WS 1999/2000 Prof. Dr. F.W. Knöller

Lösungen zum 10. Übungsblatt zur Analysis I

10.1:

Zu (1): Da die Exponentialreihe auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{e}} x\exp(x^2)dx &= \int_0^{\sqrt{e}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^{2n+1}dx \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\int_0^{\sqrt{e}} x^{2n+1}dx \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{2n+2}\left((\sqrt{e})^{2n+2} - 0^{2n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!}e^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}(\exp(e) - 1)
\end{aligned}$$

Zu (2): Wegen der gleichmäßigen Reihenkonvergenz darf wieder gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \Phi(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\varphi(4^n x)dx \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(4^n x)dx
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der einzelnen Summanden benutze das folgende Theorem der Vorlesung (spezielle Variablensubstitution)

$$\int_a^b f(g(x))\,\frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2}dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

wenn

$$g(x) := \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \text{ mit } \Delta := \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Anwendung hier mit

$$\alpha := 4^n,\ \ \beta = \gamma = 0,\ \ \delta = 1,\ \ \Delta = 4^n,\ \ \frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2} = 4^n$$

$$\text{also } t = g(x) = 4^n x,\ \ a = 0,\ \ g(a) = 0,\ \ b = \frac{1}{2},\ \ g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}4^n$$

ergibt eingesetzt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(4^n x)dx &= \frac{1}{4^{2n}}\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(4^n x)\cdot 4^n dx \\
&= \frac{1}{4^{2n}}\int_a^b \varphi\left(g(x)\right)\frac{\Delta}{(\gamma x+\delta)^2}dx \\
&\underset{Th}{=} \frac{1}{4^{2n}}\int_{g(a)}^{g(b)} \varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{4^{2n}}\int_0^{\frac{1}{2}4^n} \varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}4^n}\int_{k-1}^{k} \varphi(t)dt
\end{aligned}$$

Da φ 1-periodisch ist, stehen unter der Summe $\frac{1}{2}4^n$ gleiche Integrale, d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^n}\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(4^n x)dx &= \frac{1}{4^{2n}}\cdot\frac{1}{2}4^n\int_0^1 \varphi(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4^n}\int_0^1 \varphi(t)dt
\end{aligned}$$

In die Reihe eingesetzt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Phi(x)dx = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2}\frac{1}{4^n}\int_0^1 \varphi(t)dt = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\int_0^1 \varphi(t)dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \varphi(t)dt$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi(t)dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0^2\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Phi(t)dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Zu (3): Sei $0 < y < 1$ zunächst fest gewählt. Dann konvergiert für alle x mit $|x| \leq y$ die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k\geq 0}(-x^2)^k$$

gleichmäßig, denn $\sum_{k\geq 0}\|(-x)^2)^k\| \leq \sum_{k\geq 0} y^{2k} = \frac{1}{1-y^2} = C$. Gleichmäßig konvergent ist daher im Intervall $[0, y]$ auch die Reihe

$$\frac{x^\alpha}{1+x^2} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k x^{\alpha+2k},$$

welche daher gliedweise integriert werden darf.
Das Integral

$$I(y) := \int_0^y \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$$

ist sogar für alle $0 \le y \le 1$ wohldefiniert, da der Integrand stetig, also eine Regelfunktion ist. Und die Abbildung

$$I : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto I(y) := \int_0^y \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \text{ ist nach Vorlesung stetig.} \tag{1}$$

Für $0 \le y < 1$ gilt

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^y \left(\sum_{k\ge 0} (-1)^k x^{\alpha+2k} \right) dx \\ &= \sum_{k\ge 0} (-1)^k \left(\int_0^y x^{\alpha+2k} dx \right) \\ &= \sum_{k\ge 0} (-1)^k \frac{1}{\alpha+2k+1} y^{\alpha+2k+1} \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert aber nach dem Leibnizkriterium sogar noch für $y = 1$. Mit dem Abelschen Grenzwertsatz gilt, wenn $0 < y_n < 1, \ y_n \longrightarrow 1$,

$$\lim I(y_n) = \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{\alpha+2k+1}$$

Mit (1) folgt daher

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx = I(1) = \lim I(y_n) = \sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{\alpha+2k+1}.$$

