# 8. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 14.1.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

**8.1.:**

Bestimme die Konvergenzradien folgender Reihen:

a) $\sum_{n\geq 1} \sqrt[n]{n+1} \cdot x^n$

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} \cdot x^n$

c) $\sum_{n\geq 1} (\log n) \cdot x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} (n \exp(-n^2)) \cdot x^n$ (6)

**8.2.:**

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen stetig, in welchen nicht?

a) $x \longmapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \end{cases}$

b) $x \longmapsto x^x \qquad x > 0$

c) $x \longmapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

d) $x \longmapsto [x] + \sqrt{x - [x]}, \quad x \in \mathbb{R}$ (6)

**8.3.:**

Zeige zunächst, dass $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ eine stetige Bijektion um $(0,1)$ auf $\mathbb{R}_+$ liefert. Ist die Umkehrabbildung ebenfalls stetig? Folgere, dass jedes nicht-ausgeartete Intervall $\subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$? (4)

**8.4.:**

Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous (= stetig) function. Define its "sunrise"

$$\check{f} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

by

$$\check{f}(x) = \sup\{f(t) \mid a \leq t \leq x\} .$$

Show that $\check{f}$ is continuous, too. (4)

**8.5.: (freiwillig)**

Eine Folge $y : \mathbb{N}_+ \to \{0, 1\}$, $n \mapsto y_n$, heißt nicht-dyadisch, falls $y_n = 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_+$, andernfalls dyadisch. Sie heißt periodisch, falls sie dyadisch ist und es ein $p \in \mathbb{N}_+$ gibt, so dass $y_n = y_{p+n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar sind die "abbrechenden" Folgen $y_n = 0$ für fast alle $n$ periodisch. Zeige:

(1) Die Menge $P$ der periodischen Folgen $\subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}_+}$ ist höchstens abzählbar.

(2) Die Menge $D$ der dyadischen Folgen $\subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}_+}$ ist überabzählbar.

(3) Die Abbildung $\hat{}\; : D \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \hat{y} := \sum\limits_{n \geq 1} \frac{y_n}{2^n}$, bildet $D$ bijektiv auf das halboffene Intervall $[0, 1) := \{t \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq t < 1\}$ ab und hat als Umkehrabbildung $\check{}: [0, 1) \to D$, $x \mapsto \check{x}$, $\check{x}_n = [2x_n]$ mit $x_1 = x$, $x_{n+1} = 2x_n - [2x_n] < 1$. Insbesondere ist $[0, 1)$ überabzählbar.

(4) $\hat{y} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ genau dann, wenn $y \in P$.

(5) Gib eine abbrechende Folge $y \in D$ an, so dass $|\hat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}| < 10^{-3}$.