Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2009

Prof. Dr. R. Loogen, Dipl.-Inform. Th. Horstmeyer · Fachbereich Mathematik und Informatik · Marburg

Nr. 12 (letztes Blatt), Abgabe: Dienstag, 7. Juli 2009 vor der Vorlesung

1. Primitive Rekursion — 4 Punkte

   (a) Sei $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. / 2
   Zeigen Sie, dass dann auch $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

   $$h(x, y) = \sum_{z \leq y} \varphi(x, z)$$

   (gemäß der Definition der primitiv rekursiven Funktionen) primitiv rekursiv ist.

   (b) Gegeben seien (totale) Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
   Beweisen oder widerlegen Sie: / 2

   i. Falls $g \circ f$ primitiv rekursiv ist, ist auch f primitiv rekursiv.

   ii. Falls $g \circ f$ primitiv rekursiv ist, ist auch g primitiv rekursiv.

2. Ackermann-Funktion — 4 Punkte

   Die Ackermann-Funktion ist definiert durch

   $$\begin{array}{lcll} ack(0,0) & = & 1 & \\ ack(0,1) & = & 2 & \\ ack(0,y) & = & y+2 & (y \geq 2) \\ ack(x+1,0) & = & 1 & (x \geq 0) \\ ack(x+1,y+1) & = & ack(x, ack(x+1,y)) & (x \geq 0, y \geq 0) \end{array}$$

   Zeigen Sie induktiv:

   (a) $ack(1, y) = 2 * y$ für $y \geq 1$ (b) $ack(2, y) = 2^y$ für $y \geq 0$

3. μ-Rekursion — 4 Punkte

   Gegeben seien totale berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

   Sei $M := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : f(x) = g(y)\}$.

   Zeigen Sie durch Angabe einer μ-rekursiven Funktion $h : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit Definitionsbereich M, dass M rekursiv aufzählbar ist.

4. **Bonusaufgabe I:** Semantik von WHILE — 4 Punkte

   Bestimmen Sie für das nebenstehende Programm P die Semantik $[\![P]\!]$ anhand der Semantik-Definition für WHILE-Programme:

   P = <u>in</u> (X_1, X_2); <u>var</u> ( );
   <u>while</u> $X_2 \neq 0$ <u>do</u>
   $X_2 := X_2 - 1$;
   $X_1 := X_1 + 1$;
   <u>od</u>;
   <u>out</u> X_1.

5. **Bonusaufgabe II: Abschlusseigenschaften** — 4 Punkte

   Zeigen Sie, dass mit $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ und $\Sigma^* \setminus L_1$ entscheidbar sind.

   Gilt dies auch für semi-entscheidbare Sprachen?