WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

Lösungen zum 1.Übungsblatt zur Analysis I

1.1.:

Vorbemerkung: Nach den de Morganschen Regeln ist

$$A \triangle B = C_{A\cup B}(A\cap B) = C_{A\cup B}A \cup C_{A\cup B}B.$$

d.h. $x \in A \triangle B \Leftrightarrow$ x ist in genau einer der beiden Mengen A, B
und $x \notin A \triangle B \Leftrightarrow$ x ist in beiden Mengen A, B oder in keiner.
Zu (1): Ist $A = B$, so ist $A \triangle A = C_A A = \emptyset$.
Zu (2): Wegen $\emptyset \cap A = \emptyset$ ist $\emptyset \triangle A = C_A\emptyset = A$.
Zu (4): Nach dem Distributivgesetz ist zunächst

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap C_{B\cup C}B) \cup (A \cap C_{B\cup C}C).$$

und

$x \in A \cap C_{B\cup C}B \Leftrightarrow x \in A \cap C,\ x \notin B.$
$x \in A \cap C_{B\cup C}C \Leftrightarrow x \in A \cap B,\ x \notin C.$

Daher ist

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \triangle C) &\Leftrightarrow (x \in A \cap C,\ x \notin B) \text{ oder } (x \in A \cap B, x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und} \\ &\qquad\qquad x \notin A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap (A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \triangle A \cap C) \end{aligned}$$

Zu (3): Nach der Vorbemerkung gilt

$$\begin{aligned} x \in A \triangle (B \triangle C) &\Leftrightarrow (x \in A,\ x \notin B \triangle C) \text{ oder } (x \notin A,\ x \in B \triangle C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ und (x ist in beiden Mengen B, C oder in keiner))} \\ &\quad\ \text{oder } (x \notin A \text{ und x ist in genau einer der Mengen B, C)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \cap C \text{ oder } (x \in A,\ x \notin B,\ x \notin C) \\ &\quad\ \text{oder } (x \notin A,\ x \in B,\ x \notin C) \text{ oder } (x \notin A,\ x \notin B,\ x \in C) \\ &\Leftrightarrow \text{ist in allen drei Mengen A, B, C oder in genau einer.} \end{aligned}$$

Die letztere Aussage ist symmetrisch in A, B, C. Daher stimmen wegen

$$(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (A \triangle B)$$

die Mengen $A \triangle (B \triangle C)$ und $(A \triangle B) \triangle C$ überein.

1.2.:

Die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial.
Sei umgekehrt $(a,b) = (a\prime, b\prime)$.Ist $a' = b'$, so ist $(a',b') = \{\{a'\},\{a',b'\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\} = (a,b)$ nach (EXT), also $\{a'\} = \{a\} = \{a,b\}$ erneut nach (EXT).

Nochmals (EXT) liefert $a' = a = b = b'$.
Ist $a\prime \neq b'$, so ist auch $a \neq b$. Denn wäre $a = b$, so folgte (durch Vertauschen der Rollen) $a' = b'$. Aus $(a, b) = (a', b')$ folgt zunächst $\{a\} = \{a'\}$ oder $\{a\} = \{a, b\}$nach (EXT). Der Fall $\{a\} = \{a, b\}$ kann nicht sein, da sonst $a = b$, also $\{a\} = \{a'\}$ und damit $a = a'$ sowie $\{a, b\} = \{a', b'\}$. Daher ist $b = a'$ oder $b = b'$. Wäre $b = a'$, so wäre aber $b = a$, da $a = a'$, also folgt $b = b'$.

1.3.:
Wegen $C_X(C_X A) = A$ ist $c \circ c = id_{PX}$. Daher ist c bijektiv (und stimmt mit seiner Umkehrabbildung c^{-1} überein).

1.4.:

a) Let $g \circ f$ be one-to-one and $x, x' \in X$ such that $f(x) = f(x')$. Then $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$, hence $x = x'$ since $g \circ f$ is supposed to be one-to-one.

b) Let $g \circ f$ be onto, i.e.$bild(g \circ f) = Z$. Since $bild(g \circ f) \subset bild\ g \subset Z$ the set $bild\ g$ equals Z, i.e. g is onto, too.