WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

11. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 04.02.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

11.1.:
Zeige, dass die Menge D der Unstetigkeitsstellen einer monotonen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar ist.
Ist die Aussage auch richtig, falls f eine monotone Funktion auf einem beliebigen Intervall ist?
Hinweis: Betrachte für eine monoton steigende Funktion f die Mengen

$$D_n := \left\{ x \in (a,b) \mid f(x+) - f(x-) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

wobei $f(x+) := \inf\{f(y) \mid y > x\}$ und $f(x-) := \sup\{f(y) \mid y < x\}$ ist. (3)

11.2.:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $n \in \mathbb{N}_+$, die Teilung $p_n : a = t_0 < t, < \ldots < t_n$ definiert durch $t_k := a + \frac{k}{n}(b-a)$ und $T_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Treppenfunktion

$$T_n(x) := \begin{cases} f(t_k) & x \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, \ldots, n-1 \\ f(b) & x = b \end{cases}.$$

Zeige: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so dass $\|f - T_n\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. $T_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} f$. (4)

11.3.:
Sei $f : [a,b] \to [A,B]$ stetig und bijektiv, $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ die (stetige) Umkehrabbildung von f.
Zeige: $\int_a^b f(x)dx + \int_A^B f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a).$

Berechne so $\int_a^b \log(x)dx$ für $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$. (6)

11.4.:
Differentiate if possible the following functions

(1) $x \longmapsto \exp\left(\frac{x^3 \sin x}{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$

(2) $x \longmapsto x^x, \quad x > 0$

(3) $x \longmapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$

(4) $x \longmapsto \begin{cases} x^2 & x \text{ rational} \\ 2x-1 & x \text{ irrational} \end{cases}$ (7)

11.5.: (freiwillige Zusatzaufgabe)
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\sum_{n=0}^{n-1} \mid f(t_{j+1}) - f(t_j) \mid \leq C$$

für alle Partitionen $p : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}$. Die Variation V_f von f ist definiert durch

$$V_f : [a,b] \longrightarrow [0,\infty)$$

$$x \mapsto V_f(x) := \sup \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \mid a = t_0 < t, < ... < t_n = x,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeige: Die Funktionen V_f und $V_f - f$ sind beide monoton steigend auf $[a,b]$, d.h. jede Funktion von beschränkter Variation ist eine Linearkombination von monotonen Funktionen, sogar die Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen.
Folgere: span $(\mathrm{Mon}[a,b])$ ist der Vektorraum der Funktionen von beschränkter Variation.

(8)