ \pi_1)(i)}}} f_\gamma &= \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_i}} f_\alpha \text{ für alle } i = 1, ..., K \\ \overset{3.4.19}{\Longrightarrow} \quad \Pi_2(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_3) &= \pi_2 \circ \pi_1. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung 3.4.23
Sei $K = r+1$, $\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}' \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ und $\alpha \in \mathrm{int}(\tilde{\sigma})$, $\beta \in \mathrm{int}(\tilde{\sigma}')$ beliebig. Sei

$c : [0,1] \longrightarrow N_{\mathbf{R}} \setminus \tilde{\Sigma}^{(r-2)}$

eine Kurve mit $c(0) = \alpha$, $c(1) = \beta$ und $\#\{c([0,1]) \cap N(\Sigma)\} < \infty$.

Eine solche Kurve gibt es, da $\#\tilde{\Sigma}^{(r-1)}$ endlich ist, und für benachbarte Kegel $\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}'$ immer ein Weg mit $\#\{c([0,1]) \cap N(\Sigma)\} = 1$ existiert.

Seien $H_1, ..., H_l$ die Hyperebenen aus $\mathcal{A}(\Sigma^{(r-1)})$, die von c geschnitten werden.

Aus Satz 3.4.22 und Bemerkung 3.4.21 folgt:

$$\Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') = \Pi(H_l) \circ \cdots \circ \Pi(H_1).$$

Das dem Paar $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$ mittels Π_2 zugeordnete Element aus S_K läßt sich also aus den einzelnen Bijektionen aufbauen, die dem jeweiligen "Durchstoßen" einer Hyperebene zugeordnet werden, wenn man einen zulässigen Weg von $\tilde{\sigma}$ nach $\tilde{\sigma}'$ wählt. Dieses Aufbauen von $\Pi(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$ ist hierbei unabhängig von der Wahl des Weges, denn für alle nach den obigen Bedingungen zulässigen Wege ergibt sich das eindeutig bestimmte Element $\Pi(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}') \in S_K$.

Bemerkung 3.4.24
Die letzte Bemerkung bringt einen Ansatz, um die Definitionsbedingung $K = r+1$ für die Funktion Π_2 abzuschwächen. Denn könnte man zeigen, daß die Bildung eines Elementes $\Pi_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}')$ über die geschnittenen Hyperebenen unabhängig vom gewählten Weg c ist, ohne die Existenz dieser Abbildung schon vorauszusetzen, dann könnte man die Abbildung Π_2 auch für Fahnen Σ beliebiger Anzahl r-dimensionaler Kegel definieren.

Satz 3.4.25
Sei $K = r+1$ und $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ beliebig gewählt, dann ist $\Pi_2 \mid_{\{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(r)}}$ injektiv.

Beweis. Seien $\tilde{\sigma}_2,\ \tilde{\sigma}_1 \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$, so daß

$$\begin{aligned} & \Pi_2(\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}_1) = \Pi_2(\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}_2) \\ \overset{3.4.22}{\Longrightarrow} \pi := \quad & \Pi(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2) = id \in S_K. \end{aligned}$$

Seien nun $f_\alpha,\ f_\beta \in MF_s(X_\Sigma),\ \alpha \in \tilde{\sigma}_1,\ \beta \in \tilde{\sigma}_2$.
Da $\pi = id$ gilt nach Bemerkung 3.4.19:

$P(\tilde{\sigma}_1) = P(\tilde{\sigma}_2)$.

Nach Lemma 3.4.18 kann man ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_i}} f_\alpha = 2i = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_i}} f_\beta,\ i = 0, ..., r$.
Die (r-1)-dimensionalen Kegel in Σ seien wie folgt durchnummeriert:

$$\tau_{ij} := \sigma_i \cap \sigma_j,\ i,j = 0, ..., r,\ i < j.$$

Wegen $\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_0}} f_\alpha = 0 = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_0}} f_\beta$ folgt:

$$\alpha,\ \beta \in H^+(\tau_{0j}) \text{ für alle } j = 1, ..., r.$$

Dann folgt wegen $\mathrm{Ind}_{x_{\sigma_1}} f_\alpha = 2 = \mathrm{Ind}_{x_{\sigma_1}} f_\beta$:

$$\alpha,\ \beta \in H^+(\tau_{1j}) \text{ für alle } j = 2, ..., r.$$

Nach insgesamt r Schritten folgt:

$$\alpha,\ \beta \in H^+(\tau_{ij}) \text{ für alle } i,j = 1, ..., r,\ i < j.$$

Also sind die Lagen von α und β bezüglich aller Halbebenen gleich und es folgt aufgrund der Definition der symmetrisierten Fahne $\tilde{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} & \alpha \in \tilde{\sigma}_2,\ \beta \in \tilde{\sigma}_1 \\ \Rightarrow \quad & \tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2. \end{aligned}$$

Damit ist die Injektivität von $\Pi_2 \mid_{\{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(r)}}$ gezeigt.

Folgerung 3.4.26
Seien $K = r + 1$ und $f_\alpha,\ f_\beta \in MF_s(X_\Sigma)$. Dann gilt:

$$f_\alpha \sim f_\beta \Leftrightarrow f_\alpha \sim_s f_\beta.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 3.4.25 folgt, daß ein $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}^{(r)}$ existiert, mit $\alpha,\ \beta \in \tilde{\sigma}$, wenn die Funktionen f_α und f_β in allen kritischen Punkten dieselben Indices haben. Das heißt:

$$f_\alpha \sim f_\beta \Rightarrow f_\alpha \sim_s f_\beta.$$

Die Umkehrung gilt nach Definition.

Beispiel 3.4.27 (Vergleiche Beispiel 3.2.10)
Die Fahnenzerlegung des $\mathbf{R}^3 \cong N_{\mathbf{R}}$, die als Torusvarietät den komplexen projektiven Raum $\mathbf{P_3C}$ definiert, enthält vier dreidimensionale Kegel, also genau einen mehr als $r = \dim N$. Die Bedingung $K = r + 1$ ist also erfüllt.

Außerdem sind alle Hyperebenen der Form $\tau + (-\tau)$, $\tau \in \Sigma^{(2)}$ paarweise verschieden. Nach Satz 3.4.16 ist die Abbildung

$$\Pi_1 : \Sigma^{(2)} \longrightarrow T(S_4)$$

eine Bijektion. Dies steht im Einklang mit

$$\#\mathcal{A}(\sigma^{(2)}) = 6 = \#T(S_4).$$

Wählt man nun einen beliebigen dreidimensionalen Kegel $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$, dann ist nach Satz 3.4.25

$$\Pi_2 \mid_{\{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(3)}} : \{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(3)} \longrightarrow S_4$$

eine injektive Abbildung.

Da $\#S_4 = 4! = 24$ und es nach Beispiel 3.2.10 in $\tilde{\Sigma}$ 24 dreidimensionale Kegel gibt, folgt sogar:

$$\Pi_2 \mid_{\{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(3)}} \text{ bijektiv.}$$

Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$S_K = \Pi_2 \mid_{\{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(3)}} (\tilde{\Sigma}^{(r)}) = \langle \Pi_1(\Sigma^{(2)}) \rangle_{Gruppe} = \langle T(S_K) \rangle_{Gruppe}. \tag{25}$$

Folgerung 3.4.28
Sei Σ die den $\mathbf{P_3C}$ definierende Fahne. Dann ist $(\tilde{\Sigma}^{(3)})$ eine Gruppe.

Beweis. Seien die 24 Kegel $\tilde{\sigma}_i$, $i = 1, ..., 24$ aus $\tilde{\Sigma}^{(3)}$ fest durchnummeriert. Dann ist die Abbildung

$$\Pi_{2i} : \tilde{\Sigma}^{(3)} \longrightarrow S_K, \ \tilde{\sigma} \longmapsto \Pi_2(\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma})$$

eine Bijektion für alle $i = 1, ..., 24$. Für festes $i \in \{1, ..., 24\}$ definiert man

$$\tilde{\sigma}_k *_i \tilde{\sigma}_l := \Pi_{2i}^{-1}(\Pi_{2i}(\tilde{\sigma}_k) \circ \Pi_{2i}(\tilde{\sigma}_l)) \text{ für alle } k, l = 1, ..., 24.$$

Dann ist $(\tilde{\Sigma}^{(3)}, *_i)$ auf natürliche Weise eine Gruppe.