10.2:
Zu (1): Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x \ne 0$ und $f(0) := 0$ und g die Funktion der Aufgabenstellung. Dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \ne 0$. f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig in allen $x \ne 0$, aber auch in $x = 0$. Denn sei $x_n \in (0,1], \ x_n \longrightarrow 0$. Dann folgt

$$0 \le |f(x_n)| = \left| x_n^2 \sin \frac{1}{x_n} \right| \le |x_n|^2 \longrightarrow 0$$

und mit STAB also $\lim f(x_n) = 0 = f(0)$. Damit ist f auf $[0,1]$ stetig, also Regelfunktion. Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen T_n auf $[0,1]$ so dass $T_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} f$. Definiere $S_n(0) := g(0) = 2$ und $S_n(x) = T_n(x)$ für alle $x \in (0,1]$. Dann sind auch die S_n Treppenfunktionen, und es gilt $S_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} g$, d.h. g ist auch Regelfunktion.
Noch kürzer: Definiere $T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $T(0) := 2$, $T(x) := 0$ sonst. Dann ist T Treppenfunktion, also Regelfunktion, und $g = f + T$, also g Regelfunktion, da die Regelfunktionen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden.

Zu (2): Sei f die Funktion der Aufgabenstellung. Wäre f eine Regelfunktion, so gäbe es zu $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$ eine Treppenfunktion T auf $[0,1]$ mit $\|f-T\| < \varepsilon$. Zu T gäbe es eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ und Konstante $y_i \in \mathbb{R}$ mit $T(x) = y_i$ für alle $x \in (t_{i-1}, t_i)$.
In (t_0, t_1) gibt es ein $\bar{x}$ mit $\bar{x} < \frac{1}{8}$. Für alle rationalen $0 < x \leq \bar{x}$ gilt $f(x) = x < \frac{1}{8}$ und $|f(x) - y_1| \leq \|f-T\| < \varepsilon = \frac{1}{8}$, folglich $y_1 < f(x) + \varepsilon < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
Für alle irrationalen $0 < x \leq \bar{x}$ gilt $f(x) = 1 - x > 1 - \frac{1}{8}$ und $|f(x) - y_1| \leq \|f-T\| < \varepsilon$, folglich $y_1 > f(x) - \varepsilon > 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$, ein Widerspruch.
Zu (3): Zur Regelfunktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine Folge von Treppenfunktionen T_n mit $T_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} f$. Nach Aufg. 9.3. folgt hieraus $\check{T}_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} \check{f}$. Offenbar sind die $\check{T}_n$ aber wieder Treppenfunktionen. Also ist $\check{f}$ Regelfunktion.
Noch kürzer: $\check{f}$ ist monoton wachsend, und alle monotonen Funktionen sind Regelfunktionen.

10.3:
Zu a) Sei $s \geq 1$. Dann ist

$$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \frac{1}{x^s} \text{ monoton fallend.}$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und alle $x \in (n, n+1)$

$$T_n(x) = \frac{1}{(n+1)^s} \text{ und } \tilde{T}_n(x) = \frac{1}{n^s}, \text{ also sind die } T_n,\ \tilde{T}_n \text{ Treppenfunktionen auf } [1,n] \text{ und}$$

$$\int_1^n T_n(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} T_n(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \text{ und } \int_1^n \tilde{T}_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \tilde{T}_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s}.$$

Zu b) $f : x \mapsto \frac{1}{x^s}$ ist stetig auf $[1,n]$, also Regelfunktion. Aus $T_n \leq f \leq \tilde{T}_n$ folgt daher

$$\int_0^n T_n(x)dx \leq \int_0^n x^{-s}dx \leq \int_0^n \tilde{T}_n(x)dx$$

also für $s > 1$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{1-s}(n^{1-s} - 1^{1-s}) = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s} \tag{2}$$

was zu beweisen war, sowie für $s = 1$ die bekannte Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \log n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Für $s > 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = 0$$

Aus (2) folgt daher für $n \to \infty$

$$0 < \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \text{ , d.h. die andere Behauptung.}$$

Zu c) Hieraus folgt sofort

$$|\zeta(s) - \frac{1}{s-1}| = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) - (\zeta(s) - 1) = 1$$

d.h. $|\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}| \leq 1$, was zu zeigen war.

