WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

10. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 28.01.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

10.1.:
Berechne mit Methoden und Ergebnissen der Vorlesung (Integration von Potenzreihen u.a.) folgende Integrale:

(1) $\int\limits_0^{\sqrt{e}} x \cdot \exp(x^2) dx$,

(2) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Phi(x) dx$, wobei $\Phi(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \varphi(4^n x)$, $\varphi(x) := \mid x - \left[x + \frac{1}{2}\right] \mid$,

(3) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2}\, dx$, $\alpha > 0$.

(5)

10.2.:
Welche der folgenden Funktionen sind Regelfunktionen?

(1) $x \mapsto \begin{cases} 2, & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

(2) $x \mapsto \begin{cases} x, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x, & x \in [0,1]\,,\ \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(3) Der Sunrise $\overset{\vee}{f}$ einer Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(5)

10.3.: Sei $s \geq 1$ und

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+ , \quad x \longmapsto \frac{1}{x^s}.$$

a) Seien $T_n, \widetilde{T}_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$T_n(x) := \min\{f(t) \mid t \in [[x], [x] + 1\,]\},$$
$$\widetilde{T}_n(x) := \max\{f(t) \mid t \in [[x], [x] + 1\,]\}.$$

Berechne $\int\limits_1^n T_n(x) dx$ und $\int\limits_1^n \widetilde{T}_n(x) dx$.

b) Folgere für $s > 1$ und $n \in \mathbb{N}_+$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s}$$

sowie

$$\zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s).$$

c) Schließe daraus, dass

$$\mid \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \mid \leq 1 \text{ für alle } s > 1$$

$$\text{und } \lim (s_n - 1) \cdot \zeta(s_n) = 1 \text{ für } s_n \to 1, \;\; s_n > 1.$$

(5)

10.4.:

a) Prove the identity

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y).$$

b) Calculate the integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

by using the following partitions (=Zerlegungen)

$$\begin{aligned} &-1 = x_{-n} < x_{-n+1} < ... < x_0 = 0 < ... < x_n = 1, \\ &-\tfrac{\pi}{2} = t_{-n} < t_{-n+1} < ... < t_0 = 0 < ... < t_n = \tfrac{\pi}{2} \\ &x_k := \sin t_k, \;\; t_{k+1} = t_k + \tfrac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

and the above identity. (5)