Da $\tilde{\sigma}_i$ das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung '$*_i$' ist, sind alle Gruppenstrukturen verschieden, allerdings mittels der Gruppenisomorphismen

$$G_{ij} : (\tilde{\Sigma}^{(3)}, *_i) \longrightarrow (\tilde{\Sigma}^{(3)}, *_j),$$
$$\tilde{\sigma} \longmapsto \Pi_{2j}^{-1} \circ \Pi_{2i}(\tilde{\sigma}), \ i, j = 1, ..., 24 \text{ isomorph zueinander.}$$

Bemerkung 3.4.29
Die Symmetrisierung der Fahne Σ, die den Raum $\mathbf{P_2C}$ erzeugt, kann man auf analoge Weise ebenfalls zu einer Gruppe machen, denn es gilt:

1. $K = 3 = 2 + 1 = r + 1$.
2. $\#\tilde{\Sigma}^{(2)} = 6$.

Abbildung 3.4 zeigt das Netz $N(\Sigma)$ der in Beispiel 2.1.21 vorgestellten Fahne Σ des $\mathbf{P_2C}$, mit den ebenfalls dort eingeführten Bezeichnungen.

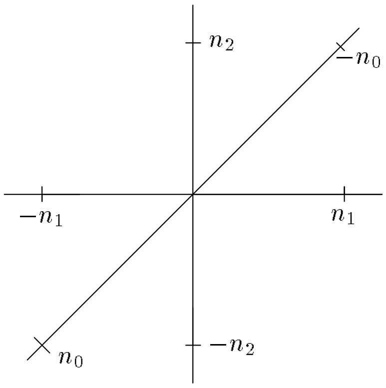


Abbildung 3.4

Bemerkung 3.4.30
Um die Beziehung aus Gleichung 25 zu beweisen, mußte man die Information über die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $N_{\mathbf{R}} \setminus N(\Sigma)$ verwenden. Mit einem allgemeinen Beweis von

$$\Pi_2 \mid_{\{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(r)}} (\tilde{\Sigma}^{(r)}) = \langle \Pi_1(\Sigma^{(r-1)}) \rangle_{Gruppe} \tag{26}$$

könnte man aufgrund der Injektivität der Abbildung $\Pi_2 \mid_{\{\tilde{\sigma}\} \times \tilde{\Sigma}^{(3)}}$ diese Anzahl berechnen, falls die Bedingung $K = r + 1$ erfüllt ist.

Beispiel 3.4.31
Sei $\{n_1, n_2\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von $N \cong \mathbf{Z}^2$. $\Sigma^{(2)}$ bestehe aus den vier Kegeln

$$\sigma_1 := \langle n_1, n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, \qquad \sigma_2 := \langle n_1, -n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},$$
$$\sigma_3 := \langle -n_1, -n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, \quad \sigma_4 := \langle -n_1, n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}.$$

Für die so definierte Fahne gilt:

$X_\Sigma(\mathbf{R}) = T_1$ (der reelle Torus).

Abbildung 3.5 zeigt das zugehörige Netz $N(\Sigma)$.

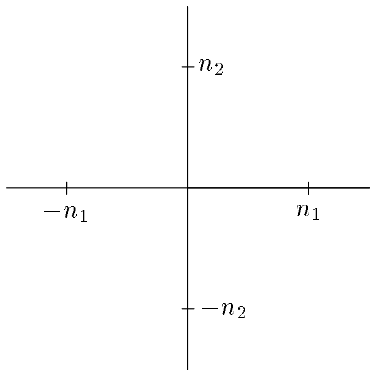


Abbildung 3.5

Es gilt:

$\tilde{\Sigma} = \Sigma.$

Die Bedingung $K = r + 1$ ist bei diesem Beispiel verletzt, denn es existieren vier zweidimensionale Kegel. Trotzdem läßt sich die Abbildung Π_2 auch hier über entsprechende Wege analog zu Bemerkung 3.4.24 definieren, da sich jeweils eine Wegunabhängigkeit ergibt. Es folgt:

$\Pi_2(\sigma_1, \sigma_2) = \Pi_2(\sigma_2, \sigma_1) = \Pi_2(\sigma_3, \sigma_4) = \Pi_2(\sigma_4, \sigma_3) = (1,2) \circ (3,4),$

$\Pi_2(\sigma_1, \sigma_4) = \Pi_2(\sigma_4, \sigma_1) = \Pi_2(\sigma_2, \sigma_3) = \Pi_2(\sigma_3, \sigma_2) = (1,4) \circ (2,3),$

$\Pi_2(\sigma_1, \sigma_3) = \Pi_2(\sigma_3, \sigma_1) = \Pi_2(\sigma_2, \sigma_4) = \Pi_2(\sigma_4, \sigma_2) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix},$

$\Pi_2(\sigma_i, \sigma_i) = id$ für $i = 1, 2, 3, 4.$

Wählt man zum Beispiel den Kegel σ_1 aus, so gilt:

$\Pi_2 \mid_{\{\sigma_1\} \times \tilde{\Sigma}^{(2)}} (\sigma_1) = id,$

$\Pi_2 \mid_{\{\sigma_1\} \times \tilde{\Sigma}^{(2)}} (\sigma_2) = (1,2) \circ (3,4),$

$\Pi_2 \mid_{\{\sigma_1\} \times \tilde{\Sigma}^{(2)}} (\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix},$

$\Pi_2 \mid_{\{\sigma_1\} \times \tilde{\Sigma}^{(2)}} (\sigma_4) = (1,4) \circ (2,3).$

Sei $\tau_i := \mathbf{R} \cdot n_i,\ i = 1, 2$ und $\tau_{i+2} := \mathbf{R} \cdot -n_i,\ i = 1, 2.$

Für die Abbildung Π_1 errechnet man:

$\Pi_1(\tau_1) = \Pi_1(\tau_3) = (1,2) \circ (3,4),$

$\Pi_1(\tau_2) = \Pi_1(\tau_4) = (1,4) \circ (2,3).$

Es folgt:

$$\langle \Pi_1(\Sigma^{(1)}) \rangle_{Gruppe} = \Pi_2 \mid_{\{\sigma_1\} \times \tilde{\Sigma}^{(2)}} (\tilde{\Sigma}^{(2)}).$$

Auch für dieses Beispiel gilt die in Bemerkung 3.4.30 vermutete Gleichung 26.

4 Morsefunktionen auf kompakten Torusvarietäten

Projektivität einer Torusvarietät X_Σ erwies sich im Abschnitt 2.3 als äquivalent mit der Existenz einer strikt konvexen Stützfunktion aus $SF(N,\Sigma)$. Diese Funktion definierte wiederum einen konvexen und kompakten Polyeder Δ_h, dessen grundlegende Eigenschaften im Abschnitt 3.1 benutzt wurden, um Morsefunktionen auf X_Σ zu definieren.

Setzt man lediglich die Kompaktheit und Nichtsingularität von X_Σ voraus, treten erhebliche Schwierigkeiten auf, dieses Verfahren zu verallgemeinern.

4.1 Beispiele und Bemerkungen

Bemerkung 4.1.1
Für eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit X liegt nach Satz 1.1.24 MF(X) dicht in $\varepsilon(X)$. Auf einer kompakten nichtsingulären Torusvarietät X_Σ existieren somit unendlich viele Morsefunktionen. Für die Existenz einer MF ist die Projektivität unerheblich.