Multiplikation mit $|s-1|$ liefert

$$|(s-1)\zeta(s) - 1| \leq |s-1|$$

Wenn nun $s_n > 1$ und $s_n \to 1$, dann folgt hieraus

$$|(s_n - 1)\zeta(s_n) - 1| \leq |s_n - 1| \longrightarrow 0$$

also $\lim(s_n - 1)\zeta(s_n) = 1$.

10.4.
Zu a) Nach Vorlesung gilt

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{3}$$

also auch $\sin(x-y) = \sin x \cos(-y) + \cos(x)\sin(-y)$. Da cos eine gerade, sin eine ungerade Funktion ist, also

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Dies zu (3) addiert, liefert

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\cos y \sin x \tag{4}$$

Zu b) Sei $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ und die Partition von $[-1,1]$ wie in der Aufgabenstellung.
Definiere für $n \in N_+$ die Treppenfunktion $T_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_n(x) := \sqrt{1-x_k} \text{ für } x \in [x_k, x_{k+1}),\ \ k = -n, \cdots, n-1,\ \ T_n(x_n) := 0 = f(x_n)$$

Dann gilt für $x \in [x_k, x_{k+1})$, $k = -n, \cdots, n-1$, wenn man $x = \sin t$ setzt,

$$|T_n(x) - f(x)| = |\sqrt{1-x_k^2} - \sqrt{1-x^2}| = |\sqrt{1-\sin^2 t_k} - \sqrt{1-\sin^2 t}| = |\cos t_k - \cos t|$$

Da cos stetig ist und $t \in [t_k, t_{k+1})$ für $x \in [x_k, x_{k+1})$, gibt es nach Vorlesung ein τ zwischen t_k und t mit

$$|\cos t_k - \cos t| = |\cos \tau| \cdot |t_k - t| \leq |t_k - t_{k+1}| = \frac{\pi}{2n}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{\pi}{2N} < \varepsilon$. Dann gilt

$$|T_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in [x_k, x_{k+1}),\ k = -n, \cdots, n-1$$

und damit $\|T_n - f\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h.

$$T_n \underset{\|\,\|}{\longrightarrow} f, \text{ also auch}$$

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx \longrightarrow \int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx. \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} T_n(x)dx &= \sum_{k=-n}^{n-1} \sqrt{1-x_k^2}(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=-n}^{n-1} \cos t_k(\sin t_{k+1} - \sin t_k) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-n}^{n-1} 2\cos t_k \sin t_{k+1} - \sum_{k=-n}^{n-1} \cos t_k \sin t_k\right) \\
&\underset{a)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-n}^{n-1} [\sin(t_{k+1}+t_k) + \sin(t_{k+1}-t_k)] - \sum_{k=-n}^{n-1} [\sin(t_k+t_k) + \sin(t_k-t_k)]\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n-1} \left[\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \sin\frac{\pi}{2n}\right] - \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n-1} \sin\frac{2k\pi}{2n}
\end{aligned}$$

Die erste Summe besteht aus $2n$ Summanden, summiert also $\sin\frac{\pi}{2n}$ genau $2n$ mal auf. Wir erhalten damit

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \sum_{k=-n}^{n-1}\sin\frac{-2k\pi}{2n}$$

Setzt man $j := 2k+1$, so summiert die erste Summe über alle ungeraden j zwischen $-2n+1$ und $2n-1$. Zu jedem j tritt auch $-j$ einmal in der Summe auf. Da sin ungerade ist, heben sich die Summanden paarweise weg, und die Summe ist Null.
Setzt man $m := 2k$ und beachtet, dass $\sin\frac{2n\pi}{2n} = 0$ ist, so summiert die zweite Summe über alle geraden m zwischen $-2n$ und $2n$. Wieder heben sich die Summanden paarweise weg, bis auf den Summand mit $m = 2k = 0$, der wegen $\sin 0 = 0$ aber auch verschwindet. Also ist auch die zweite Summe gleich Null. Es bleibt

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}$$

Mit $y_n := \frac{\pi}{2n}$ folgt $y_n \longrightarrow 0$, somit nach Vorlesung

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin y_n}{y_n} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

Mit (5) ergibt sich

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$