12. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 11.02.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

12.1.:
Berechne durch partielle Integration

(1) $$\int_0^b x^n \exp(-x)dx, \quad n \geq 1$$

(2) $$\int_0^\pi \sin^n x dx, \quad n \geq 2$$

(3) $$\int_0^1 x^p(1-x)^q dx, \quad p, q \in \mathbb{N}_+$$

(6)

12.2.:
Integriere mittels geeigneter Substitution:

(1) $$\int_0^1 \sqrt{2x+3}dx$$

(2) $$\int_e^{2e} \frac{dx}{x \log x}$$

(3) $$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{8}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$$

. (6)

12.3.:
Bei opportunistischen Krankheiten (das sind solche mit sehr langem Zeitraum zwischen dem Zeitpunkt der Ansteckung und demjenigen Zeitpunkt, zu dem das Vollbild der Krankheit auftritt, z.B. HIV) wird nach Peterman et al. der Anteil $x(t)$ derjenigen Infizierten, bei denen die Krankheit zum Zeitpunkt $t \geq t_0$ im Vollbild besteht, jeweils durch eine Differentialgleichung folgenden Typs umschrieben:

$$x'(t) = c \cdot t \cdot x(t), \qquad \text{wobei } x(t_0) > 0,\ c > 0.$$

Bestimme hieraus die Funktion $t \mapsto x(t)$. (4)

12.4.:
Two functions $f,\ g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ on an open Interval I are said to be tangent at $\bar{x} \in I$ (abbreviated $f \sim g$) if the limit

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \neq \bar{x}}} \left| \frac{f(x) - g(x)}{x - \bar{x}} \right|$$

exists and equals zero.
For any $\bar{x} \in I$ prove the following statements:

(1) $\sim$ is an equivalence relation on the set of all real valued functions on I (vgl. Lin.Al).

(2) In the equivalence class of f there is at most one affine linear funktion

$$L : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b,$$

in which case f is differentiable at $\bar{x}$ and $L(x) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$ for all $x \in \mathbb{R}$. Conclude that

$$f \text{ differentiable at } \bar{x} \text{ and } f \sim g \Longrightarrow g \text{ differentiable at } \bar{x} \text{ and } Df(\bar{x}) = Dg(\bar{x}).$$

(4)