Beispiel 4.1.2
Sei $\{n_1, n_2, n_3\}$ eine Basis des $\mathbf{Z}$-Moduls $N \cong \mathbf{Z}^3$. Ferner seien

$$n_0 := -n_1 - n_2 - n_3 \text{ und } n'_i := n_0 + n_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Sei Σ_O die Fahne , die von den dreidimensionalen Kegeln

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 := \langle n_1, n_2, n_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, && \sigma_2 := \langle n_1, n_2, n'_1\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
&\sigma_3 := \langle n'_2, n_2, n_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, && \sigma_4 := \langle n_1, n'_3, n_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
&\sigma_5 := \langle n_1, n'_1, n'_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, && \sigma_6 := \langle n_2, n'_2, n'_1\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
&\sigma_7 := \langle n_3, n'_3, n'_2\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, && \sigma_8 := \langle n_0, n'_1, n'_2\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
&\sigma_9 := \langle n_0, n'_1, n_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, && \sigma_{10} := \langle n_0, n'_2, n'_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}.
\end{aligned}$$

erzeugt wird. Abbildung 4.1 zeigt diese Zerlegung in der im Beispiel 3.2.10 eingeführten Darstellungsart.

Die Fahne Σ_O ist komplett, und die hier angegebenen Erzeugendensysteme der dreidimensionalen Kegel sind jeweils Basen von N. Nach den Sätzen 2.2.12 und 2.2.15 ist $X_{\Sigma_O} =: X_O$ eine kompakte nichtsinguläre Torusvarietät.

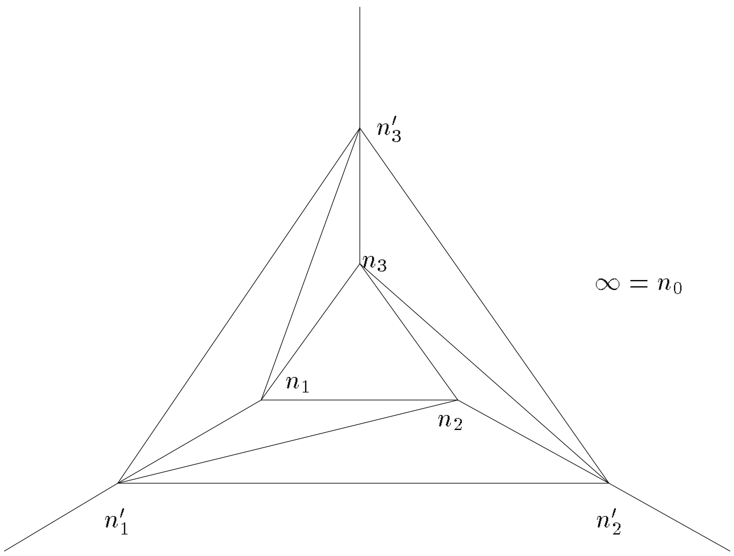


Abbildung 4.1

Behauptung: X_O ist nicht projektiv.

Beweis.
<u>*Annahme*:</u> Es existiert ein $h \in SF(N, \Sigma)$ strikt konvex.
Da n_1', n_2, $n_1' + n_2$ alle zu σ_2 gehören folgt:
$h(n_1' + n_2) = h(n_1') + h(n_2)$.
Da $n_1 \in \sigma_2$ und $n_2' \in \sigma_3 \setminus \sigma_2$ folgt:
$h(n_1 + n_2') > h(n_1) + h(n_2')$.
Da aber $n_1 + n_2' = n_1' + n_2$ folgt aus dieser Ungleichung:
$h(n_1') + h(n_2) > h(n_2') + h(n_1)$.
Völlig analog läßt sich zeigen, daß
$h(n_2') + h(n_3) > h(n_3') + h(n_2)$,
$h(n_3') + h(n_1) > h(n_1') + h(n_3)$.
Addiert man nun alle drei Ungleichungen folgt der Widerspruch:

$$\sum_{i=1}^{3}(h(n_i) + h(n_i')) > \sum_{i=1}^{3}(h(n_i) + h(n_i')).$$

Also kann ein solches $h \in SF(N, \Sigma)$ nicht exisieren und X_O ist nicht projektiv.

Dieses Beispiel hat den Vorteil, daß man sehr einfach die Nichtprojektivität von X_O nachweisen kann.

Aus einem anderem Grund wird noch eine weitere kompakte, aber nichtprojektive Torusvarietät vorgestellt. Denn mit diesem Beispiel läßt sich zeigen, daß eine Ausdehnung von Satz 3.1.13 auf kompakte Torusvarietäten nicht ohne Abschwächung der Aussagen möglich ist. Zunächst noch einige Vorbereitungen:

Bemerkung 4.1.3
Sei Σ eine Fahne in N und $n \in N$ beliebig. Dann operiert die Ein-Parameter-Untergruppe Γ_n mittels

$$\begin{array}{rccc} F: & X_\Sigma \times \dot{\mathbf{C}} & \longrightarrow & X_\Sigma, \\ & (x, \lambda) & \longmapsto & \gamma_n(\lambda) \cdot x \end{array}$$

auf X_Σ.

Beweis. Da $\Gamma_n \subset T_N$ eine Untergruppe ist, folgt aus Bemerkung 2.2.3 die Behauptung.

Definition 4.1.4
Sei Σ eine Fahne in N, $n \in N$ und $x_1, ..., x_s \in X_\Sigma$, so daß alle diese Punkte keine Fixpunkte der Γ_n-Operation sind.

$x_1, ..., x_s, x_{s+1} = x_1$ bilden einen <u>*Orbitzyklus*</u> bezüglich der Operation Γ_n, falls

$$\lim_{\lambda \to 0} \gamma_n(\lambda) \cdot x_{i+1} = \lim_{\lambda \to \infty} \gamma_n(\lambda) \cdot x_i \text{ für alle } i = 1, ..., s.$$

Lemma 4.1.5
Sei X_Σ eine kompakte nichtsinguläre Torusvarietät und $n \in N$, $n \notin N(\Sigma)$.
Bilden $x_1, ..., x_{s+1} \in X_\Sigma$ einen Orbitzyklus bezüglich der Operation von Γ_n, dann ist X_Σ nicht projektiv.

Beweis.
<u>*Annahme :*</u> X_Σ ist projektiv.

Dann ist $f_n \in MF_s(X_\Sigma)$ und nach Satz 3.1.13 entlang den $\mathbf{R}_{>0}$-Orbits streng monoton steigend.

Aus der Stetigkeit von f_n folgt nun:

$$f_n(x_{i+1}) > f_n(x_i) \text{ für alle } i = 1, ..., s,$$

also insbesondere der Widerspruch

$$f_n(x_{s+1}) > f_n(x_1).$$

Lemma 4.1.6
Sei Σ eine Fahne in N, $\dim N = r$ und $n \in N$. Falls eine Folge r-dimensionaler Kegel $\sigma_1, ..., \sigma_{s+1} = \sigma_1$, alle aus Σ, existiert, so daß

1. $\sigma_i \neq \sigma_j$ falls $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., s\}$,
2. $\dim \sigma_i \cap \sigma_{i+1} = r - 1$ für alle $i = 1, ..., s$,
3. $n \notin \sigma_i \cap \sigma_{i+1} + (-\sigma_i \cap \sigma_{i+1})$ für alle $i = 1, ..., s$,
4. σ_{i+1} liegt über $\sigma_i \cap \sigma_{i+1} + (-\sigma_i \cap \sigma_{i+1})$ bezüglich der Richtung n für alle $i = 1, ..., s$,

dann existiert ein Orbitzyklus bezüglich der Γ_n-Operation in X_Σ.

Beweis. Die Behauptung ist eine direkte Folgerung aus [Jurk, Lemma 1.5.1.]

Beispiel 4.1.7
Sei $\{n_1, n_2, n_3\}$ eine Basis des $\mathbf{Z}$-Moduls $N \cong \mathbf{Z}^3$. Ferner seien
$\tilde{n}_1 := -2n_2 - n_3, \quad \tilde{n}_2 := -2n_3 - n_1,$
$\tilde{n}_3 := -2n_1 - n_2.$
Die Fahne Σ_{J_s} sei die durch die dreidimensionalen Kegel $\sigma_1, ..., \sigma_8$ erzeugte Fahne. Diese Kegel wiederum seien über die folgende Abbildung 4.2 definiert. Es wird dieselbe Darstellungsweise wie in Beispiel 4.1.2 verwendet. Zu beachten ist diesmal, daß der Punkt ∞ ein Punkt im Inneren des von
$\sigma_1 := \langle n_1, n_2, n_3 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}$
bestimmten Dreiecks auf der Kugeloberfläche ist.

