Philipps Universität Marburg

Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2009

Prof. Dr. R. Loogen, Dipl.-Inform. Th. Horstmeyer · Fachbereich Mathematik und Informatik · Marburg

Nr. 11, Abgabe: Dienstag, 30. Juni 2009 vor der Vorlesung

1. Fleißige Biber[1] **4 Punkte**

   Ein *Biber* ist eine Turingmaschine über $\Gamma = \{|, \not{b}\}$, die, auf das leere Band angesetzt, stoppt. Dabei wird $q\ a\ b$ stop als Turingzeile zugelassen.

   Ein *fleißiger Biber* (busy beaver) ist ein Biber, der unter den Bibern gleicher Zustandszahl die maximale Strichzahl auf dem Band liefert.

   Die Funktion $BB : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert durch

   $$BB(x) := \text{Anzahl der Striche eines fleißigen Bibers mit } x \text{ Zuständen}$$

   (a) Geben Sie die Konfigurationsfolge an, die der durch nebenstehende Turingtafel definierte fleißige Biber mit 2 Zuständen durchläuft. / 1

q_0	$\not{b}$	$\|$ R	q_1
q_0	$\|$	$\|$ L	q_1
q_1	$\not{b}$	$\|$ L	q_0
q_1	$\|$	$\|$ stop	

   (b) Zeigen Sie: $BB(x) < BB(x + 1)$. / 2

   (c) Folgern Sie aus dem folgenden Satz von Rado, dass BB nicht Turing-berechenbar ist. / 1

   Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Turing-berechenbar mit $f(x) < f(x + 1)$, so gilt für hinreichend großes x: $f(x) < BB(x)$.

2. Verzweigung in LOOP **4 Punkte**

   Schreiben Sie ein LOOP-Programm zur Berechnung der folgenden Verzweigungsfunktion:

   $$if : \begin{cases} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to \quad \mathbb{N} \\ (x, y, b) & \mapsto \quad \begin{cases} x & \text{falls } b \geq 1 \\ y & \text{falls } b = 0 \end{cases} \end{cases}$$

   Als Wertzuweisungen sind neben den elementaren Anweisungen der Form `X_i := 0` bzw. `X_i := X_j + 1` Kopieranweisungen der Form `X_i := X_j` zugelassen.

   Beweisen Sie die Korrektheit des Programms anhand der denotationellen Semantik.

3. Primitiv rekursive Funktionen **4 Punkte**

   Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen aus den primitiv rekursiven Grundfunktionen durch Anwendung von Komposition und primitiver Rekursion erzeugt werden können:

   $$(a)\ \text{sub} : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \leq b \\ a - b & \text{sonst} \end{cases} \end{cases} \qquad (b)\ \min : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } a \leq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

   Hinweis: Verwenden Sie sub, um min auszudrücken.

[1] siehe auch: `http://www.fmi.uni-stuttgart.de/ti/projects/beaver/bbb.html`