Philipps Universität Marburg

Übungen zu „Parallele und Verteilte Algorithmen“, Winter 09/10

Prof. Dr. R. Loogen, Dipl.-Inform. Th. Horstmeyer · Fachbereich Mathematik und Informatik · Marburg

Nr. 5, Abgabe: Dienstag, 24. November 2009 vor der Vorlesung

Aufgaben

5.1 **Sortieren auf einem zweidimensionalen Gitter** 6 Punkte

Auf einem $n \times n$ Gitter wird zur Sortierung von n^2 Zahlen in Schlangenlinien (siehe Skizze) folgender Algorithmus vorgeschlagen:

Führe in $\log n$ Phasen durch:

- Sortiere parallel alle Zeilen mit geradem Index ≥ 0 in aufsteigender Reihenfolge (d.h. kleinstes Element nach links), die Zeilen mit ungeradem Index in absteigender Reihenfolge.
- Sortiere parallel alle Spalten, so dass die jeweils kleinsten Elemente oben stehen.

13	11	1	9
2	7	4	0
12	5	10	3
15	8	6	14

$\Rightarrow$

1	9	11	13
7	4	2	0
3	5	10	12
15	14	8	6

$\Rightarrow$

1	4	2	0
3	5	8	6
7	9	10	12
15	14	11	13

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$

0	1	2	3
7	6	5	4
8	9	10	11
15	14	13	12

(a) Benutzen Sie das 0-1-Prinzip, um die Korrektheit des Algorithmus zu zeigen. / 4

Hinweis: Eine *unreine* Zeile sei eine Zeile, die sowohl Nullen als auch Einsen enthält. Zeigen Sie durch Betrachtung übereinanderliegender Zeilen, dass sich ab dem zweiten Durchlauf der Zählschleife die Anzahl der unreinen Zeilen in jeder Sortierphase halbiert.

(b) Welcher Algorithmus wird sinnvollerweise zum Sortieren der Zeilen und Spalten verwendet? Berechnen Sie (asymptotisch) den Aufwand des gesamten Sortieralgorithmus und vergleichen Sie ihn mit der unteren Schranke für das Sortieren auf einem zweidimensionalen Gitter. / 2

Bitte wenden!

5.2 Bitonisches Sortieren

6 Punkte

Eine Variante des in der Vorlesung besprochenen *Odd-Even-Merge Sort* ist das *bitonische Sortieren*. Eine Folge von ganzen Zahlen $(a_i)_{i \in \{0 \dots n-1\}}$ heißt *bitonisch*, falls sie durch eine zyklische Verschiebung in eine aufsteigenden Teilfolge gefolgt von einer absteigenden Teilfolge transformiert werden kann, d.h.:

1. $\exists i_0 \in \{0 \dots n-1\}$: $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{i_0} \geq a_{i_0+1} \geq \dots \geq a_{n-1}$

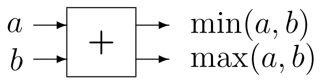
oder 2. $\exists k \in \{0 \dots n-1\}$: die Folge $(a_{(i+k) \bmod n})_{i \in \{0 \dots n-1\}}$ (zyklische Verschiebung um k) erfüllt Bedingung 1

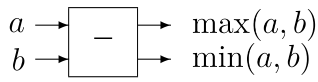
Eine zweielementige Folge ist stets bitonisch.

Es gilt der folgende **Satz**:

Seien $n = 2^l$ mit $l > 0$ und $(a_i)_{i \in \{0 \dots n-1\}}$ bitonische Folge.
Dann sind die Folgen $b_i = \min(a_i, a_{\frac{n}{2}+i})$ und $c_i = \max(a_i, a_{\frac{n}{2}+i})$ *ebenfalls bitonisch* (wobei $(i \in \{0 \dots \frac{n}{2} - 1\})$). Weiter gilt: $b_j \leq c_k \forall j, k \in \{0 \dots \frac{n}{2} - 1\}$

(a) Skizzieren Sie ein Sortiernetzwerk, das mit aufsteigend und absteigend sortierenden *Komparatorbausteinen* aus einer beliebigen Folge zunächst rekursiv eine bitonische Folge herstellt und diese danach (nach Aussage des Satzes) sortiert. / 4





(b) Wie viele Schritte und elementare Bausteine benötigt das bitonische Sortierverfahren? Vergleichen Sie das Verfahren mit dem Sortiernetzwerk der Vorlesung. / 2