4. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 26.11.1999, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

4.1.:
Seien X, Y endliche Mengen, $A \subset X$.
Zeige zunächst für den Spezialfall $X \neq \phi, A \neq \phi$, (z.B. durch Induktion nach $\#X$), daß es ein $N \in \mathbb{N}$, eine Bijektion $\varphi : \{0, ..., N\} \to X$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq N$ gibt derart, daß

$$\varphi|_{\{0,...,k\}} \text{ eine Bijektion von } \{0, ..., k\} \text{ auf } A$$

ist.
Folgere hieraus für den allgemeinen Fall

(1) $\#A \leq \#X$, insbesondere A endlich, wenn X endlich.

(2) $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$

(3) $\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y$. (7)

4.2.:

a) Wie viele Telefonanschlüsse kann die Telekom vergeben, wenn sowohl die Vorwahl als auch die Kennzahl des Anschlusses 5-stellig ist, die Vorwahl als erste Ziffer eine Null hat, als zweite eine von Null verschiedene Ziffer? Die Kennzahl des Anschlusses beginne stets mit einer von 0 verschiedenen Ziffer (Ziffern $= \{0, 1, ..., 9\}$).

b) Was bewirkt eine stärkere Kapazitätserweiterung: Eine Vergrösserung des Ziffernbereichs um ein zusätzliches Symbol $*$ oder 7-stellige Kennzahlen des Anschlusses? (3)

4.3.: Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $\quad 0 \leq k \leq n-1$

b) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + ... + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, $\quad 0 \leq k \leq n$ (4)

4.4.: Let $a_o, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Then $p : t \longmapsto a_o + a_1 t + ... a_n t^n$, $t \in \mathbb{R}$, is said to be a polynomial function on the reals of degree n. Prove, that such a function has at most n zeros (=Nullstellen).
Hint: Show first for $a, b \in \mathbb{R}$ and all $m \geq 2$

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + ... + b^{m-1})$$

and consider then $p(t) - p(b)$ for a zero b of p. (6)