WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

9. Übungsblatt zur Analysis I

Abgabe: 21.01.2000, 11.00 Uhr, vor dem HG 4

9.1.:

Entscheide, ob punktweise oder gleichmäßige Konvergenz vorliegt:

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $\quad 0 \leq x \leq 1$

b) $g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n+1}\right)$, $\quad x \in \mathbb{R}$

c) $h_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$, $\quad -1 \leq x \leq 1$

d) $e_n(x) = \exp(-n(x^2+1))$, $x \in \mathbb{R}$

e) $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$, $\quad x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.

(5)

9.2.:

Zeige, dass das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 &> 0 \\ \log x + \exp x &= y \end{aligned}$$

für jedes $y \in \mathbb{R}$ eine Lösung hat. Ist die Lösung eindeutig? (3)

9.3.:

Sei $X \subset \mathbb{R}$ ein nicht-ausgeartetes Intervall und $f_n \in BX$, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichmäßig konvergente Folge beschränkter Funktionen.

Konvergiert die Sunrise-Folge $\left(\overset{\vee}{f_n}\right)$, definiert durch

$$\overset{\vee}{f_n}(\overline{x}) := \sup\{f_n(x) \mid x \leq \overline{x}\}$$

ebenfalls gleichmäßig? Gib gegebenenfalls ihren gleichmäßigen Limes an. (5)

9.4.:

Let $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be the mapping

$$x \mapsto \varphi(x) := \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$$

a) Show that the series

$$\Phi(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \varphi(4^n x)$$

converges uniformly (= gleichmäßig) and defines a continuous mapping $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Sketch the graphs of $\Phi_n(x) := \sum\limits_{k=o}^{n} \frac{1}{4^k} \varphi(4^k x)$ for $n = 0, 1, 2, 3$ and find a point $0 \leq \overline{x}$ (preferably the smallest one) in which Φ attains its maximum.

(7)