7. Übungsblatt zur Analysis I
Abgabe: 17.12.1999, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

7.1.:
Teste auf Konvergenz

a) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^6}{3^n}$

b) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

c) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$

d) $\sum\limits_{n\geq 0} \sqrt{n} \cdot e^{-n^2}$

(6)

7.2.:
Sei (a_n) eine reelle Folge derart, dass die Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}) alle konvergieren. Zeige: Dann konvergiert auch (a_n). (4)

7.3.:
Zeige: Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $c > 0$, so daß

$$\left|\frac{x^\alpha}{\exp(x)}\right| < \varepsilon \text{ für alle } x \geq c.$$

(4)

7.4.:
Let $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ be a convergent series (= unendliche Reihe) such that $a_n \geq 0$ for all $n \geq 1$.
Show that

(1) $\lim \frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n} = 0$

(2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n(n+1)} = \sum\limits_{n\geq 1} a_n$.

(4)

7.5.: [1]
Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen, so dass

(1) $b_n > 0$ für alle n,

(2) $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ divergent,

(3) $\lim \frac{a_n}{b_n}$ existent.

Zeige: $\lim \frac{a_0+\ldots+a_n}{b_0+\ldots+b_n} = \lim \frac{a_n}{b_n}$. Folgere erneut den Cauchy'schen Grenzwertsatz.

(7)

[1] anspruchsvoll; freiwillige Zusatzaufgabe. Abgabezeitpunkt freigestellt.