

6. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 10.12.1999, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

6.1.:Zeige durch Induktion, dass für $n \geq 2$

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

gilt. Berechne hieraus die Grenzwerte

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \text{und} \quad \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}. \quad (6)$$

6.2.:Seien α, β Folgen, so dass

- (1) α injektiv (d.h. $\alpha_n \neq \alpha_m$ für $n \neq m$) und
- (2) β Teilfolge von α und α Teilfolge von β .

Zeige: Dann ist $\alpha = \beta$. (4)**6.3.:**

Sei

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_n := \frac{2 + x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Zeige, dass die Folge (x_n) konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert. (5)**6.4.:**Let $0 \leq \Delta < 1$ be a real number and $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ a self-mapping of the interval $[a, b]$, $a < b$, such that

$$|f(x) - f(y)| \leq \Delta|x - y|$$

for all $x, y \in [a, b]$. Take any point $x_0 \in [a, b]$ and define recursively the sequence (x_n) by $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \geq 0$.Prove that the sequence (x_n) converges to a point $x_* \in [a, b]$ such that $f(x_*) = x_*$. Is there another point with that property? (x_* is called a "fixed point of f ".) (5)