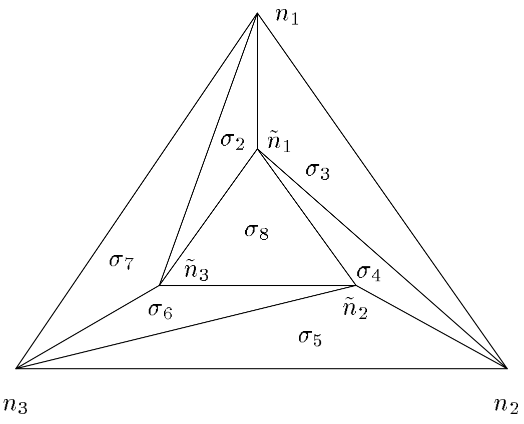


Abbildung 4.2

Für den singulären Kegel σ_8 existiert eine Unterteilung in 15 dreidimensionale reguläre Kegel, die detailliert in [Jurk] angegeben ist. Ersetzt man σ_8 durch diese 15 Kegel, entsteht die reguläre Fahne Σ_J.

Die Fahne Σ_{Js} ist komplett, also ist die Torusvarietät $X_{\Sigma_J} := X_J$ nichtsingulär und kompakt.

Behauptung: X_J ist nicht projektiv.

Beweis. Sei $n := 3n_1 + 4n_2 + 5n_3$.

$\Rightarrow n \notin N(\Sigma_J)$

(Dies nachzurechnen ist wegen der hohen Zahl dreidimensionaler Kegel, die zur regulären Fahne Σ_J gehören, sehr aufwendig. Wäre aber diese Bedingung nicht erfüllt, könnte man einfach zu einem n' übergehen, welches mit n einen genügend kleinen Winkel bildet, so daß die später berechneten Werte $(w_i \mid n')$ negativ bleiben.)

Nach Lemma 4.1.5 und Lemma 4.1.6 reicht es zu zeigen:

Die Kegel $\sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \sigma_5,\ \sigma_6,\ \sigma_7,\ \sigma_2$ bilden eine Folge von Kegeln in Σ_J, die die Bedingungen aus Lemma 4.1.6 bezüglich n erfüllt.

Beweis. Es gilt $\dim N = 3$ und alle genannten Kegel sind dreidimensional. Sei $\{m_1, m_2, m_3\}$ die zu $\{n_1, n_2, n_3\}$ duale Basis von M. Es gilt:

1. Alle genannten Kegel sind - bis auf Anfangs- und Endkegel der Folge - paarweise verschieden.

2. Alle aufeinanderfolgenden Kegel sind einander benachbart, also ist die 2.Bedingung erfüllt.

3. und 4. Für die durch die Schnitte definierten Hyperebenen gilt:

   $H(\sigma_2 \cap \sigma_3) = \{w_2\}^\perp,\ w_2 = -m_3,$

   $H(\sigma_3 \cap \sigma_4) = \{w_3\}^\perp,\ w_3 = m_1 - 2m_2,$

   $H(\sigma_4 \cap \sigma_5) = \{w_4\}^\perp,\ w_4 = -m_2,$

   $H(\sigma_5 \cap \sigma_6) = \{w_5\}^\perp,\ w_5 = m_3 - 2m_1,$

   $H(\sigma_6 \cap \sigma_7) = \{w_6\}^\perp,\ w_6 = -m_1,$

   $H(\sigma_7 \cap \sigma_2) = \{w_7\}^\perp,\ w_7 = m_2 - 2m_3$

   und

   $w_i \in \phi_{\sigma_i},\ i = 2, ..., 7.$

   Es folgt
   $$\begin{array}{lll} (w_2 \mid n) = -5, & (w_3 \mid n) = -2, & (w_4 \mid n) = -4, \\ (w_5 \mid n) = -1, & (w_6 \mid n) = -3, & (w_7 \mid n) = -2. \end{array}$$

   Also sind die 3. und 4.Bedingung aus Lemma 4.1.6 erfüllt.

Bemerkung 4.1.8
Aus dem Beweis von Lemma 4.1.5 folgt nicht nur, daß f_n, n wie im letzten Beispiel keine MF ist, sondern auch, daß es auf X_J keine MF geben kann, die entlang $\mathbf{R}_{>0}$- Orbits streng monoton wächst. Das Konstruktionsverfahren aus Satz 3.1.13 muß also wesentlich verändert werden, um auf X_J angewendet werden zu können.

Ein Konstruktionsverfahren für Morsefunktionen auf kompakten Torusvarietäten hat über diese hinaus Bedeutung. Das wird im Folgenden verdeutlicht:

Bemerkung 4.1.9
In [Oda, Proposition 1.12.] wird ein Verfahren angegeben, um eine Fahne Σ in $N \cong \mathbf{Z}^r$, die von nur einem r-dimensionalen Kegel σ erzeugt wird, zu einer kompletten Fahne Σ^c zu ergänzen. Somit erhält man mittels Satz 2.2.10 auf natürliche Weise eine T_N-äquivariante Kompaktifizierung X_{Σ^c} von X_Σ. Da X_Σ der in X_{Σ^c} offenen Menge X_σ entspricht, ist X_Σ ein offener Teil von X_{Σ^c}.

Weiterhin hat dieses Komplettierungsverfahren die Eigenschaft, daß Σ^c regulär ist, falls σ regulär ist. Dies bedeutet für die Morsetheorie:

kennt man eine MF f auf X_{Σ^c}, so liegt mit der Einschränkung von f auf X_Σ eine MF auf X_Σ vor.

Dies ist für den Fall $X_\Sigma = X_\sigma$ nicht sehr interessant, denn dann gilt nach Lemma 2.1.11 $X_\sigma \cong \mathbf{C}^r$. Es gibt jedoch eine Möglichkeit, dieses Verfahren zu verallgemeinern:

Lemma 4.1.10
Sei Σ eine endliche Fahne in N und $\hat{\sigma}$ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel mit den Eigenschaften:

1. $|\Sigma| = \hat{\sigma}$.
2. $St(\hat{\sigma})^{(r-1)} \subset \Sigma^{(r-1)}$.

Ferner sei $\hat{\Sigma}^c$ die Komplettierung der von $\hat{\sigma}$ erzeugten Fahne $\hat{\Sigma}$ nach dem Verfahren aus [Oda, Proposition 1.12.]. Dann gilt:

$$\Sigma^c := (\hat{\Sigma}^c \setminus \{\hat{\sigma}\}) \cup \Sigma \text{ ist eine komplette Fahne.}$$

Beweis. Alle Elemente von Σ^c sind streng konvexe rationale polyedrische Kegel in $N_{\mathbf{R}}$. Da $|\Sigma^c| = N_{\mathbf{R}}$ gilt, bleiben lediglich die beiden Fahneneigenschaften aus Definition 2.1.5 zu zeigen.

(i) Sei $\sigma \in \Sigma^c$ beliebig.

a) Ist $\sigma \in \Sigma$, dann sind alle Seiten von σ in $\Sigma^c \supset \Sigma$ enthalten.

b) Ist $\sigma \in (\hat{\Sigma}^c \setminus \{\hat{\sigma}\})$ und τ Seite von σ

$\Rightarrow \dim \tau < r$

$\Rightarrow \tau \neq \hat{\sigma}$

$\Rightarrow \tau \in (\hat{\Sigma}^c \setminus \{\hat{\sigma}\}) \subset \Sigma^c$.

Aus a) und b) folgt, daß alle Seiten von σ wieder in Σ^c liegen. Also ist die erste Fahneneigenschaft bewiesen.

(ii) Seien $\sigma,\ \sigma' \in \Sigma^c$ beliebig und $\tau := \sigma \cap \sigma'$.

a) $\sigma,\ \sigma' \in \Sigma$

$\Rightarrow \tau \in \Sigma$, da Σ eine Fahne ist.

b) $\sigma,\ \sigma' \in \hat{\Sigma}^c \setminus \{\hat{\sigma}\}$

$\Rightarrow \tau \in \hat{\Sigma}^c$, da $\hat{\Sigma}^c$ Fahne

$\Rightarrow \tau \in (\hat{\Sigma}^c \setminus \{\hat{\sigma}\}) \subset \Sigma^c$, da $\dim \tau < r$.

c) $\sigma \in \Sigma,\ \sigma' \in (\hat{\Sigma}^c \setminus \{\hat{\sigma}\})$.

