

Stochastik III SS 09

Blatt 8

Abgabe: Vorlesung 10.6.2009

- (1) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig mit diskreter Wahrscheinlichkeitsdichte

$$[x!(1 - e^{-\theta})]^{-1} \theta^x e^{-\theta} I_{\{1,2,\dots\}}(x),$$

mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$.

Zeigen Sie, dass die Likelihood-Gleichung eine eindeutige Lösung hat, wenn $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > 1$ gilt. Ist diese Lösung ein Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ?

- (2) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und mit Lebesgue-dichte

$$f_\theta(x) = \theta f_1(x) + (1 - \theta) f_2(x),$$

wobei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei bekannte Lebesgue-dichten seien und $\theta \in (0, 1)$ unbekannt sei.

- (i) Bestimmen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Likelihood-Gleichung eine eindeutige Lösung hat. Zeigen Sie, dass im Falle der Existenz einer Lösung diese schon der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist.
 - (ii) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer von θ , falls die Likelihood-Gleichung keine Lösung hat.
- (3) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig, so dass $\log X_i$ gemäß $\mathcal{N}(\theta, \theta)$ verteilt ist, wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.
- (i) Zeigen Sie, dass eine der Lösungen der Likelihood-Gleichung der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ ist.
 - (ii) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung des Maximum-Likelihood-Schätzers von θ .