Da $St(\hat{\sigma})^{(r-1)} \subset \Sigma^{(r-1)}$ gilt:

$$\{\tau \in \hat{\Sigma}^c;\ \dim \tau < r,\ \tau \textit{ Seite von } \hat{\sigma}\} \subset \Sigma. \tag{27}$$

Da $|\Sigma| = \hat{\sigma}$ ist σ eine Teilmenge von $\hat{\sigma}$, und es gilt:

$\sigma \cap \sigma' = \sigma \cap (\underbrace{\hat{\sigma} \cap \sigma'}_{=:\rho})$.

Da $\sigma',\ \hat{\sigma}$ beide in $\hat{\Sigma}^c$ liegen, ist ρ eine Seite von $\hat{\sigma}$ mit Dimension kleiner als r

$\overset{27}{\Longrightarrow} \rho \in \Sigma$

$\Rightarrow \tau = \sigma \cap \sigma' = \sigma \cap \rho \in \Sigma$.

Aus a), b) und c) folgt, daß τ wieder in Σ^c liegt. Damit ist auch die zweite Fahneneigenschaft bewiesen.

Folgerung 4.1.11
Sei Σ eine komplette Fahne, zu der ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel $\hat{\sigma}$ existiert, so daß die Voraussetzungen aus Lemma 4.1.10 erfüllt sind. Dann ist X_Σ offene Teilmenge einer kompakten Torusvarietät.

Beweis. Sei Σ^c die Komplettierung von Σ nach Lemma 4.1.10

$\Rightarrow X_\sigma \subset X_{\Sigma^c}$ offen für alle $\sigma \in \Sigma^{(r)}$

$\Rightarrow X_\Sigma = \bigcup\limits_{\sigma \in \Sigma^{(r)}} X_\sigma \subset X_{\Sigma^c}$ offen.

Beispiel 4.1.12
In Beispiel 2.1.22 wurde die den Raum $\widetilde{\mathbf{C}}^r$ definierende Fahne Σ angegeben. Es gilt in den dort eingeführten Bezeichnungen:

$$\bigcup_{i=1}^{r} \sigma_i = \langle n_1, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}} =: \hat{\sigma}.$$

Nun kann man das Verfahren nach Lemma 4.1.10 anwenden, doch bietet sich in diesem Beispiel eine anderer Komplettierung von Σ an. Sei

$$\hat{\sigma}_i := \langle n_1, ..., n_{i-1}, -n_0, n_{i+1}, ..., n_r \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, \ i = 1, ..., r.$$

Dann entsprechen die Kegel $\hat{\sigma}_i$ gerade den Kegeln σ_i aus der in Beispiel 2.1.21 angegebenen Fahne, die $\mathbf{P_r C}$ definiert.

Es folgt für die durch die Kegel $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}_1, ..., \hat{\sigma}_r$ definierte Fahne $\hat{\Sigma}^c$:

$$X_{\hat{\Sigma}^c} = \mathbf{P_r C}.$$

Also ist $\hat{\Sigma}^c$ komplett.

Ersetzt man nun den Kegel $\hat{\sigma}$ durch die Kegel $\sigma_1, ..., \sigma_r$ ergibt sich wieder eine komplette reguläre Fahne Σ^c. Abbildung 4.3 zeigt die entstehende Fahne für $r = 3$.

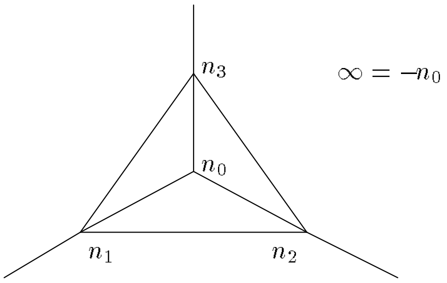


Abbildung 4.3

Behauptung: Die Torusvarietät X_{Σ^c} ist projektiv.

Beweis. Sei $\{m_1, ..., m_r\}$ die zu $\{n_1, ..., n_r\}$ duale Basis von M und für $i = 1, ..., r: \ m_{\sigma_i} := m_i, \quad m_{\hat{\sigma}_i} := 2m_i$.

Definiere:

$$\begin{array}{rccl} h: & N_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{R}, \\ & y & \longmapsto & \begin{cases} (m_{\sigma_i} \mid y) & \text{falls } y \in \sigma_i, \\ (m_{\hat{\sigma}_i} \mid y) & \text{falls } y \in \hat{\sigma}_i \end{cases} \end{array}$$

Behauptung: $h \in SF(N, \Sigma^c)$.
Sei $y \in |\Sigma^c|$ beliebig.
1. Fall: $y \in \sigma_i,\ i \in \{1, ..., r\}$. Ohne Einschränkung $i = 1$.
Seien $\sigma_j,\ \hat{\sigma}_k$ zwei Kegel, die y nicht enthalten, $k,\ j \neq 1$

$$\Rightarrow y = a_1 n_0 + \sum_{i=2}^{r} a_i n_i,\ a_j, a_k > 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{lcrcr} (m_{\sigma_j} \mid y) & = & a_1 & + & a_j \\ (m_{\hat{\sigma}_k} \mid y) & = & 2a_1 & + & 2a_k \\ (m_{\hat{\sigma}_1} \mid y) & = & 2a_1 & & \end{array}\right\} > a_1 = (m_{\sigma_1} \mid y), \text{ da } a_j,\ a_k > 0.$$

2. Fall: $y \in \hat{\sigma}_i,\ i \in \{1, ..., r\}$. Ohne Einschränkung $i = 1$.
Seien $\sigma_j,\ \hat{\sigma}_k$ zwei Kegel, die y nicht enthalten, $k,\ j \neq 1$

$$\Rightarrow y = a_1(-n_0) + \sum_{i=2}^{r} a_i n_i,\ a_j, a_k > 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{lcrcr} (m_{\hat{\sigma}_k} \mid y) & = & -2a_1 & + & 2a_k \\ (m_{\sigma_j} \mid y) & = & -a_1 & + & a_j \\ (m_{\sigma_1} \mid y) & = & -a_1 & & \end{array}\right\} > -2a_1 = (m_{\sigma_1'} \mid y), \text{ da } a_k,\ a_j > 0.$$

Aus der Fallunterscheidung folgt mit Satz 2.3.7, daß h strikt konvex ist.
Also ist nach Satz 2.3.8 X_{Σ^c} projektiv.

Nun kann man mit Satz 3.1.13 Morsefunktionen auf X_Σ angeben, deren Einschränkungen auf den offenen Teil $\widetilde{\mathbf{C}}^r$ ebenfalls Morsefunktionen sind.
Es gilt:

$M \cap \Delta_h = \{m_i, 2m_i, m_i + m_j;\ 1 \leq i, j \leq r\}$.

Mit $\alpha := n_1 + 3n_2 + \cdots + (2r-1)n_r$ folgt:

$$f_\alpha\,|_{X_\Sigma} : X_\Sigma \longrightarrow \mathbf{R}$$

ist eine Morsefunktion.

4.2 Zyklen und ähnliche Torusvarietäten

In Bemerkung 2.3.12 wurde erklärt, wie bis auf einen Faktor $L \in \mathbf{N}$ der Polyeder Δ_h zu einer strikt konvexen Funktion $h \in SF(N, \Sigma)$ gebildet werden kann, ohne diese explizit zu kennen. Dies wird nun zunächst dazu benutzt, um an einem Beispiel zu klären, wieso zu einer nichtprojektiven Torusvarietät kein Polyeder konstruiert werden kann:

Beispiel 4.2.1
Sei Σ_{Js} die in Beispiel 4.1.7 eingeführte Fahne. Die dualen Kegel ergeben sich in den dortigen Bezeichnungen zu:

$$\begin{aligned}
\check{\sigma}_1 &= \langle m_1, m_2, m_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
\check{\sigma}_2 &= \langle m_1 - 2m_2 + 4m_3, -m_2 + 2m_3, -m_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
\check{\sigma}_3 &= \langle -m_2, m_3, -2m_2 + m_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
\check{\sigma}_4 &= \langle -m_2, -2m_1 + 4m_2 + m_3, -m_1 + 2m_2\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
\check{\sigma}_5 &= \langle -m_1, m_2, -2m_1 + m_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
\check{\sigma}_6 &= \langle -m_1, 4m_1 + m_2 - 2m_3, 2m_1 - m_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
\check{\sigma}_7 &= \langle m_1, -m_3, m_2 - 2m_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},\\
\check{\sigma}_8 &= \langle -m_1 + 2m_2 - 4m_3, -4m_1 - m_2 + 2m_3, 2m_1 - 4m_2 - m_3\rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}.
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 2.3.12 sind zwei Eckpunkte l_σ, $l_{\sigma'}$ des Σ_{Js} zugehörigen Polyeders, falls dieser existiert, genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die Kegel σ, σ' einander benachbart sind. Ist $m' \in \phi_\sigma$, so daß $\{m'\}^\perp = \mathbf{R}(\sigma \cap \sigma')$, dann gilt für die Kante von l_σ nach $l_{\sigma'}$:

$$l_{\sigma'} - l_\sigma = k \cdot m',\ k \in \mathbf{N}. \tag{28}$$

$l_{\sigma'} - l_\sigma$ wird im Folgenden mit Kantenrichtung bezeichnet.

Es folgt also, daß die Ecke l_{σ_2} mit l_{σ_3}, l_{σ_3} mit l_{σ_4}, l_{σ_4} mit l_{σ_5}, l_{σ_5} mit l_{σ_6}, l_{σ_6} mit l_{σ_7} und l_{σ_7} wieder mit l_{σ_2} durch eine Kante verbunden wird.

Abbildung 4.4 zeigt einen Versuch, den Polyeder zu zeichnen. Hierbei ist M mit $\mathbf{Z}^3$ identifiziert. Ausgehend von der Ecke l_{σ_7} wurden in der obigen Reihenfolge die anderen Ecken eingezeichnet. Der Punkt l'_{σ_6} ist von l_{σ_5} in die durch Gleichung 28 bestimmte Richtung gezeichnet worden. Außerdem wurde noch l_{σ_1} eingetragen, was das Lesen der Abbildung vereinfacht.
Um die Gleichung 28 zu erfüllen, darf der Punkt l_{σ_6} sich nur in der ersten Koordinate von l_{σ_7} unterscheiden, und um einen konvexen Polyeder zu erhalten, muß die erste Koordinate von l_{σ_7} positiv sein. Da zusätzlich noch Gleichung 28 für die Kantenrichtung $l_{\sigma_6} - l_{\sigma_5}$ erfüllt sein muß, muß die erste Koordinate von l_{σ_5} erhöht werden.
Es folgt eine sukzessive Verlängerung der Kanten von l_{σ_4} nach l_{σ_3} und von l_{σ_2} nach l_{σ_7}, und damit eine Vergrößerung der dritten Koordinate von l_{σ_7}. Also muß analog der Begründung von oben wiederum die erste Koordinate von l_{σ_5} erhöht werden. Die Konstruktion des Polyeders ist mit diesen Kantenrichtungen somit nicht möglich.

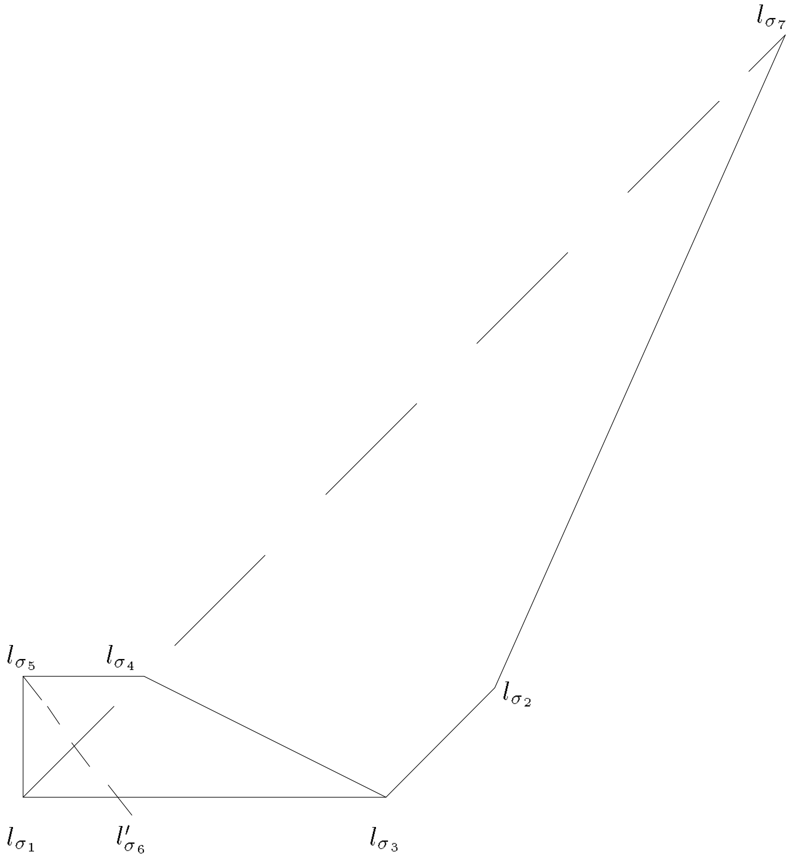


Abbildung 4.4

Dies kann man auch formal beweisen:
<u>*Annahme :*</u> Mit den durch Gleichung 28 bestimmten Kantenrichtungen läßt sich ein konvexer Polyeder konstruieren.

Aus der oben genannten Abfolge von Kanten folgt, daß

$$(l_{\sigma_3}-l_{\sigma_2})+(l_{\sigma_4}-l_{\sigma_3})+(l_{\sigma_5}-l_{\sigma_4})+(l_{\sigma_6}-l_{\sigma_5})+(l_{\sigma_7}-l_{\sigma_6})+(l_{\sigma_2}-l_{\sigma_7}) = 0 \in M$$

gelten muß. Das heißt, es existieren positive ganze Zahlen $a_1, ..., a_6$, so daß

$$a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+a_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_2 - 2a_4 - a_5 \\ a_6 - 2a_2 - a_3 \\ a_4 - a_1 - 2a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_1 + 4a_2 + 2a_3 \\ a_2 = 2a_4 + a_5 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_2 = a_5 + 2a_1 + 4a_3 + 8a_2 \geq 8a_2 + 7$. Widerspruch.

Aus diesem Beweis folgt insbesondere die Nichtprojektivität von X_J, denn die Unterteilung von σ_8 in reguläre Kegel ändert nichts am Auftreten des Widerspruchs.

Bemerkung 4.2.2
In Lemma 4.1.5 führte die Annahme der Projektivität von X_J dadurch zum Widerspruch, daß dann eine Morsefunktion f_α existieren würde, die entlang dem durch $\sigma_2, ..., \sigma_7, \sigma_2 \in \Sigma_J$ bestimmten Orbitzyklus streng monoton wäre. Bei dem Versuch, einen Polyeder zu konstruieren, übersetzt sich dieser Widerspruch in die Notwendigkeit die Kanten, die die diesen Kegeln zugeordneten Eckpunkte verbinden, fortwährend verlängern zu müssen.

Nun wird ein Ansatz untersucht, dieses Konstruktionsproblem zu lösen:

Beispiel 4.2.3 (Fortsetzung von Beispiel 4.2.1)
Seien die Erzeugendensysteme aller Kegel und ihrer dualen Kegel über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ beliebig, aber fest gewählt.

Ersetzt man die Kantenrichtung $l_{\sigma_1} - l_{\sigma_5}$ durch $-(l_{\sigma_1} - l_{\sigma_5} =: (l_{\sigma_1} - l_{\sigma_5})'$, um ein Zeichnen zu ermöglichen, und nimmt weiterhin an, daß $(l_{\sigma_5} - l_{\sigma_1})'$ wieder Teil eines Erzeugendensystems des dualen Kegels $(\check{\sigma_1'})$ ist, so folgt:

$$\sigma_1' = \langle -n_1, n_2, n_3 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}.$$

In dem Erzeugendensystem von σ_1 mußte also das Vorzeichen desjenigen Elementes geändert werden, welches nicht in $\{l_{\sigma_5} - l_{\sigma_1}\}^\perp$ liegt. Nach Bemerkung 3.3.5 ist dieses Element eindeutig bestimmt.

Analog muß das Vorzeichen des Elementes des Erzeugendesystems von l_{σ_5} geändert werden, welches ebenfalls nicht in $\{l_{\sigma_5} - l_{\sigma_1}\}^\perp$ liegt, also analog zum Kegel σ_5' übergegangen werden.

Soll σ_1' wieder Teil einer Fahne Σ'_{Js} sein, so müssen alle Kegel $\sigma \in \Sigma_{Js}$, in deren Erzeugendensystem ein Element der Form λn_1, $\lambda \in \mathbf{R}$ existiert, durch den entsprechenden Kegel σ' ersetzt werden. Ohne Einschränkung sei $\lambda = 1$. Dann unterscheiden sich die Erzeugendensysteme von σ und σ' nur durch den Austausch n_1 gegen $-n_1$.

Dementsprechend müssen die dualen Kegel $\check{\sigma}$ der betroffenen Kegel $\sigma \in \Sigma$ durch Kegel $\check{\sigma}'$ ersetzt werden. Dies geschieht, indem man in den Erzeugendensystemen der Kegel $\check{\sigma}$ die Vorzeichen derjenigen Elemente m ändert, für die $(m \mid n_1) \neq 0$ gilt. Dann sind die Kegel $\check{\sigma}'$ wieder dual zu σ'.

Dies bedeutet zum Beispiel für den Kegel σ_2, daß in seinem Erzeugendensystem n_1 durch $-n_1$ ersetzt wird, im Erzeugendensystem von $\check{\sigma}_2$ das Element $m_1 - 2m_2 + 4m_3$ durch $-m_1 + 2m_2 - 4m_3$. Dies entspricht wiederum dem Umkehren der Kantenrichtung $l_{\sigma_8} - l_{\sigma_2}$. Das Verfahren der Vorzeichenänderung muß also nochmals auf die Kante von l_{σ_2} nach l_{σ_8}, wie auch auf alle anderen betroffenen, angewendet werden. Hierbei wird allerdings kein Element eines Erzeugendensystems zweimal verändert.
Da die Fahne endlich ist, endet das Verfahren.

Beginnt man dieses Verfahren im Beispiel Σ_{Js} mit der Kante von l_{σ_1} nach l_{σ_5} ergibt sich folgendes Resultat:
lediglich die Vielfachen von n_1 und $\tilde{n}_2$ müssen in allen Erzeugendensystemen, in denen sie vorkommen, geändert werden. Das bedeutet für die Kantenrichtungen, daß $l_{\sigma_4} - l_{\sigma_3}$, $l_{\sigma_8} - l_{\sigma_2}$, $l_{\sigma_5} - l_{\sigma_1}$ und $l_{\sigma_6} - l_{\sigma_7}$ umgekehrt werden.

Abbildung 4.5 ist unter der Bedingung gezeichnet, daß der Punkt ∞ wieder im Inneren des Kegels σ_1 liegt. Um das beschriebene Verfahren deutlich zu machen, gelten folgende Vereinbahrungen.

1. Die Elemente aus den Erzeugendensystemen der Kegel, deren Vorzeichen geändert wurden, sind eingekreist.

2. Durch die zweidimensionalen Kegel $\sigma \cap \tau$ wird ein Strich gezogen, falls die Kantenrichtung $l_\sigma - l_\tau$ verändert wurde.

In dieser Darstellung ergibt sich für den Ablauf des Verfahrens:
Man streicht den Kegel $\sigma \cap \tau$ durch, falls $l_\sigma - l_\tau$ umgekehrt wird. Dann umkreist man alle eindimensionalen Kegel ρ, die $\sigma \cap \tau$ gegenüberliegen, daß heißt für die gilt:

$\rho \subset \sigma \setminus (\sigma \cap \tau)$ oder $\rho \subset \tau \setminus (\sigma \cap \tau)$.

Dann streicht man alle zweidimensionalen Kegel η durch, die dem eingekreisten ρ gegenüberliegen, das heißt für die ein dreidimensionaler Kegel ς existiert, so daß $\eta \subset \varsigma \setminus \rho$.
Dies setzt man solange fort, bis alle zweidimensionale Kegel, die eingekreisten eindimensionalen Kegeln gegenüberliegen, durchgestrichen sind, und umgekehrt. Dieses Verfahren kann man natürlich auch mit dem Einkreisen eines eindimensionalen Kegels beginnen.

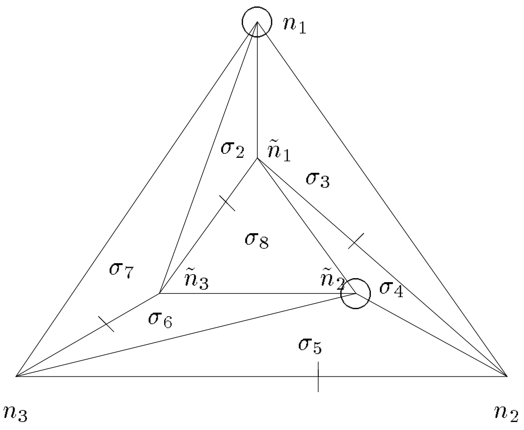


Abbildung 4.5

Versucht man mit diesen neuen Kantenrichtungen einen Polyeder zu zeichnen, so findet sich folgende Lösung:

$$\begin{array}{ll} l_{\sigma_1'} = 0 \in M, & l_{\sigma_2'} = -9m_2 - 45m_3, \\ l_{\sigma_3'} = -9m_2, & l_{\sigma_4'} = 9m_1 - 27m_2, \\ l_{\sigma_5'} = 9m_1, & l_{\sigma_6'} = 135m_1 - 63m_3, \\ l_{\sigma_7'} = -63m_3, & l_{\sigma_8'} = 11m_1 - 31m_2 - 1m_3. \end{array}$$

Da sich ein Polyeder zeichnen läßt, folgt aus [Oda, Theorem 2.22], daß die neuen Kegel σ_i', $i = 1, ..., 8$, eine komplette Fahne Σ_{Js}' bilden.

Definition 4.2.4
Eine kompakte Torusvarietät, die in einen komplexen projektiven Raum als ein abgeschlossener analytischer Unterraum eingebettet werden kann, heißt fastprojektive Torusvarietät.

Bemerkung 4.2.5
[1] Da sich die dualen Kegel zu den Kegeln der Fahne Σ_{Js}' nach Beispiel 4.2.3 analog Bemerkung 2.3.12 zu einem Polyeder zusammenfügen lassen, ist $X_{\Sigma_{Js}'}$ eine fastprojektive Torusvarietät [Oda].

[2] Noch offen ist die Frage, ob die nichtsinguläre Torusvarietät X_J in eine projektive Torusvarietät X_J' übergegangen ist. Um dies zu beweisen, muß erst noch eine Unterteilung von σ_8' in reguläre Kegel gefunden und dann die Projektivität der dadurch entstehenden regulären Fahne Σ_J' nachgewiesen werden.

[3] Die Kegelfolge $\sigma'_2, ..., \sigma'_7, \sigma'_2$ genügt nicht mehr den Bedingungen aus Lemma 4.1.6.

Beweis. (Bezeichnungen wie in Beispiel 4.1.7.)
Annahme : Die 4.Bedingung von Lemma 4.1.6 sei mit
$n = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 \in N$ erfüllt.
Für die durch die Schnitte der Kegel definierten Hyperebenen gilt:

$$H(\sigma'_2 \cap \sigma'_3) = \{w'_2\}^{\perp},\ w'_2 = -m_3,$$
$$H(\sigma'_3 \cap \sigma'_4) = \{w'_3\}^{\perp},\ w'_3 = -m_1 + 2m_2,$$
$$H(\sigma'_4 \cap \sigma'_5) = \{w'_4\}^{\perp},\ w'_4 = -m_2,$$
$$H(\sigma'_5 \cap \sigma'_6) = \{w'_5\}^{\perp},\ w'_5 = m_3 - 2m_1,$$
$$H(\sigma'_6 \cap \sigma'_7) = \{w'_6\}^{\perp},\ w'_6 = m_1,$$
$$H(\sigma'_7 \cap \sigma'_2) = \{w'_7\}^{\perp},\ w'_7 = m_2 - 2m_3$$

und

$$w'_i \in \phi_{\sigma'_i},\ i = 2, ..., 7.$$

Es folgt

$$\begin{array}{lll} (w'_2 \mid n) = -a_3, & (w'_3 \mid n) = -a_1 + 2a_2, & (w'_4 \mid n) = -a_2, \\ (w'_5 \mid n) = -2a_1 + a_3, & (w'_6 \mid n) = a_1, & (w'_7 \mid n) = a_2 - 2a_3. \end{array}$$

Aus

$$(w'_i \mid n) < 0 \text{ für alle } i = 2, ..., 7$$

folgt der Widerspruch:

$$0 < a_3 < 2a_1 \text{ und } a_1 < 0.$$

Die Kegelfolge, die für die Nachweise der Nichtprojektivität verantwortlich war, ist also entscheidend verändert worden.

Bemerkung 4.2.6
Das in Beispiel 4.2.3 erkärte Verfahren läßt sich analog auf den allgemeinen Fall einer kompletten Fahne Σ, $\dim N = r$ übertragen, unter der Bedingung, daß jeder r-dimensionalen Kegel $\sigma \in \Sigma$ ein r-elementiges Erzeugendensystem über $\mathbf{R}_{\geq 0}$ hat. Diese Erzeugensysteme seien fest gewählt.

Sei n ein Element aus einem solchen Erzeugendensystem eines r-dimensionalen Kegels, in dem das Verfahren starten soll. Zunächst wird dessen Vorzeichen geändert. Dann werden alle r-dimensionalen Kegel $\sigma_1, ..., \sigma_k$ bestimmt, zu denen Erzeugendensysteme mit dem Element n existieren. Zu jedem dieser Kegel σ_i wird die (r-1)-dimensionale Seite ρ_i bestimmt, so daß n nicht zu ρ_i gehört. Da Σ komplett ist, existiert zu jedem ρ_i ein r-dimensionaler Kegel τ_i, so daß $\tau_i \cap \sigma_i = \rho_i$. Nun wird in jedem Erzeugensystem der Kegel τ_i von demjenigen Element das Vorzeichen geändert, welches nicht zu ρ_i gehört. Dieses Element wird mit

n_i bezeichnet und ist nach Bemerkung 3.3.5 eindeutig bestimmt. Nun beginnt das beschriebene Verfahren mit allen n_i von vorne. Hierbei werden allerdings Elemente nicht noch einmal verändert, wenn sie schon einmal verändert wurden. Da es nur endlich viele Kegel in Σ gibt, endet dieses Verfahren.

Definition 4.2.7
Sei Σ eine komplette Fahne.

1. Eine Abfolge von Vorzeichenänderungen, die sich gemäß dem beschriebenen Verfahren aus Bemerkung 4.2.6 ergibt, heiße Zyklus in Σ im Startpunkt n.

2. Sei Σ' eine neue Fahne, die durch Anwendung eines oder mehrerer Zyklen aus Σ entstanden ist, so heißen die Fahnen Σ und Σ', beziehungsweise die Torusvarietäten X_Σ und $X_{\Sigma'}$, ähnlich.

Bemerkung 4.2.8
Mittels der Anwendung von Zyklen lassen sich einer Torusvarietät genausoviele andere Torusvarietäten zuordnen, wie es verschiedene Zyklen gibt, die wieder Fahnen erzeugen. Es schließen sich die Fragen an, wann Zyklen existieren die Fahnen erzeugen, wenn ja, wieviele, in welchem Zusammenhang die Varietäten X_Σ und $X_{\Sigma'}$ stehen, und wann eine nichtprojektive (nichtfastprojektive) Torusvarietät in eine projektive (fastprojektive) überführt wird. Ferner besteht die Möglichkeit, Torusvarietäten in Klassen ähnlicher Varietäten zusammenzufassen.

Beispiel 4.2.9

1. Für die Fahne Σ_{Js} existieren drei verschiedene Zyklen, die durch den Start des Verfahrens in den drei Ecken n_1, n_2 und n_3 entstehen. Die Mengen der geänderten Kantenrichtungen durch diese drei Zyklen sind disjunkt. Durch Kombination dieser drei Zyklen lassen sich also auf sieben verschiedene Arten die Erzeugendensysteme der dreidimensionalen Kegel verändern.

2. Für die Fahne Σ, die den komplexen projektiven Raum $\mathbf{P_r C}$ definiert, existiert nur der Zyklus, der die Vorzeichen aller Elemente der Erzeugendensysteme aller r-dimensionaler Kegel verändert.

   Beweis. (Bezeichnungen wie in Beispiel 2.1.21 eingeführt.)
   Sei n_0 der Startpunkt eines Zyklusses. Da der Kegel σ_0 mit $\sigma_i,\ i = 1, ..., r$, benachbart ist, wird auch das Vorzeichen von $n_i,\ i = 1, ..., r$ verändert.

Startet ein Zyklus in $n_i,\ i \in \{1, ..., r\}$, wird wiederum über die benachbarten Kegel $\sigma_0,\ \sigma_i$ das Vorzeichen von n_0 verändert, und es folgt analog oben, daß die Vorzeichen aller $n_i,\ i = 0, ..., r$, verändert werden.

3. Nach 2. existiert zu der Fahne Σ, die $\mathbf{P_r C}$ erzeugt, höchstens eine ähnliche Fahne Σ'. Da $\Sigma' = -\Sigma$, ist Σ' tatsächlich eine Fahne. Da der Isomorphismus

   $\Phi : N \longrightarrow N,\ n \longmapsto -n$

   eine Fahnenabbildung $\Phi : (N, \Sigma) \longrightarrow (N, \Sigma')$

   definiert, gilt:
$$X_\Sigma \cong X_{\Sigma'}.$$

Bemerkung 4.2.10
Der Übergang von Σ zu Σ' mittels eines Zyklusses in Σ induziert im Allgemeinen keinen Homomorphismus auf N.

Gegenbeispiel. Sei $N = \mathbf{Z}^2$, $\{n_1, n_2\}$ eine Basis von N und

$$\sigma_1 := \langle n_1, n_1 + n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, \qquad \sigma_2 := \langle n_1 + n_2, n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}},$$
$$\sigma_3 := \langle -n_1 - n_2, n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}, \quad \sigma_4 := \langle n_1, -n_1 - n_2 \rangle_{\mathbf{R}_{\geq 0}}.$$

Startet man nun in n_1 einen Zyklus, so ergeben sich die Übergänge

n_1 in $-n_1$,

n_2 in $-n_2$,

und es entsteht eine neue Fahne Σ'. Diese Übergänge würden einen Homomorphismus defineren, der auch $n_1 + n_2$ auf $-n_1 - n_2$ abbilden würde, doch wurde $n_1 + n_2$ durch den angewendeten Zyklus nicht verändert.

Literatur

[B-B] A. Bialynicki-Birula, *Some properties of the decomposition of algebraic varieties determined by actions of a torus,* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. **24** (1976),667-674

[B-J] Bröker-Jänich, *Einführung in die Differentialgeometrie,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1973

[Ehl] Fritz Ehlers, *Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflösung einiger isolierter Singularitäten,* Math. Ann. **218**(1975), 127-156

[Jurk] J.Jurkiewicz, *Torus embeddings, polyhedra, k^*-actions and homology*, Dissertations Mathematicae, (Rozprawy Mat.) **236** (1985)

[Mil] J.Milnor, *Morse-Theory,* Princton University Press, 1963

[Oda] Tadao Oda, *Convex Bodies and Albebraic Geometry,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988

[Orl] Peter Orlik, Hiroaki Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992

[Ro] R.T. Rockafeller, *Convex Analysis,* Princeton University Press, 1970

[Te] G.Kempf, F.Knudsen, D.Mumford, B.Saint-Donat, *Toroidal embeddings I,* Lecture Notes in Math. 339, Springer Verlag, Berlin, 1973